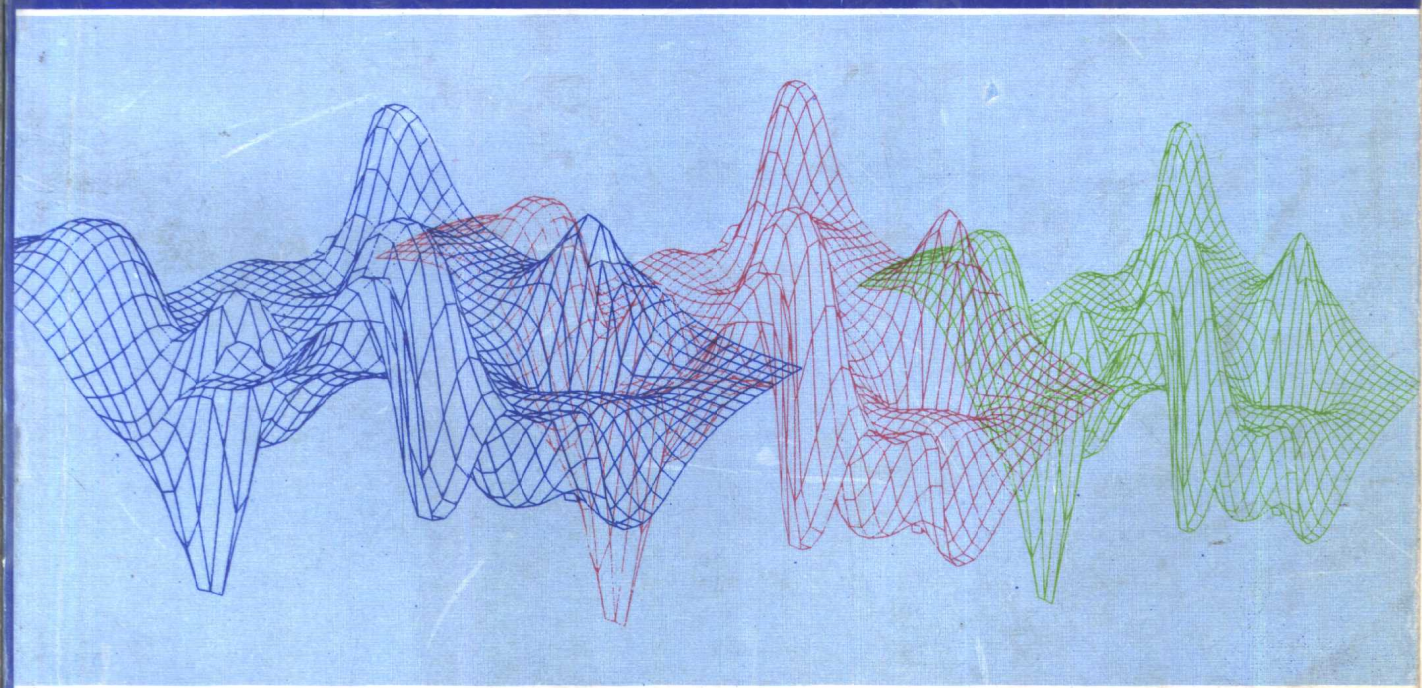


数学地质基础

徐振邦 娄元仁 编著



北京大学出版社

P5-05
X-972

数学地质基础

徐振邦 姜元仁 编著

北京大学出版社

842006

新登字(京)159 号

图书在版编目(CIP)数据

数学地质基础/徐振邦, 娄元仁编著.

