

# 數學教程

解析幾何與微積分

Н. П. ТАРАСОВ 着

楊弢亮 譯

商務印書館

蘇聯工業技術學校課本

數 學 教 程

— 解析幾何與微積分 —

И. И. ТАРАСОВ 著

楊 弢 亮 譯

商 務 印 書 館

И. П. ТАРАСОВ  
КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

數 學 教 程

—解析幾何與微積分—  
楊 發 亮 譯

---

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

中 國 圖 書 發 行 公 司 發 行

商 務 印 書 館 北 京 廠 印 刷

（53740）

---

1952年12月初版 1953年5月4版  
印數20,501—28,500 定價¥17,700

## 譯 序

這書是經蘇聯高等教育部審定，作為工業專科學校用的課本，定名為“高等數學教程”，內容共分三編：（一）平面解析幾何學，（二）微分學初步，（三）積分學初步。這些都是學習數學分析的基礎。在近代，工業和文化都在飛速地發展着，因此，對數學的需要也更覺迫切。數學分析所涉及的範圍，便顯得非常廣泛。它與物理學、力學、天文學、航空學、軍事學、光學、建築學及其他科學和工業，都有緊密的關係。它幾乎已是研究工業的基本工具之一了。青年學生若對數學分析缺乏了解，便不能研究任何一項工業。在目前，人民的新中國的工業建設需要大量發展工業專科學校及工業技術學校，大量培養中下級技術幹部。因此，需要簡明實用利於速成的教材。很明顯地，本書是能適合這種需要的。

本書的優點，約可歸納為下列五點：

（1）內容簡而扼要，首尾一氣貫注。例如，曲線的切線，在解析幾何部份內便不講，留着在微分學內纔講。因此，它是最經濟而實用的課本。對於工業專科學校利於速成的特性，尤為適合。若每週講課三時，全書可於一年內講完。若

進度快些，則每週五時，半年內便可講完。如單講微積分部份，則只須花上述時間的三分之二罷了。

(2) 講解詳明。例如，漸近線的性質，變數趨於極限的情形等，都是不憚其煩地反覆闡述，從未見別的課本能講解得如此周詳的。在解例題時，每一步驟的演化細節，都詳細地寫出來。全書的講解，詳細到如此程度，簡直可以使學生不藉聽講而能自己看得懂。我因此發生了一個感想，認為：好的課本，有着代替教師的功用。

(3) 在講解時，動輒舉例，例題類多生動具體，可以幫助學生更清楚地了解理論。例如，在解釋微係數時，引證了微係數在物理學、力學、化學、電流、熱容量等各方面的應用。可使學生明瞭微分學與各科都有關係。另外，計算方面的例題也很豐富。

(4) 習題全部都有答案。這可以增加學生獨立解題的信心，或自己發現錯誤而檢查校正。習題總數計681題（微積分學部份佔464題），平均每講課一時，應作八或六題。習題內容，大都難易適中，頗饒趣味。總之，真做到既簡且精。

(5) 有一部份教材，或涉及較深的理論，或尚非迫切需要，使用小號字排印，列為補充教材。教師可視教學的時間、計劃、進度等具體情況而選擇取捨。這樣，便增加了教材的彈性和適用範圍。這些補充教材，在譯本內，為清楚起見，仍以五號字排印，但在各節次的右上角加一\*號，作為區別。

最後，本書是在抗美援朝的偉大運動中，為響應愛國主義工作競賽而訂定的一個計劃。半年以來，一直用着這樣熱烈的希望而工作着：希望在祖國的工業建設及文化建設中多盡一分力量；希望介紹一些蘇聯的課本，以便國內從事教育工作的同志，可以有所參考與比較；希望為中蘇兩國的文化交流而服務。現在，這一工作，已在愉快而興奮的心情下結束了。但由於這還是初次的譯作，一定存在着很多缺點，希望讀者隨時賜函指正。

1952年2月 楊弢亮序於同濟大學

## 第七版序

在第七版課本內，僅修改一些已發現的錯誤，其餘和上一版毫無不同。

H. Тарасов.

## 第六版序

現在的第六版課本，實際上已與前版不同。首先，重大的變動是依照工業專科學校數學教學的新提綱作必要的調整。已加入一切新提綱所規定的內容並根據其講授順序。

不在最低綱要內的材料，但在某些技藝却需要學習的，用小號鉛字排印。

因數學教程的教學進度計劃，預見到有可能，用積分法確定迴轉體的體積，故在基本教材的最後一章內，導出關於這問題的一切公式。應用積分的附加原則，用例題的形式導出錐體體積的公式。這一部份的材料，用小號鉛字排印。

