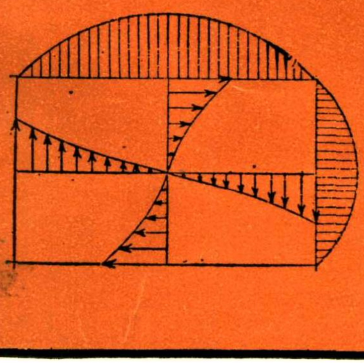
材料力學講義

趙國華編



香港 三育圖書文具公司 出版

材料力學講義

趙國華編

香港三育圖書文具公司出版

・趙國華編・

料材力學講義

出版發行：三育圖書文具公司
香港九龍彌敦道五八〇號G
San Yu Stationery & Publishing Co.
580G, Nathan Road Kowloon Hongkong

印刷：順利印刷廠
鰂魚涌船塢里華厦工業大厦7樓A

1972年9月版　定價港

目　　錄

第一章　拉伸與壓縮……………………………………………………1

1．彈性．2．應力和應變．3．虎克定律．4．拉伸試驗圖．5．工作應力．6．拉伸與壓縮的超靜定問題．7．熱應力．8．圓環與薄管

第二章　剪……………………………………………………………17

1．剪應力、剪應變及剪力彈性係數．2．兩垂直方向上的剪應力

第三章　鉚接…………………………………………………………22

1．鉚接式樣．2．鉚接的損壞原因．3．鉚接的强度及效率．

第四章　應力和應變的分析…………………………………………28

1．單向的拉伸或壓縮．2．兩垂直方向的拉伸或壓縮．3．純剪　4．平面應力的一般情形．5．應力圓．6．單向拉伸時應變的分析．7．兩垂直方向受拉伸或壓縮時的應變．8．三互相垂直方向的拉伸或壓縮．

第五章　剪力與彎矩…………………………………………………44

1．梁．2．剪力和彎矩．3．剪力和彎矩的關係．4．剪力和彎矩的方程式和圖示法．5．運動載荷及影響線．

第六章　梁內應力……………………………………………………59

1．彎曲應力．2．剪應力．3．彎曲時的主應力．4．等强度梁．5．鋼筋混凝土梁．

第七章　梁的撓度……………………………………………………81

1．撓曲公式．2．由彎矩圖求撓度．3．用共軛梁求撓度．4　用重疊法求撓度．5．變斷面梁的撓度．6．不與梁斷面對稱軸平行的各載荷所起的應力與撓度．

第八章　超靜定梁的彎曲……………………………………………105

1．過剩拘束．2．一端固定一端支托着的梁．3．兩端固定的梁．4．

三支座的梁．5．連續梁．

第九章　扭轉……117

1．圓軸的扭轉．2．矩形斷面梁．3．螺旋彈簧(簧圈密接的)．

第十章　拉壓、彎曲與扭轉的合成結果……133

1．彎曲與壓或拉的合成結果．2．短柱的偏心載荷．3．軸向拉壓與扭轉的合成結果．4．圓軸的彎曲與扭轉的合成結果．

第十一章　柱……147

1．柱的翹曲．2．臨界載荷．3．柱端處於各種情形的臨界載荷．4．臨界應力．5．設計柱的經驗公式．

第十二章　應變能……163

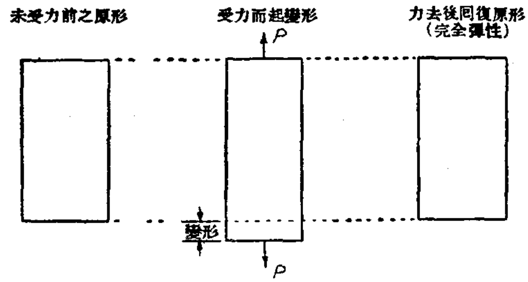
1．拉伸的應變能．2．純剪的應變能．3．扭轉的應變能．4．彎曲的應變能．5．卡氏定理．

材料力學講義

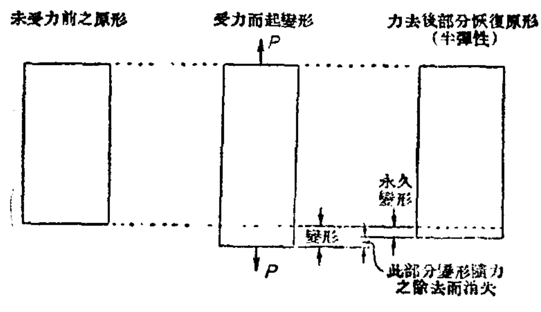
材料力學討論作用於彈性體的外力與其所起內力、變形間的關係.

