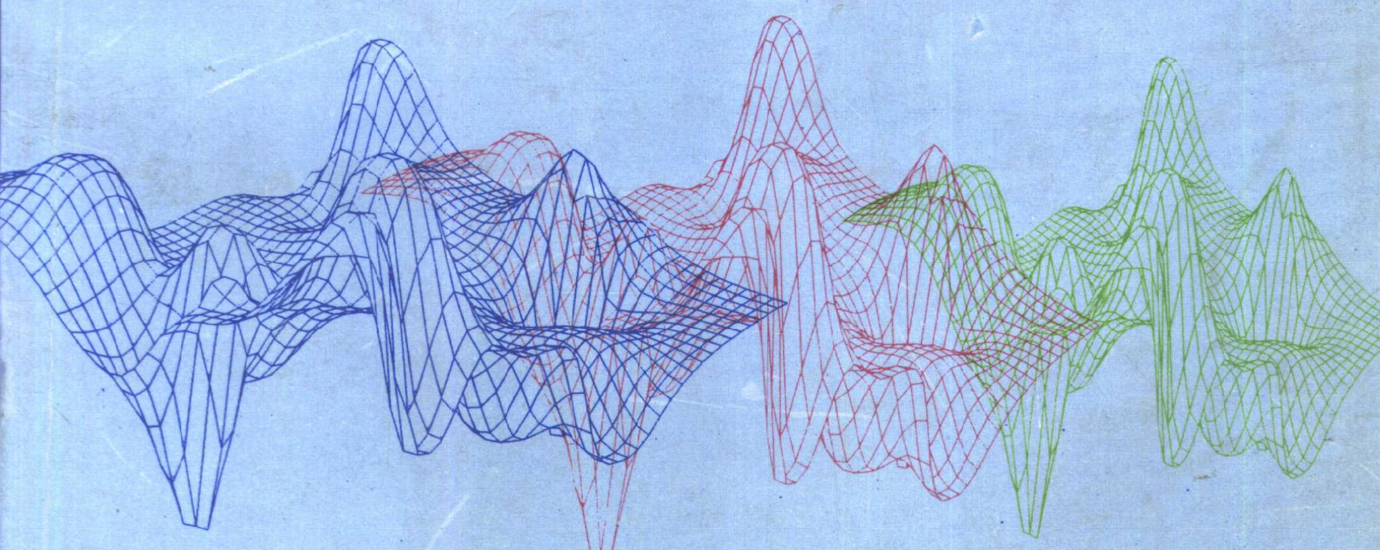
数学地质基础

徐振邦　娄元仁　编著



北京大学出版社

数学地质基础

徐振邦　娄元仁　编著

北京大学出版社

新登字(京)159号

图书在版编目(CIP)数据

数学地质基础/徐振邦，娄元仁编著.
北京:北京大学出版社，1994.9
ISBN 7-301-02429-0

Ⅰ.数…
Ⅱ.①徐… ②娄…
Ⅲ.①数学:地质学②地质学:数学
Ⅳ.P5

书　　名:数学地质基础
著作责任者:徐振邦、娄元仁
责 任 编 辑:徐信之
标 准 书 号:ISBN 7-301-02429-0/O·337
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部　2502015　发行部　2559712　编辑部　2502032
排　印　者:北京大学地质系计算机室
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092毫米　16开本　21印张　520千字
1994年11月第一版　1994年11月第一次印刷
定　　价:21元

前 言

自六十年代以来，随着科学技术、测试技术、电子计算机的发展，在地质学的研究和实践领域中开始大量地应用数学理论方法进行定量地研究、分析处理、判断和解决地质问题. 由于地质学和数学的紧密结合与发展，在地质学中逐渐形成了一门新的“数学地质”学科. 它是用数学的理论方法和电子计算机手段研究地质学基础理论和解决地质学及其实践问题的应用性地质学分支. 它的内容包括地质变量的统计与推断，地质数据的拟合方法，地质变量与地质体的定量分类、判别和成因分析，地质学中的随机过程和统计模拟，地质统计学，资源与矿床的统计预测，地质信息系统与专家系统等等.