北京: 北京大学出版社, 1994. 9

ISBN 7-301-02429-0

I. 数…

I. ①徐… ②娄…

II. ①数学: 地质学 ②地质学: 数学

N. P5

书 名: 数学地质基础

著作责任者: 徐振邦、娄元仁

责任编辑: 徐信之

标准书号: ISBN 7-301-02429-0/O · 337

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

电 话: 出版部 2502015 发行部 2559712 编辑部 2502032

排 印 者: 北京大学地质系计算机室

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787×1092 毫米 16 开本 21 印张 520 千字

1994 年 11 月第一版 1994 年 11 月第一次印刷

定 价: 21 元

前 言

自六十年代以来,随着科学技术、测试技术、电子计算机的发展,在地质学的研究和实践领域中开始大量地应用数学理论方法进行定量地研究、分析处理、判断和解决地质问题.由于地质学和数学的紧密结合与发展,在地质学中逐渐形成了一门新的“数学地质”学科.它是用数学的理论方法和电子计算机手段研究地质学基础理论和解决地质学及其实践问题的应用性地质学分支.它的内容包括地质变量的统计与推断,地质数据的拟合方法,地质变量与地质体的定量分类、判别和成因分析,地质学中的随机过程和统计模拟,地质统计学,资源与矿床的统计预测,地质信息系统与专家系统等等.

最近二十年来,我国数学地质研究工作逐渐扩展到地质学其他分支学科和实践领域中,在地质学研究与实践发挥了重要的作用.为适应地质事业发展的需要,1976年以后我国各高等地质院校先后开设了数学地质课程,开始讲授数学地质.

本书主要是根据作者多年来从事数学地质教学和在地学领域中讲授“地学数据处理方法”的经验和体会,在1976年编写的“数学地质(一)、(二)”基础上多次修改编写而成.本书是一本向地质专业的学生和地质专业技术人员介绍数学地质的基础知识、理论、方法及其应用的教科书.在编写过程中,力求用通俗的数学表达方法及必要的推导证明来阐明方法的数学模型,用实例说明实现方法应用的计算过程和主要步骤及结果的分析解释.使学生和读者掌握数学地质方法及其应用.

本书内容可分为以下五个部分

- 一、概率论的基础知识(第一章);
- 二、地质变量的统计与推断(第二、三章);
- 三、地质数据的拟合方法(第四至六章);
- 四、地质变量与地质体的定量分类、判别及成因分析(第七至十二章);
- 五、地质学中的随机过程与统计模拟(第十三至十五章).

本书编写过程中得到领导和多方的鼓励与支持,在此深表谢意.由于我们水平和经验有限,书中缺点、错误之处,请读者批评指正.

作 者

1990年12月

目 录

第一章 概率论的基本知识.....	1
§ 1 随机现象 随机事件及其概率	1
一 随机现象与统计规律.....	1
二 随机事件及其概率.....	2
三 随机事件的运算及概率的加法公式.....	5
四 条件概率、乘法公式、独立性.....	8
五 全概公式与逆概公式	10
六 独立试验序列概型	12
§ 2 随机变量及其分布	14
一 随机变量	14
二 离散型随机变量	15
三 连续型随机变量	17
四 随机变量的分布函数	19
§ 3 随机变量的数字特征	22
一 随机变量的数学期望	23
二 随机变量的方差	24
三 几个常用分布的数学期望与方差	25
§ 4 大数定律与中心极限定理	26
一 大数定律	26
二 中心极限定理	27
第二章 统计推断	28
§ 1 地质数据资料的整理	28
一 总体、个体及样本	28
二 数据的统计分组、列表与作图	29
三 地质观测数据的性质	32

§ 2 参数估计	38
一 点的估计	38
二 区间估计	40
§ 3 假设检验	47
一 一个正态总体参数的假设检验	48
二 两个正态总体参数的假设检验	50
三 分布函数的假设检验	53
 第三章 方差分析	 61
§ 1 单因子方差分析 (一元方差分析)	61
一 单因子方差分析的数学方法	61
二 单因子方差分析的计算步骤	64
三 应用实例	65
四 各个水平试验次数不相同情况下的方差分析	67
§ 2 双因子方差分析 (二元方差分析)	70
一 无交互作用双因子方差分析	70
二 无交互作用双因子方差分析的计算步骤	73
三 含有交互作用的双因子方差分析	74
四 含有交互作用方差分析的计算步骤	76
§ 3 数据可利用程度的检验方法	78
一 检验方法	78
二 应用实例	80
 第四章 回归分析	 82
§ 1 一元线性回归分析	83
一 用最小二乘法确定回归方程的系数	84
二 回归方程的具体计算步骤	86
三 回归方程的显著性检验	88
四 用回归方程进行预测	91
五 应用实例	92
§ 2 多元线性回归分析	98
一 用最小二乘法确定回归平面 (或超平面)	98