有時，定理的證明及公式的演化，用小號鉛字排印着，因基本教材僅作初步的講述，那一部份材料能夠完全有效地接受。

在改編課本時，亦曾注意到教師們指出的各種缺點。

這首先由於對分析的基本概念，函數的概念，給予的注意還不够。因此，現在對這問題已作比較詳細的講解。同時，我認爲反三角函數需要比別的初等函數作更周詳的考察。其原因，由於下列的判斷。首先僅在分析內，與函數的單值性及連續性的關係上，反三角函數主值的分法，其意義及重要，已是十分清楚的了。第二，通常，在三角課程內，學生們並沒有充分地熟習反三角函數。因此，以後的由於這種設想而闡述的一切材料，在講授的過程中，必要時或願意時，關於上述材料的全節均可略去。而“微分學”的研究，可以從講述變數的極限這一概念的那一節開始。

關於函數的連續性問題，說明得不很好，我已屢次得到指正。在這版內，我已努力糾正這缺點。

另外，極限定理現在這樣講法。變數趨於極限的一般概念，分別其情形爲：數列的極限，及自變數連續變化時函數的極限。其時一切講述，均基於幾何學的直覺，並不基於公式的論理的作圖。在列舉極限論的定理及無窮小、無限大的定義時，力求細密。爲着使學生們對變數極限的求法各步驟的意義，有更清楚的了解，故特地加入一節，專門講述求極限的某些特殊方法。

在原版的課本中，有些問題，依我的觀點看，是講得很失敗的，特別是關於函數極值的理論，微分概念的補充，近似計算等。這次，這些缺點都已獲得修正。 Н. Тарасов.



## 緒 言

學生們對於兩種數學科目；幾何及代數，是熟悉的。第二種學科，代數，似乎是與幾何對立的。每個人都能說出，三角形性質的研究，是幾何學的項目，而解二次方程式，則屬於代數的領域。

這課本的第一編，講述另一學科的基礎，命名為“解析幾何學”。意即，這並非簡單地就是以前所研究過的幾何學。“解析幾何學”這門學科另有它自己的一套方法，用代數的方法，研究幾何圖形（圖形、線、面等）。

就是在初等幾何學中，學生們已碰到代數的應用：許多幾何學的問題，由組成方程式而解出。但在初等幾何學中，代數的應用，尚非系統的方法。在解析幾何學中，則用代數來研究幾何物體的特性：形狀及相互位置。學生們將看到，例如，怎樣用方程式表示一圓。

這裏不想詳細地去解釋解析幾何學研究幾何物體時所用的那種方法，因為讓這學科本身的講述，來說明這方法，也許更簡單些。

課本的其餘兩編，內容為微積分學初步的研究。

這學科的基礎，建立在學生們所熟知的變數的極限的

概念上。在研究幾何圖形時，已使學生們熟悉這些概念。但在幾何學中，應用到極限，僅是極偶然的，而在微積分學中，極限的概念，却成爲建立這門學科的基石。但研究的方法是些什麼，這些方法的根據在那裏——却不可能解釋，因爲在這裏，我們僅簡單地一述這課本的內容。

在現代，微積分學已是走向名爲“數學分析”的廣大數學領域的嚮導。

數學分析大約誕生在三百年以前。它的由來，是淵源於一連串的物理學的、天文學的、幾何學的、力學的問題，這些問題，則產生於航海學、天文學、軍事學、光學、建築學及其他一切有關於工業與文化發展而提出的需要。在現代，若對分析的原理缺乏了解，便不可能研究任何一項工業。建築輝煌美麗的數學分析的大廈，曾經過許多偉大的數學家的努力，其中，俄國數學家的名氏，亦發射着不朽的光芒。

在短短的緒言內，要敘述俄國數學家在數學上的偉大貢獻，不僅是不可能的，甚至把最偉大的數學家的名氏一個一個數過去都不可能。故我們不得不僅限於追念在數學史上扮演最偉大的角色的學者。

若談起數學分析發展的歷史，則不能不記念俄國學者米哈依爾·伐雪列葉維支·奧斯托洛克賴特斯基（Михаил Васильевич Остроградский 1801—1862）。米·伐·奧斯托洛克賴特斯基的一連串的科學的結果加入課本內去，而他