第一章　拉伸與壓縮

1. 彈性. 物體受力則變形，力除去後則仍回復其原形，此種性質謂之彈性.

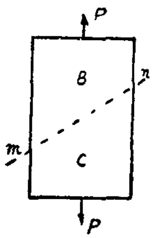


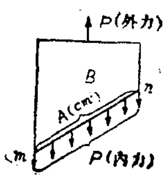
作用於物體之力除去後，該體能完全回復其原形者，稱爲完全彈性體. 若僅能恢復原形的一部分，而尙有一部分變形仍剩留着，則爲半彈性體. 力除去之後所剩留的變形稱爲永久變形.



物體或為完全彈性體或為半彈性體視所受之力大小而定，倘所受之力並未超過一定限度，則呈完全彈性體，逾此限度則呈半彈性體．此限度視材料而定．

2. 應力和應變． 先論外力對於物體內部所起之影響．將受有拉力(或壓力) P 之稜柱形桿以斷面 mn 分為 B、C 兩部，今論 B 部(或 C 部)的平衡情形．



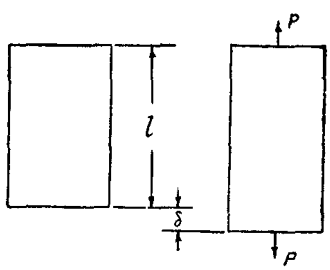


C 部對於 B 部之作用，施於斷面 mn 上，係在桿之內部，故稱為內力，應與外力平衡．內力 P 係分佈於斷面 mn 單位面積上的內力 P/A 稱為應力，以 S 表示之：

$$S=\frac{P}{A} \tag{1-1}$$

設 P 以 kg 計，A 以 cm^2 計，則 S 以 kg/cm^2 計．

再論外力對於物體形狀所起之影響．設一稜柱形桿原長 l，受外力(拉力或壓力) P 時所起總伸長(或總縮短)為 δ，則該桿原長一單位的



伸長或縮短（即單位伸長或單位縮短）δ/l 稱爲抗拉應變或抗壓應變，以 e 表示之：

$$e=\frac{\delta}{l} \tag{1-2}$$

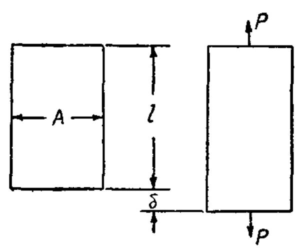
應變 e 爲兩長度之比値。

3. **虎克定律**．當物體所受之應力尙未超過一定限度，則所起應變與此應力成正比，此卽虎克定律，以式示之：

$$e=\frac{S}{E} \tag{1-3}$$

其常數 E 稱爲材料的彈性係數或楊氏模數．建築鋼的 $E=2.15\times 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$。

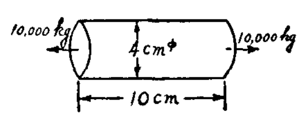
對於稜柱形桿，其 $S=P/A$，$e=\delta/l$，



則
$$\frac{\delta}{l}=\frac{\frac{P}{A}}{E}$$

卽
$$\delta=\frac{Pl}{AE} \tag{1-4}$$

【例】　設有圓柱形鑄鐵試樣，其 $E=1.05\times 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$，求 (1) 抗張應力；(2)全部縱伸長。



【解】(1)　$A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi}{4}\times 4^2=4\pi=12.6\ \mathrm{cm^2}$

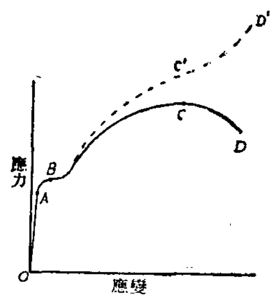
$$S=\frac{P}{A}=\frac{10{,}000}{12.6}=794\ \mathrm{kg/cm^2}$$