二	回归方程的显著性检验	100
三	用回归方程进行预测	101
四	应用实例	101
§ 3	多项式回归分析	103
§ 4	逐步回归分析	106
一	数据的标准化	106
二	选入变量与剔除变量的原则	108
三	逐步回归的具体计算步骤	110
四	应用实例	114
§ 5	组合变量全部回归分析	123
一	组合变量全部回归分析与选优方法	123
二	应用实例	128
第五章	移动平均分析	131
§ 1	观测线上数据的移动平均分析	131
一	移动平均值的数学方法	131
二	移动平均的具体作法	135
§ 2	平面数据的移动平均分析	137
一	数据的网格化	137
二	方里网原始数据的标准离差	138
三	窗口与窗口大小的确定原则	138
四	平面数据移动平均计算方法与步骤	139
第六章	趋势面分析	144
§ 1	趋势面方程的求法	144
一	一次趋势面方程的求法	144
二	二次趋势面方程的求法	146
§ 2	趋势面的拟合程度	147
§ 3	地质背景的估计	148
§ 4	实例	149
第七章	判别分析	161
§ 1	判别分析的概念	161

§ 2 二级判别分析	163
一 线性判别函数的确定原则	163
二 线性判别函数的求法	164
三 显著性检验	166
四 因素的挑选方法	167
五 二级判别实例	167
§ 3 多级判别分析	176
一 多级判别函数的确定方法	176
二 判断的决策规则	178
三 因子的选择	179
四 多级判别分析的实例	179
§ 4 逐步判别分析	184
一 逐步判别分析的数学方法	184
二 逐步判别分析的计算步骤	187
三 应用实例	190

第八章 群分析 192

§ 1 数据的正规化与标准化	192
§ 2 分类的尺度	193
一 距离	194
二 相似系数	194
三 相关系数	195
四 χ^2 距离系数	196
五 ϕ^2 距离系数	196
六 二态型变量数据的分类尺度	196
七 模糊群分析的分类尺度	197
§ 3 逐步形成分类系统的方法	198
§ 4 逐步形成分类系统的实例一	200
一 对因素进行 R 型群分析	200
二 对样品进行 Q 型群分析	204
§ 5 逐步形成分类系统的实例二	207
一 对因素进行 R 型群分析	208

二 对样品进行 Q 型群分析	208
§ 6 一次形成分类系统方法	209
§ 7 δ 逐步形成分类系统方法	211
§ 8 有序地质样品的群分析	217
一 有序地质样品群分析的数学模型	218
二 有序地质样品群分析方法的试验与应用	222
三 有序地质样品群分析方法讨论	224
第九章 因子分析	226
§ 1 因子分析的数学提法	226
一 因子分析的模型	226
二 因子模型与相关矩阵间的关系	228
三 因子解的不确定性	229
§ 2 主因子解	230
§ 3 其他正交因子解	233
一 四次幂极大法	234
二 方差极大法	235
§ 4 因子的估计	236
§ 5 因子分析的计算步骤	237
§ 6 应用实例	238
第十章 对应分析	247
§ 1 数据的标度化	247
§ 2 相似性计算	248
§ 3 R^n 与 R^t 空间的对偶性	250
§ 4 因子载荷的计算与作图	251
§ 5 绝对贡献与相对贡献	253
§ 6 对应分析的计算步骤	254
§ 7 对应分析在地质学中的应用实例	256
第十一章 典型相关分析	261
§ 1 典型相关分析的数学模型	261