最近二十年来，我国数学地质研究工作逐渐扩展到地质学其他分支学科和实践领域中，在地质学研究与实践中发挥了重要的作用. 为适应地质事业发展的需要，1976 年以后我国各高等地质院校先后开设了数学地质课程，开始讲授数学地质.

本书主要是根据作者多年来从事数学地质教学和在地学领域中讲授“地学数据处理方法”的经验和体会，在 1976 年编写的“数学地质（一)、(二)”基础上多次修改编写而成. 本书是一本向地质专业的学生和地质专业技术人员介绍数学地质的基础知识、理论、方法及其应用的教科书. 在编写过程中，力求用通俗的数学表达方法及必要的推导证明来阐明方法的数学模型，用实例说明实现方法应用的计算过程和主要步骤及结果的分析解释. 使学生和读者掌握数学地质方法及其应用.

本书内容可分为以下五个部分

一、概率论的基础知识(第一章)；

二、地质变量的统计与推断(第二、三章)；

三、地质数据的拟合方法(第四至六章)；

四、地质变量与地质体的定量分类、判别及成因分析(第七至十二章)；

五、地质学中的随机过程与统计模拟(第十三至十五章).

本书编写过程中得到领导和多方的鼓励与支持，在此深表谢意. 由于我们水平和经验有限，书中缺点、错误之处，请读者批评指正.

作 者

1990 年 12 月

目　录

第一章　概率论的基本知识

§1　随机现象、随机事件及其概率

一　随机现象与统计规律

自然界中，广泛地存在着这样一类现象，在同一条件下多次进行同一试验或观测同一现象，所得到的结果不完全一样，而有一定差异，且在每次试验或观测之前无论对这些现象有多么仔细的了解都不能确切预料将出现什么结果，具有这种性质的现象称为随机现象．例如

(1) 在一定射击条件下某射手进行多次射击，靶上命中点散布在一定的范围上；

(2) 在一定条件下投掷一枚质量均匀的硬币，每次投掷的结果(出现“图案”或出现“币值”)是不完全一样的；

(3) 在一个花岗岩体上多次采取标本，在显微镜下鉴定石英的含量，其结果不完全一样；

(4) 在环境观测中，在观测点上多次观测的结果不完全一样；

(5) 在区域地球化学测量中，在同一个采样点上先后几次采样测试结果不完全一样．

所有这些现象有一个共同特点即结果有随机性(不确定性)．为什么在同一条件下试验或观测的结果会不完全一样呢？就地质体而言，它经历了漫长地质过程，中间存在多种因素作用、叠加、再现等复杂过程，以及试验、观测的偶然因素的影响，所以对地质体试验或观测结果具有随机性．

随机现象是客观存在的，是不可避免的，但是随机性只是现象的一个方面，我们绝不能从此得出结论，说随机现象中不存在规律性．人们在长期实践中发现，虽然在个别试验或观测中可以出现这样或那样的结果，但在大量的试验或观测中就会发现随机现象却呈现明显的规律性．例如某射手在射击中，当射击次数不多时，靶上命中点的分布是无规则的，但当射击次数大量增加时，命中点的分布就开始呈现出一种规律性，命中点关于靶心的分布是对称的；生男生女是随机的，但早在公元前二千多年，我国人口统计中已发现“男女婴儿出生率近似相等”的规律．上述大量相同的随机现象呈现出的规律性(平均的稳定性)称为统计规律．概率论与数理统计就是从数量方面研究大量随机现象的统计规律的一门数学分支．概率论侧重于建立数学模型和进行数学理论方面的探讨，它是数理统计的基础．数理统计则是在概率

论的理论基础上对试验或观测数据、资料进行加工、整理、归纳和研究.