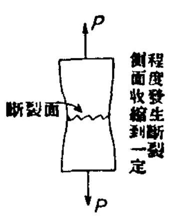
(2)
$$e=\frac{S}{E}=\frac{794}{1.05\times10^6}=756\times10^{-6}$$

$$\delta=el=756\times10^{-6}\times10=0.00756\ \mathrm{cm}$$

或
$$\delta=\frac{Pl}{AE}=\frac{10{,}000\times10}{12.6\times1.05\times10^6}=0.00756\ \mathrm{cm}$$

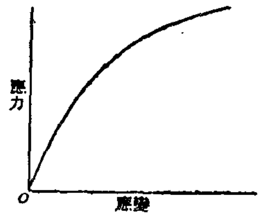
4. 拉伸試驗圖． 受力物體中的應力和其應變間的關係得以拉伸試驗圖表示之．建築鋼等較易延伸的展性材料，其拉伸試驗如下圖所示．由 O 至 A 爲直線，表示應力和應變成正比．A 爲直線 OA 的最高點，相當於 A 點的應力稱爲比例極限，故在比例極限以內，應力和應變始成正比，而虎克定律亦祇在此極限以內適用．在 B 點附近曲線近乎水平，表示應力並未顯著增加而應變却已突然增加很多，即材料抵抗變形的能力基本上已消失了．相當於 B 點的應力稱爲屈服點．C 爲曲線上的最高點，相當於 C 點的應力稱爲極限強度，乃物體拉斷之前所達到的最大應力．D 爲曲線的終點，相當於 D 點的應力稱爲斷裂點，乃物體拉斷時所有的應力．以上各點應力均就試樣之原有橫斷面積計算，實際上拉伸之際側面收縮，如左圖所示．應力超過屈服點之後收縮更爲顯著．倘以各時刻已收縮的實際橫斷面積計算應力，則得正確的拉伸試驗圖如前圖之曲線 $OABC'D'$．其斷裂點 D' 高出極限強度 C'．





但材料的屈服點及極限強度一般均就原有橫斷面積計算．

鑄鐵等不易延伸的脆性材料，其拉伸試驗圖如下圖所示。



脆性材料的比例極限纔低而屈服點不顯著。

數種常用材料的機械性質如下表所示。

材　　料	E kg/cm²	屈服點 kg/cm²	極限強度 kg/cm²
低炭鋼	2×10^6	1800 以上	3300～4000
鑄鋼	2.15×10^6	2100 以上	3500～3700 以上
彈簧鋼	2.2×10^6		10000～17000 以上
鑄鐵	$(0.75\sim1.05)\times10^6$		1200～2400
黃銅	$(0.8\sim1.1)\times10^6$		1500
青銅	0.9×10^6		2000～3000
鋁	$(0.675\sim0.726)\times10^6$		930～1500
玻璃	0.7×10^6		2500
松木(順紋向)	0.11×10^6		560～1400
混凝土(受壓縮時)	0.28×10^6		210

5. 工作應力. 茲論 $S=P/A$ 式中 S 的極限值，如材料爲展性者，則取屈服點 S_{yp} 爲其極限，逾此將起永久變形。又如材料爲脆性者則取極限強度 S_u 爲其極限，逾此將斷裂。故最小橫斷面積爲

$$A_{\min}=\frac{P}{S_{yp}}\quad 或\quad A_{\min}=\frac{P}{S_u}$$

爲安全起見，常用較大的橫斷面積 A，即

$$A=nA_{\min}$$

其 $n>1$，如此則材料中所起應力爲

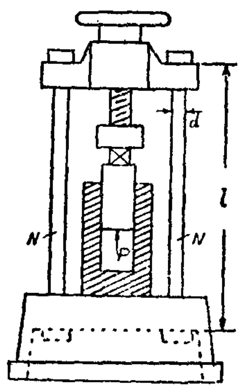
$$\frac{P}{A}=\frac{P}{nA_{\min}}=\frac{S_{yp}}{n}\quad 或\quad \frac{S_u}{n}$$

此應力稱爲工作應力，以 S_w 表示之：

$$S_w=\frac{S_{yp}}{n}\quad 或\quad \frac{S_u}{n} \tag{1-5}$$

其 n 稱爲安全因數．

【例】 圖示一壓力機，$P=50{,}000$ kg，$l=100$ cm．求鋼螺栓 N 的直徑 d，及受到最大拉力 P 時的總伸長． 取鋼的工作應力 $S_w=700\ \text{kg/cm}^2$．