一	典型变量与典型相关函数	261
二	典型变量与典型相关系数的求法	262
三	典型变量的性质	264
§ 2	典型变量与典型相关系数的计算步骤	265
§ 3	典型相关系数显著性检验	266
§ 4	应用实例	268
第十二章 非线性映射分析		271
§ 1	Q 型非线性映射的数学方法	271
§ 2	Q 型非线性映射分析计算步骤	274
§ 3	Q 型非线性映射分析实例	275
§ 4	R 型非线性映射的数学方法	277
§ 5	R 型非线性映射的计算步骤	279
§ 6	R 型非线性映射分析实例	280
第十三章 马尔可夫概型分析		283
§ 1	马尔可夫概型的概念	283
§ 2	马尔可夫链的转移概率	284
一	一阶转移概率	284
二	高阶转移概率	285
§ 3	遍历定理与极限分布	287
§ 4	地层剖面的模拟	288
第十四章 时间序列分析		295
§ 1	趋势成分	295
一	用移动平均估计趋势成分	295
二	用多项式拟合趋势成分	296
§ 2	周期性成分	298
一	自相关方法	298
二	互相关方法	301
三	互关联方法	302

§ 3 随机性成分	304
第十五章 统计模拟方法	305
§ 1 随机数的产生与检验	305
一 随机数的产生方法	305
二 随机数统计性质的检验	309
§ 2 统计模拟方法求解实际问题的步骤	309
§ 3 统计模拟方法在地质学中的应用	311
参考文献	315
数理统计常用数值表	317

第一章 概率论的基本知识

§ 1 随机现象、随机事件及其概率

一 随机现象与统计规律

自然界中，广泛地存在着这样一类现象，在同一条件下多次进行同一试验或观测同一现象，所得到的结果不完全一样，而有一定差异，且在每次试验或观测之前无论对这些现象有多么仔细的了解都不能确切预料将出现什么结果，具有这种性质的现象称为随机现象。例如

- (1) 在一定射击条件下某射手进行多次射击，靶上命中点散布在一定的范围上；
- (2) 在一定条件下投掷一枚质量均匀的硬币，每次投掷的结果(出现“图案”或出现“币值”)是不完全一样的；
- (3) 在一个花岗岩体上多次采取标本，在显微镜下鉴定石英的含量，其结果不完全一样；
- (4) 在环境观测中，在观测点上多次观测的结果不完全一样；
- (5) 在区域地球化学测量中，在同一个采样点上先后几次采样测试结果不完全一样。

所有这些现象有一个共同特点即结果有随机性(不确定性)。为什么在同一条件下试验或观测的结果会不完全一样呢？就地质体而言，它经历了漫长地质过程，中间存在多种因素作用、叠加、再现等复杂过程，以及试验、观测的偶然因素的影响，所以对地质体试验或观测结果具有随机性。

随机现象是客观存在的，是不可避免的，但是随机性只是现象的一个方面，我们绝不能从此得出结论，说随机现象中不存在规律性。人们在长期实践中发现，虽然在个别试验或观测中可以出现这样或那样的结果，但在大量的试验或观测中就会发现随机现象却呈现明显的规律性。例如某射手在射击中，当射击次数不多时，靶上命中点的分布是无规则的，但当射击次数大量增加时，命中点的分布就开始呈现出一种规律性，命中点关于靶心的分布是对称的；生男生女是随机的，但早在公元前二千多年，我国人口统计中已发现“男女婴儿出生率近似相等”的规律。上述大量相同的随机现象呈现出的规律性(平均的稳定性)称为统计规律。概率论与数理统计就是从数量方面研究大量随机现象的统计规律的一门数学分支。概率论侧重于建立数学模型和进行数学理论方面的探讨，它是数理统计的基础，数理统计则是在概率