的名字，遂為全體數學家所共知。奧氏遺下的可貴的功績，不僅在數學方面，並且在力學方面，在天體力學及接近數學領域的其他方面。

巴夫奴吉·立伏維支·欠培式夫 (Пафнутие Львович Чебышев 1821—1894) 的名氏是衆所共知的。他所遺下的不能忘却的遺跡，幾乎普遍地存在於一切數學領域內。他的著作，在應用科學範圍內的及在純粹數學範圍內的，都屬於第一流的傑作。他在機械論方面的著作，已成為經典。欠氏還創造了 40 種以上的機械。

最最偉大的數學家，是巴·立·欠培式夫的學生，亞歷山大·米哈依洛維支·略普諾夫 (Александр Михайлович Ляпунов 1857—1918)。略氏一直在數學和力學的範圍內工作。他在解決難題方面的研究，是可驚地真確與精密。很有趣地，法國著名的學者愛·邦加里 (А. Пуанкаре 1854—1912) 用自己的署名發表了一篇著作，在這篇著作內，僅採用了略氏畢業論文的結果中的一部份。

當然，學生們都知道偉大數學家之一，尼古拉·伊凡諾維支·洛吧欠夫斯基 (Николай Иванович Лобачевский 1793—1856) 的名氏。洛氏的關於幾何學的天才著作，已足使他的名氏永垂不朽。洛氏開闢了新的幾何學與歐幾里得時代，人所共知的幾何學不同。洛氏的思想，甚至超越了自己的時代，甚至與他同時的大數學家，都不能完全理解，直至

他死後纔獲得認識。

十九世紀的天才數學家，或者像尼·伊·洛吧欠夫斯基那樣完全獨立地工作着，或者僅在少數學生的環繞中工作着。他們的工作只成爲少數專家的成就，社會上對他們的功績有些什麼認識，那就說不上了。政府的官僚階級亦是如此，而且還經常對俄國科學的發展懷着敵意。讀着俄國大科學家的傳記，對於他們對官僚階級的頑固，仍堅持科學研究的興趣的這種意志力，不勝驚詫。因此，近代科學，特別是數學的成長，僅從 1917 年偉大的十月革命以後才開始，這是不足驚奇的。

在偉大的十月社會主義革命以後，科學方纔成爲羣衆的。在全國敷設廣大的科學網，普設新型高等學校及科學機構。蘇聯的一切公民，都能接觸科學的教育。黨和政府用一切明顯的設施，關懷我們蘇聯科學工作者。在一切聯邦共和國內，設立大科學中心。因此，現在已不能指出再有周圍沒有廣大學生和門徒繞着的大科學家了。科學的創作，成爲集體的了。

在蘇聯，科學的繁榮，導致蘇聯學校的設立，依照數學的分類：函數論、數論、公算論、或然性論等等。許多蘇聯的數學家在應用數學的範圍內工作着，很有成就。蘇聯的數學家在保衛祖國的光榮工作中，也有不少功績。

在現代，蘇聯數學在世界上佔着領導的地位。

# 目 次

## 第一編 平面解析幾何學

### 第一章 坐 標..... 1

1. 用數字定平面上一點的位置 2. 符號規則 3. 狄卡氏直角坐標制 平面上一點的坐標 4. 兩點間的距離 5. 分線段於已知比 習題(1—39)

### 第二章 直 線..... 18

6. 直線方程式 角係數式 7. 坐標軸及平行於坐標軸之直線的方程式 8. 直線方程式的一般形式及其討論 9. 過一已知點的直線族方程式 10. 過兩已知點的直線方程式 11. 直線的截距式 12. 兩直線間的交角 13. 兩直線平行及垂直的條件 14. 兩直線的交點 習題(1—60)

### 第三章 二次曲線..... 50

15. 軌跡及軌跡方程式 16. 圓 17. 橢圓 18. 橢圓形狀的討論 19.\* 橢圓的作圖法 20. 橢圓的離心率 21. 橢圓與圓的關係 22. 雙曲線 23. 雙曲線形狀的討論 24. 雙曲線的漸近線 25. 等邊雙曲線 26. 拋物線 27. 拋物線

$y = Ax^2 + Bx + C$  28.\* 曲線的參變數方程式 29.\* 圓的參變數方程式 30.\* 橢圓的參變數方程式 31. 二次曲線爲圓錐截線 習題(1-104)