【解】 兩鋼螺栓的總面積爲

$$\frac{P}{S_w}=\frac{50{,}000}{700}=71.4\ \text{cm}^2$$

每個螺栓的面積爲

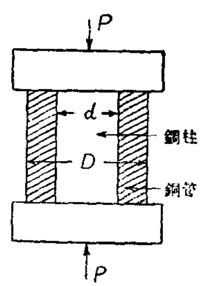
$$\frac{\pi}{4}d^2=\frac{71.4}{2}=35.7\ \text{cm}^2$$

$$\therefore\quad d=6.76\ \text{cm}$$

螺栓的總伸長爲

$$\delta=el=\frac{S_w}{E}\,l=\frac{700}{2.1\times10^6}\times100=0.033\ \text{cm}$$

6. 拉伸與壓縮的超靜定問題． 單憑靜力學方程式不能解答的問題，謂之超靜定問題，欲求其解必須同時討論其變形情形． 玆舉例說明：



設鋼柱與銅管長度相同，其 $d=10$ cm，$D=20$ cm，今置於壓力機中以 $P=50{,}000$ kg 壓之．求鋼與銅內的抗壓力 S_s 及 S_c、單位壓縮 e_s 及 e_c． 已知

鋼的 $E_s=2.1\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$，銅的 $E_c=1.13\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$.

【解】 由靜力學得：

$$P=\frac{\pi d^2}{4}S_s+\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}S_c$$

即
$$50{,}000=\frac{\pi\times10^2}{4}S_s+\frac{\pi(20^2-10^2)}{4}S_c \tag{a}$$

再論變形：
$$\because\quad \delta_s=\delta_c,\quad l_s=l_c$$

$$\therefore\quad \frac{\delta_s}{l_s}=\frac{\delta_c}{l_c}$$

即
$$e_s=e_c$$

$$\therefore\quad \frac{S_s}{E_s}=\frac{S_c}{E_c}$$

即
$$\frac{S_s}{2.1\times10^6}=\frac{S_c}{1.13\times10^6}$$

$$\therefore\quad S_s=\frac{2.1}{1.13}S_c=1.86\,S_c \tag{b}$$

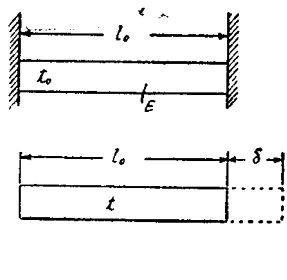
由 (a) 及 (b) 解得

$$S_c=159\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$S_s=1.86\times159=296\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$e_s=e_c=\frac{S_c}{E_c}=\frac{159}{1.13\times10^6}=0.000141$$

7. 熱應力. 物體熱則脹冷則縮，倘此項脹縮有所阻礙，則起應力，是即熱應力。今說明兩端固定之稜柱形桿因溫度增加而起的熱應力.