论的理论基础上对试验或观测数据、资料进行加工、整理、归纳和研究。

统计规律性与数学中的函数规律性有什么不同呢？函数规律是自然界和社会中确定性现象呈现出的规律性。例如，物体在重力的作用下降落的现象，我们只要知道该物体开始降落时的高度和速度，就可以完全肯定地预言在随后任一时刻的运动情况，即试验或观测的结果是完全确定、可以预言的，而统计规律有如下两个特点：

(1) 在一次试验或观测中是随机的，而经过多次重复试验或观测才出现规律性；

(2) 统计规律性给出的结论是统计平均性，结论是带有一定的可能性(概率)。

上述随机现象和确定性现象，只有在条件允许的误差范围内才有意义，这里并没有不可逾越的鸿沟。

地质科学与找矿勘探实践中，随机现象普遍存在的，而且是主要的。因此，目前数学地质以概率论和数理统计作为它的主要数学工具。用概率论与数理统计方法研究地质数据、资料，加工、整理、归纳和分析，对地质现象进行合乎客观实际的推断。

顺便指出，在地学与生产实践中取得数据、资料的手段很多，例如化验、分析、测定、测量、描述、观察等等，在这本教材的后边论述中一律抽象为“试验”或“观测”。将样品化验、测试的数据“项目”一律称为“变量”或“指标”。

二 随机事件及其概率

1. 随机事件

在某矿区进行勘探时，当一台钻机钻到 50 米时将会发生什么结果呢？可能钻在矿体上；可能钻在矿化的岩石上；也可能钻在正常的岩石上。我们把这一类试验或观测的各种可能结果称为“事件”。上述钻机钻到 50 米时，从提取出的岩心中可以发现是矿或是矿化岩石或是岩石，可能结果只有三个。如果观测结果是“矿”，我们就说“矿”事件发生了。当钻机没有钻到 50 米以前，对于 50 米见“矿”事件，可能发生也可能不发生，象这样在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。

又如，投掷一枚硬币，出现“图案向上”的事件(记作 A)，是一个随机事件。出现“图案向下”(记作 B)的事件，也是随机事件。

在一定条件下，必然要发生的事件称为必然事件。例如观测一块花岗岩标本，“石英含量大于 20%”，这是必定要发生的事件。

在一定条件下，不可能发生的事件称为不可能事件。例如观测一块花岗岩标本，“石英含量小于 20%”，这是不可能发生的。

为了方便，我们记 U 为必然事件，记 V 为不可能事件，随机事件用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示。必然事件 U 与不可能事件 V 是确定性现象的表现，为讨论问题方便起见，将必然事件 U 和不可能事件 V 也当作随机事件。

2. 随机事件的概率

对于随机事件，在一次试验中是否发生，我们虽然预先不能知道，但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的。例如，上边提到投掷硬币的例子，随机事件 A 与随机事件 B 发生的可能性是一样的。又如，在某一矿区正常岩石上钻探，“见矿”随机事件发生的可能性小，而在蚀变岩石上钻探，“见矿”随机事件发生的可能性大。然而，对随机事件发生的可能性不能只作这样定性的了解和描述，还必须对它作出客观的定量的描述。

假设在同一条件下，重复进行 n 次试验，随机事件 A 发生 μ 次（随机事件 A 在 n 次试验中重复出现的次数叫频数，记为 μ ），频数 μ 与试验总次数 n 之比称为 n 次试验中随机事件 A 发生的频率，记为 f ，即

$$f(\text{频率}) = \frac{\text{事件 } A \text{ 出现的次数(频数)}}{\text{试验的总次数}} = \frac{\mu}{n}$$

例如，在某铁矿床中抽取 120 个样品，铁的品位在 27.5—32.5% 范围内的样品有 35 个，我们称数值 35 为“铁品位在 27.5—32.5% 之间”随机事件的频数，频数 35 与抽取的样品总数 120 之比称为铁品位落在 27.5—32.5% 之间随机事件的频率，即

$$f = \frac{35}{120} = 0.292$$

历史上，有些人在相同条件下重复作过成千上万次投掷硬币的试验。表 1.1 列出他们中一些人的试验记录

表 1.1

试 验 者	投 掷 次 数 n	出现“图案向上”的 次数 μ (频数)	出现“图案向上”的 频率 $f = \frac{\mu}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从这个表中容易看出，随着投掷次数的增加，出现“图案向上”的频率越接近 0.5。