统计规律性与数学中的函数规律性有什么不同呢？函数规律是自然界和社会中确定性现象呈现出的规律性. 例如，物体在重力的作用下降落的现象，我们只要知道该物体开始降落时的高度和速度，就可以完全肯定地预言在随后任一时刻的运动情况，即试验或观测的结果是完全确定、可以预言的，而统计规律有如下两个特点：

（1）在一次试验或观测中是随机的，而经过多次重复试验或观测才出现规律性；

（2）统计规律性给出的结论是统计平均性，结论是带有一定的可能性(概率).

上述随机现象和确定性现象，只有在条件允许的误差范围内才有意义，这里并没有不可逾越的鸿沟.

地质科学与找矿勘探实践中，随机现象普遍存在的，而且是主要的. 因此，目前数学地质以概率论和数理统计作为它的主要数学工具. 用概率论与数理统计方法研究地质数据、资料，加工、整理、归纳和分析，对地质现象进行合乎客观实际的推断.

顺便指出，在地学与生产实践中取得数据、资料的手段很多，例如化验、分析、测定、测量、描述、观察等等，在这本教材的后边论述中一律抽象为“试验”或“观测”. 将样品化验、测试的数据“项目”一律称为“变量”或“指标”.

二　随机事件及其概率

1. 随机事件

在某矿区进行勘探时，当一台钻机钻到50米时将会发生什么结果呢？可能钻在矿体上；可能钻在矿化的岩石上；也可能钻在正常的岩石上. 我们把这一类试验或观测的各种可能结果称为“事件”. 上述钻机钻到50米时，从提取出的岩心中可以发现是矿或是矿化岩石或是岩石，可能结果只有三个. 如果观测结果是“矿”，我们就说“矿”事件发生了. 当钻机没有钻到50米以前，对于50米见“矿”事件，可能发生也可能不发生，象这样在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件.

又如，投掷一枚硬币，出现“图案向上”的事件(记作 A)，是一个随机事件. 出现“图案向下”（记作 B)的事件，也是随机事件.

在一定条件下，必然要发生的事件称为必然事件. 例如观测一块花岗岩标本，“石英含量大于20%”，这是必定要发生的事件.

在一定条件下，不可能发生的事件称为不可能事件. 例如观测一块花岗岩标本，“石英含量小于20%”，这是不可能发生的.

为了方便，我们记 U 为必然事件，记 V 为不可能事件，随机事件用大写英文字母 A，B，C，…表示. 必然事件 U 与不可能事件 V 是确定性现象的表现，为讨论问题方便起见，将必然事件 U 和不可能事件 V 也当作随机事件.

2. 随机事件的概率

对于随机事件，在一次试验中是否发生，我们虽然预先不能知道，但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的. 例如，上边提到投掷硬币的例子，随机事件 A 与随机事件 B 发生的可能性是一样的. 又如，在某一矿区正常岩石上钻探，“见矿”随机事件发生的可能性小，而在蚀变岩石上钻探，“见矿”随机事件发生的可能性大. 然而，对随机事件发生的可能性不能只作这样定性的了解和描述，还必须对它作出客观的定量的描述.

假设在同一条件下，重复进行 n 次试验，随机事件 A 发生 μ 次(随机事件 A 在 n 次试验中重复出现的次数叫频数，记为 μ)，频数 μ 与试验总次数 n 之比称为 n 次试验中随机事件 A 发生的频率，记为 f，即

$$f(\text{频率}) = \frac{\text{事件 } A \text{ 出现的次数(频数)}}{\text{试验的总次数}} = \frac{\mu}{n}$$

例如，在某铁矿床中抽取 120 个样品，铁的品位在 27.5—32.5%范围内的样品有 35 个，我们称数值 35 为“铁品位在 27.5—32.5%之间”随机事件的频数，频数 35 与抽取的样品总数 120 之比称为铁品位落在 27.5—32.5%之间随机事件的频率，即

$$f = \frac{35}{120} = 0.292$$

历史上，有些人在相同条件下重复作过成千上万次投掷硬币的试验. 表 1.1 列出他们中一些人的试验记录

表 1.1

试验者	投掷次数 n	出现“图案向上”的次数 μ(频数)	出现“图案向上”的频率 $f=\frac{\mu}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从这个表中容易看出，随着投掷次数的增加，出现“图案向上”的频率越接近 0.5.