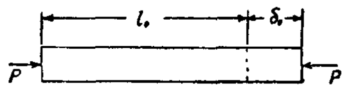


暫設兩端並不固定，桿可自由伸縮，則溫度由 t_0 至 t 後，其長度 l_0 將增加

$$\delta=\epsilon l_0(t-t_0)$$

其 ϵ 爲桿的熱膨脹係數。

今桿端被牆固定，桿不能自由伸長，卽牆施壓力 P 於桿端以阻止其因熱而起之伸長 δ，亦卽壓力 P 所起的縮短適爲 δ。



抗壓應變爲

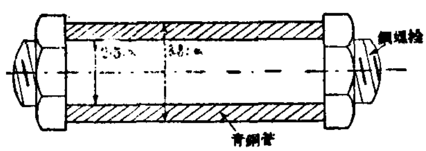
$$e=\frac{\delta}{l_0}$$

抗壓應力爲

$$S=Ee=E\frac{\delta}{l_0}=E\frac{\epsilon l_0(t-t_0)}{l_0}$$

卽 $$S=E\epsilon(t-t_0) \tag{1-6}$$

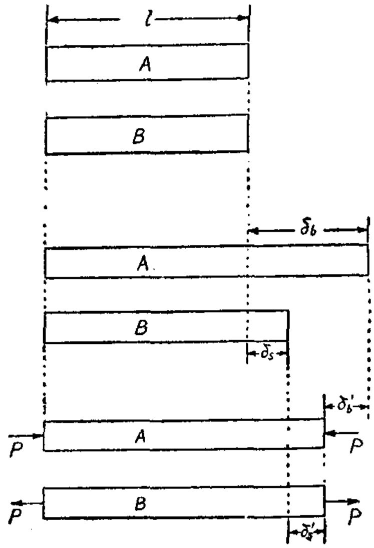
【例】　設在 40°F 時螺母底與管端適相配合，求在 160°F 時所起於銅管與鋼螺栓中的應力。　已知



$$\text{彈性係數}\begin{cases}\text{青銅 } E_b=0.68\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}\\ \text{鋼 } E_s=2.15\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}\end{cases}$$

$$\text{每 °F 的熱膨脹係數}\begin{cases}\text{青銅 } \epsilon_b=10.1\times10^{-6}\\ \text{鋼 } \epsilon_s=6.1\times10^{-6}\end{cases}$$

【解】　介於兩螺母間的青銅管以 A 表示，鋼螺栓以 B 表示。



在40°F.

在160°F如無螺帽,可自由膨脹.

$$\delta_b = l\epsilon_b(160-40)$$

$$\delta_s = l\epsilon_s(160-40)$$

在160°F因有螺帽,A與B須等長.P將A壓短δ_b'而將B伸長δ_s'.

$$\delta_b' = \frac{Pl}{A_b E_b}$$

$$\delta_s' = \frac{Pl}{A_s E_s}$$

$$\delta_b - \delta_b' = \delta_s + \delta_s'$$

卽
$$l\epsilon_b(160-40) - \frac{Pl}{A_b E_b} = l\epsilon_s(160-40) + \frac{Pl}{A_s E_s}$$

$$10.1\times10^{-6}\times120 - \frac{P}{\frac{\pi}{4}(3.8^2-2.5^2)\times0.68\times10^6}$$

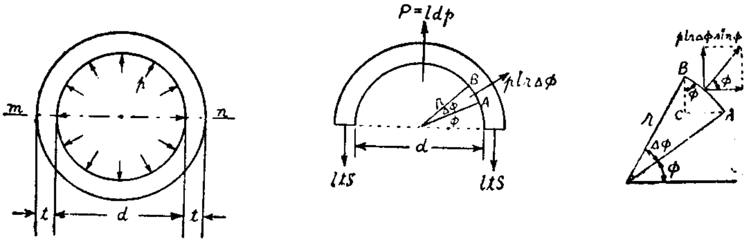
$$=6.1\times10^{-6}\times120 + \frac{P}{\frac{\pi}{4}\times2.5^2\times2.15\times10^6}$$

$$\therefore\quad P = 1480\ \text{kg}$$

青銅管中壓應力
$$S_b = \frac{1480}{\frac{\pi}{4}(3.8^2-2.5^2)} = 287\ \text{kg/cm}^2$$

鋼螺栓中拉應力
$$S_s = \frac{1480}{\frac{\pi}{4}\times2.5^2} = 231\ \text{kg/cm}^2$$

8. 圓環與薄管． 受內壓的圓環，例如箍等，欲求環內的應力，則以斷面 mn 將該環分爲上下各半，可知其斷面上有拉力作用．



環的 AB 一部分的長爲 $r\Delta\phi$，寬爲 l（與圖面垂直），故其面積爲 $(r\Delta\phi)\,l=lr\Delta\phi$．該部分所受的壓力爲 $p\,(lr\Delta\phi)$，其垂直分力爲 $plr\Delta\phi\sin\phi$，故半個環的總壓力爲

$$P=\Sigma plr\Delta\phi\sin\phi=pl\Sigma(r\Delta\phi)\sin\phi$$

但 $(r\Delta\phi)\sin\phi$ 爲弧 AB 的水平投影 AC．故 $\Sigma(r\Delta\phi)\sin\phi$ 爲半圓的水平投影，等於內直徑 d．