(1) 概率的统计定义

在相同条件下，重复作 n 次试验，在 n 次试验中事件 A 发生 μ 次，当试验次数 n 很大时，如果频率 $f = \mu/n$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度愈来愈小，则称数值 p 为随机事件 A 发生的概率，记作

$$P(A) = p$$

显然，数值 p 就成为事件 A 发生可能性大小的数值度量。例如 0.5 就成为投掷一枚硬币出现“图案向上”可能性的数值度量。上述定义也可简单的说成“频率具有稳定性的事件叫

做随机事件，频率的稳定值叫做随机事件的概率”。

由于随机事件的频率 $f = \mu/n$ 总介于 0, 1 之间，因而不难看出，随机事件(以后简称事件)的概率具有以下性质

- 1) 必然事件 U ，在 n 次试验中每次试验都必然发生，则

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1$$

- 2) 不可能事件 V ，在 n 次试验中每次试验都不可能发生，则

$$P(V) = \frac{0}{n} = 0$$

- 3) 任何随机事件 A ，显然有

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

概率的其它性质，我们将在下面逐步指出。

(2) 概率的古典定义

上面我们介绍了概率的统计定义，它即是概念，同时又提供了近似计算概率的一般方法。但是在某些特殊情况下不必进行大量的重复试验，而是利用试验或观测的各种可能结果发生的可能性相等的等可能性(对称性)，运用演绎的方法，根据一些事件的概率，来计算一些未知事件的概率。例如前边提到投掷硬币的试验，即使我们不临时作大量的投掷试验，我们也会想到，“图案向上”或“图案向下”出现的机会是相等的。因此，可以推测在大量试验中“图案向上”事件发生的概率为 0.5。

例 1 盒中装有三个白球两个黑球，从中任取一个，问取到白球的概率是多少？

既然是“任取”，那么五个球被取到的机会是一样的；而白球有 3 个，因此，取到白球的概率应该是 $3/5$ 。

例 2 盒中装有白球三个，黑球两个，现从中任取两个，问两个全是白球的概率是多少？

因为是“任取”两个，则可能出现的结果有

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$$

这些结果出现的机会是一样的，而且互相排斥，除此之外不会有别的结果。上列十种情况中，若 1, 2, 3 表示白球，(1, 2), (1, 3), (2, 3) 为全白，因此“全白”发生的频率会稳定在 $3/10$ 左右。于是，它的概率是 $3/10$ 。

我们将上述讨论推广，得出一般规律：对于一个事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，如果它具有下列三条性质

- 1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 发生的可能性相等(等可能性)；
- 2) 在任一次试验中， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 至少有一个发生，除此之外不会有别的结果(完全性)；
- 3) 在任一次试验中， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 至多有一个发生，即它们是互相排斥的(互不相容性)；

则它们称为一个等可能完备事件组或为等概基本事件组, 其中称任一事件 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为基本事件. 所谓古典概型就是指这样的随机现象. 等可能性、完全性、互不相容性是古典概型中的基本事件组的主要特征.

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一个等概基本事件组, 而事件 B 由其中的 m 个基本事件所构成. 大量实践经验表明事件 B 的概率应由下列公式来计算

$$P(B) = \frac{m}{n} \quad (1.01)$$

所谓古典概型就是利用关系式(1.01)来讨论事件的概率模型.