(1) 概率的统计定义

在相同条件下，重复作 n 次试验，在 n 次试验中事件 A 发生 μ 次，当试验次数 n 很大时，如果频率 $f=\mu/n$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度愈来愈小，则称数值 p 为随机事件 A 发生的概率，记作

$$P(A) = p$$

显然，数值 p 就成为事件 A 发生可能性大小的数值度量. 例如 0.5 就成为投掷一枚硬币出现“图案向上”可能性的数值度量. 上述定义也可简单的说成“频率具有稳定性的事件叫

做随机事件，频率的稳定值叫做随机事件的概率”.

由于随机事件的频率 $f=\mu/n$ 总介于 0，1 之间，因而我们不难看出，随机事件(以后简称事件)的概率具有以下性质

1）必然事件 U，在 n 次试验中每次试验都必然发生，则

$$P(U)=\frac{n}{n}=1$$

2）不可能事件 V，在 n 次试验中每次试验都不可能发生，则

$$P(V)=\frac{0}{n}=0$$

3）任何随机事件 A，显然有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

概率的其它性质，我们将在下面逐步指出.

(2) 概率的古典定义

上面我们介绍了概率的统计定义，它即是概念，同时又提供了近似计算概率的一般方法.但是在某些特殊情况下不必进行大量的重复试验，而是利用试验或观测的各种可能结果发生的可能性相等的等可能性(对称性)，运用演绎的方法，根据一些事件的概率，来计算一些未知事件的概率. 例如前边提到投掷硬币的试验，即使我们不临时作大量的投掷试验，我们也会想到，“图案向上”或“图案向下”出现的机会是相等的. 因此，可以推测在大量试验中“图案向上”事件发生的概率为 0.5.

例 1 盒中装有三个白球两个黑球，从中任取一个，问取到白球的概率是多少?

既然是“任取”，那么五个球被取到的机会是一样的；而白球有 3 个，因此，取到白球的概率应该是 3/5.

例 2 盒中装有白球三个，黑球两个，现从中任取两个，问两个全是白球的概率是多少?

因为是“任取”两个，则可能出现的结果有

$$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)$$

这些结果出现的机会是一样的，而且互相排斥，除此之外不会有别的结果. 上列十种情况中，若 1,2,3 表示白球，(1,2),(1,3),(2,3)为全白，因此“全白”发生的频率会稳定在 3/10 左右. 于是，它的概率是 3/10.

我们将上述讨论推广，得出一般规律：对于一个事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果它具有下列三条性质

1）$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 发生的可能性相等(等可能性)；

2）在任一次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生，除此之外不会有别的结果(完全性)；

3）在任一次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至多有一个发生，即它们是互相排斥的(互不相容性)；

则它们称为一个等可能完备事件组或为等概基本事件组，其中称任一事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为基本事件．所谓古典概型就是指这样的随机现象．等可能性、完全性、互不相容性是古典概型中的基本事件组的主要特征．