## 第二編 微分學初步

### 第四章 函數及極限..... 101

32. 關於絕對值的定理 33. 變數及常數 34. 函數的概念  
35. 函數的記法 36. 函數的建立 37. 函數的圖解 38. 初等函數及其圖解線 39. 變數的極限 40. 無窮小 41. 無限大 無窮小與無限大間的關係 42. 有限數 43. 無窮小的基本定理 44. 變數, 變數的極限與無窮小間的關係  
45. 極限的基本定理 46. 自變數及函數的增量 47. 函數的連續性 48. 極限的求法 49. 關於連續函數的兩定理  
習題(1-47)

### 第五章 導數..... 159

50. 等速運動及其速度 一次函數的變率 51. 不等速運動及其速度 52. 函數的變率 53. 導數 54. 曲線的斜率 曲線的切線及法線 55. 導數與函數的連續性的關係 習題(1-27)

### 第六章 微分法..... 183

56. 基本公式一覽表 57. 常數的導數 58. 函數的代數和的導數 59. 兩函數乘積的導數 60. 幂函數的導數 61. 分式函數的導數 62. 複合函數的導數 63. 例題 64. 對

數函數的導數 65. 任意指數的冪函數的導數 66. 指數函數的導數 67. 例題 68.  $\frac{\sin z}{z}$  在  $z \rightarrow 0$  時的極限 69. 三角函數的導數 70. 例題 71. 反三角函數的導數 72. 例題  
習題(1—125)

## 第七章 函數的研究 ..... 223

73. 函數的變動 74. 函數在區間內漸增及漸減 75. 函數的極值的求法 76. 二級導數 77. 檢定函數的極值的第二法 78. 曲線在一點處向上凹及向下凹 79. 變曲點 80. 函數作圖法 習題(1—89)

## 第八章 微分 ..... 263

81. 微分爲函數增量的主部 82. 函數的微分的圖解 83. 求微分的基本公式 84. 用微分計算近似值 85.\* 弧的微分 86.\* 曲線的曲率 87.\* 曲率圓及曲率半徑 88.\* 例題  
習題(1—34)

# 第三編 積分學初步

## 第九章 不定積分 ..... 291

89. 積分法 不定積分 90. 不定積分的性質 91. 積分的基本公式 92. 較簡的積分法 93. 由原始條件求積分常數  
習題(1—72)

## 第十章 定積分 ..... 316

94. 不定積分的圖解 95. 定積分作爲面積 96. 定積分作

爲和的極限 97. 定積分的性質 98. 積分求和法的原則  
 99. 錐體的體積 100. 面積計算舉例 101. 迴轉體的體積  
 102\*. 圓錐體、圓錐台體、圓球體、圓球殼體的體積 103. 功  
 104. 液體壓力 習題(1-51)

## 附 錄

### 第十一章\* 變數可分離的一級微分方程式 ..... 357

105. 定義 106. 由例題說明微分方程式 107. 變數可分離  
 的一級微分方程式 習題(1-19)

### 第十二章\* 極坐標 ..... 368

108. 有向角 109. 平面上一點的極坐標 110. 極坐標制與  
 直角坐標制互相轉換公式 111. 曲線的極坐標方程式 112.  
 極坐標方程式的組成及依照方程式作出曲線的例題 習題  
 (1-14)



# 數 學 教 程

## 第一編 平面解析幾何學

### 第一章 坐 標

(平面上一點的直角坐標 坐標法應用上的最簡單的問題)

#### 1. 用數字定平面上一點的位置

(1) 解析幾何學的第一個問題是規定一種方法，用數字來定平面上一點的位置。

在平面上任意作兩條互相垂直的直線  $Ox$  及  $Oy$  (圖1)。這兩條直線的位置，我們認為是已知的固定的，並且用這一組直線做標準，去確定平面上任何一點的位置。

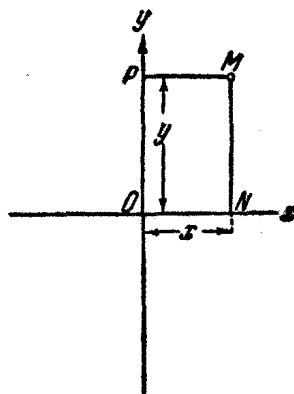


圖 1

(1)