现在通过(1.01)式讨论例2, 考虑从三个白球、两个黑球中任取二球, 共有 $C_2^5 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ 种不同的取法, 它们出现的机会相同, 每种取法对应一个基本事件, 所以等概基本事件组共含10个基本事件. 而取得“两球均为白球”共有 $C_2^3 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$ 种取法. 由(1.01)式求得任取两球为“全白”的概率

$$P(\text{“全白”}) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10}$$

例3 现有100个土壤化学测量的样品, 其中有5个异常样品, 问从中任取50个, 无异常的样品的概率多少?

解 首先, 从100个样品中任取50个, 共有 $n = C_{100}^{50}$ 种不同结果, 每种结果是一个基本事件, 现在再讨论一下“任取50个全无异常样品”, 它由那些基本事件组成? 很明显, 要所取的50个无异常的样品, 必须是取自于95个无异常的样品中, 共有基本事件数 $m = C_{95}^{50}$ 种, 由关系式(1.01)得

$$P(B) = C_{95}^{50} / C_{100}^{50} = 0.0281$$

这一个例子说明在测量中漏掉异常现象, 一般来说是不可能的.

三 随机事件的运算及概率的加法公式

我们常看到, 在一组条件之下, 有多个随机事件. 其中有些是比较简单的, 也有比较复杂的. 分析事件之间的关系, 从而找到它们的概率以及概率之间的关系, 这自然是必要的, 而其基本点还要搞清楚事件间的关系.

1. 事件的包含与相等

设有事件 A 与 B , 如果 A 发生, 那么 B 必发生, 就称事件 B 包含事件 A , 记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

例如 A 表示“品位为42.5—47.5%”的事件, B 表示“品位为42.5—52.5%”的事件, 则事件 A 发生, 事件 B 必发生, 即 $A \subset B$, 又如投掷两枚硬币, 令 A 表示“一个图案向上”, B 表示“至少一个图案向上”, 显然有 $A \subset B$.

如果事件 A 包含事件 B , 同时事件 B 包含事件 A , 则称事件 A 与 B 相等(或称等价), 记作

$$A = B$$

2. 事件的和、差与积

我们把“事件 A 或 B 至少有一个发生”这一事件称为 A, B 之和(并), 记作

$$A \cup B \quad \text{或} \quad A + B$$

而把“ A 发生而 B 不发生”这一事件称为 A, B 之差, 记作

$$A - B$$

“事件 A, B 同时发生”这一事件称为 A, B 之积(交), 记作

$$A \cap B \quad \text{或} \quad AB$$

例如, A 表示“铁矿石品位为 32—37%”, B 表示“铁矿石品位为 35—42%”, 则 $A \cup B$ 表示“铁矿石品位为 32—42%”的新事件, $A - B$ 表示“铁矿石品位为 32—35%”的新事件, $A \cap B$ 表示“铁矿石品位为 35—37%”的新事件.

又如, 投掷两枚硬币, A 表示“正好一个图案向上”的事件, B 表示“正好两个图案向上”的事件, C 表示“至少一个图案向上”的事件, 于是有

$$A \cup B = C; \quad A \cap C = A$$

$$B \cap C = B; \quad A \cap B = V(\text{不可能事件})$$

3. 事件的互不相容性

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即

$$A \cap B = V(\text{不可能事件})$$

则称 A 与 B 为互不相容的事件. 事件“正好一个图案向上”和“两个都是图案向上”的事件就是互不相容事件.

4. 对立事件

“ A 不发生”的事件为 A 的对立事件, 记作 $\bar{A}$ (非 A), $\bar{A}$ 与 A 互为对立事件, 易知 $(\bar{\bar{A}}) = A$, A 与 $\bar{A}$ 之间满足

$$A \cup \bar{A} = U; \quad A \cap \bar{A} = V \quad (1.02)$$

如果我们用圆 A 表示事件 A , 圆 B 为事件 B , 则事件 A, B 之间的关系, 可表示如图 1-1 中阴影部分.

以上我们仅讨论了两个事件之间的关系, 对于事件的和与积的概念, 可以推广到有限个事件上去. 有限个事件的和: “事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个事件发生”, 称这一新事件为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 之和, 记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{或} \quad A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$$