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个等概基本事件组，而事件 B 由其中的 m 个基本事件所构成．大量实践经验表明事件 B 的概率应由下列公式来计算

$$P(B)=\frac{m}{n} \tag{1.01}$$

所谓古典概型就是利用关系式(1.01)来讨论事件的概率模型．

现在通过(1.01)式讨论例 2，考虑从三个白球、两个黑球中任取二球，共有 $C_5^2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$ 种不同的取法，它们出现的机会相同，每种取法对应一个基本事件，所以等概基本事件组共含 10 个基本事件．而取得“两球均为白球”共有 $C_3^2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$ 种取法．由(1.01)式求得任取两球为“全白”的概率

$$P(\text{“全白”})=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$$

例 3 现有 100 个土壤化学测量的样品，其中有 5 个异常样品，问从中任取 50 个，无异常的样品的概率多少？

解 首先，从 100 个样品中任取 50 个，共有 $n=C_{100}^{50}$ 种不同结果，每种结果是一个基本事件，现在再讨论一下“任取 50 个全无异常样品”，它由那些基本事件组成？很明显，要所取的 50 个无异常的样品，必须是取自于 95 个无异常的样品中，共有基本事件数 $m=C_{95}^{50}$ 种，由关系式(1.01)得

$$P(B)=C_{95}^{50}/C_{100}^{50}=0.0281$$

这一个例子说明在测量中漏掉异常现象，一般来说是不可能的．

三 随机事件的运算及概率的加法公式

我们常看到，在一组条件之下，有多个随机事件．其中有些是比较简单的，也有比较复杂的．分析事件之间的关系，从而找到它们的概率以及概率之间的关系，这自然是必要的，而其基本点还要搞清楚事件间的关系．

1. 事件的包含与相等

设有事件 A 与 B，如果 A 发生，那么 B 必发生，就称事件 B 包含事件 A，记作

$$A\subset B \quad \text{或} \quad B\supset A$$

例如 A 表示“品位为 42.5—47.5%”的事件，B 表示“品位为 42.5—52.5%”的事件，则事件 A 发生，事件 B 必发生，即 $A\subset B$，又如投掷两枚硬币，令 A 表示“一个图案向上”，B 表示“至少一个图案向上”，显然有 $A\subset B$.

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与 B 相等(或称等价)，记作

$$A = B$$

2. 事件的和、差与积

我们把"事件 A 或 B 至少有一个发生"这一事件称为 A,B 之和(并)，记作

$$A \cup B \quad 或 \quad A + B$$

而把"A 发生而 B 不发生"这一事件称为 A,B 之差，记作

$$A - B$$

"事件 A,B 同时发生"这一事件称为 A,B 之积(交)，记作

$$A \cap B \quad 或 \quad AB$$

例如，A 表示"铁矿石品位为 32—37%"，B 表示"铁矿石品位为 35—42%"，则 $A\cup B$ 表示"铁矿石品位为 32—42%"的新事件，$A-B$ 表示"铁矿石品位为 32—35%"的新事件，$A\cap B$ 表示"铁矿石品位为 35—37%"的新事件.

又如，投掷两枚硬币，A 表示"正好一个图案向上"的事件，B 表示"正好两个图案向上"的事件，C 表示"至少一个图案向上"的事件，于是有

$$A \cup B = C; \qquad A \cap C = A$$

$$B \cap C = B; \qquad A \cap B = V(不可能事件)$$

3. 事件的互不相容性

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即

$$A \cap B = V(不可能事件)$$

则称 A 与 B 为互不相容的事件. 事件"正好一个图案向上"和"两个都是图案向上"的事件就是互不相容事件.

4. 对立事件

"A 不发生"的事件为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$(非 A)，$\overline{A}$ 与 A 互为对立事件，易知 $\overline{(\overline{A})} = A$，$A$ 与 $\overline{A}$ 之间满足

$$A \cup \overline{A} = U; \qquad A \cap \overline{A} = V \tag{1.02}$$

如果我们用圆 A 表示事件 A，圆 B 为事件 B，则事件 A,B 之间的关系，可表示如图1-1中阴影部分.

以上我们仅讨论了两个事件之间的关系，对于事件的和与积的概念，可以推广到有限个事件上去. 有限个事件的和："事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"，称这一新事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之和，记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad 或 \quad A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$