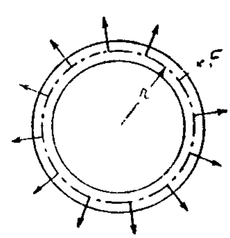
$$\therefore\quad P=pld$$

各橫斷面的面積爲 lt，其 l 爲斷面的寬，t 爲其厚，斷面上的拉應力設爲 S，因其作用於切線方向，故稱爲切線應力．斷面上的總拉力爲 $2ltS$．

$$\therefore\quad 2\,ltS=pld$$

$$\therefore\quad S=\frac{pd}{2t}\tag{1-7}$$

迴轉圓環． 此時有離心力發生，分佈於其圓周，相當於前述的壓力 p．設環的單位容積重量爲 w，或單位容積的質量爲 $\dfrac{w}{g}$，環的橫斷面積設爲 A，則沿圓周每單位長度的質量爲



$$m=\frac{w}{g}A$$

環的平均半徑設爲 r，平均圓周速度設爲 v，則離心加速度爲

$$a=\frac{v^2}{r},$$

故單位長度的離心力爲

$$F=\frac{wA}{g}\frac{v^2}{r},$$

此力相當於前述的壓力 p. 半個環的總離心力爲 $P=Fd$,卽

$$P=\frac{wAv^2}{gr}d,$$

設環的橫斷面積上所起的拉應力或切線應力爲 S，則總拉力爲 $2AS$，

$$\therefore\quad 2AS=\frac{wAv^2d}{gr},$$

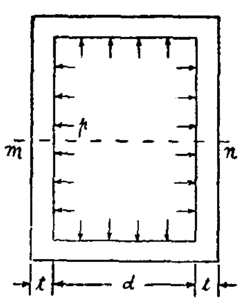
$$\therefore\quad S=\frac{wv^2d}{2gr},$$

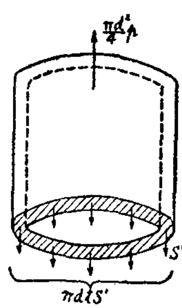
或

$$S=\frac{wv^2}{g}. \tag{1-8}$$

故迴轉圓環內的應力與圓周速度的平方成正比.

薄管. 受內壓的閉口薄管,情形與受內壓的圓環相似.





故其切線應力亦爲

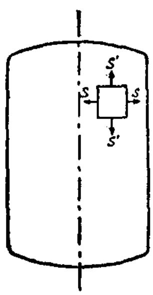
$$S=\frac{pd}{2t}. \tag{1-9}$$

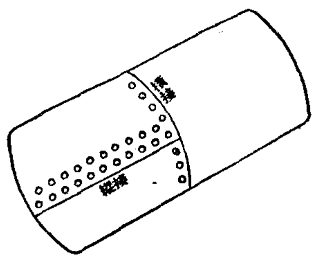
今將該管以斷面 mn 橫剖之而論上半部在軸向的平衡情形：作用於管端的總壓力爲 $\frac{\pi d^2}{4}p$，拉應力設爲 S'，因其作用於軸線方向，故稱爲縱向應力；斷面上的總拉力爲 $\pi dtS'$，

$$\therefore \quad \pi dtS'=\frac{\pi d^2}{4}p,$$

$$\therefore \quad S'=\frac{pd}{4t}, \tag{1-10}$$

管壁受到縱向與切線兩種應力，切線應力較縱向應力大一倍． 汽鍋板一類的鉚接，如橫接用一排鉚釘，則縱接須用兩排鉚釘．





【例】 設有鑄鐵飛輪，平均直徑 4 m，轉速爲 120 rpm． 輪緣之寬爲 25 cm，厚爲 30 cm． 視輪緣的撓曲完全不受輪臂的影響． 求輪緣中的應力．

【解】 鑄鐵的重爲 $w=0.0078\ \mathrm{kg/cm^3}$．

緣的平均速度 $$v=\frac{\pi\times4\times120}{60}=25.2\ \mathrm{m/sec}.$$

切線應力爲 $$S=\frac{wv^2}{g}=\frac{0.0078\times2520^2}{981}=50.3\ \mathrm{kg/cm^2}.$$

【例】 設有 6 cm 厚的輪箍，趁熱裝於直徑 180 cm 的輪上，輪可視