时代教育

立足高考大纲　探究知识内涵　解读奥赛真题
揭示思维规律　点击高考难题　登上名校殿堂

奥赛·高考全程对接

高三数学

北京四中
北师大实验中学
人大附中
清华附中
北师大二附中
首师大附中
北京八中
北京101中学
民族大学附中
北京13中

教师联合
编写组编写

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书主编　黄凤圣　于海飞

ISBN 7-111-01811-7/G·768

封面设计／电脑制作：鞠杨

奥赛·中考全程对接　初一数学

奥赛·中考全程对接　初二数学

奥赛·中考全程对接　初二物理

奥赛·中考全程对接　初三数学

奥赛·中考全程对接　初三物理

奥赛·中考全程对接　初三化学

奥赛·高考全程对接　高一数学

奥赛·高考全程对接　高一物理

奥赛·高考全程对接　高一化学

奥赛·高考全程对接　高二数学

奥赛·高考全程对接　高二物理

奥赛·高考全程对接　高二化学

奥赛·高考全程对接　高三数学

奥赛·高考全程对接　高三物理

奥赛·高考全程对接　高三化学

奥赛·高考全程对接　高中生物

ISBN 7-111-01811-7

9 787111 018117 >

定价：15.00 元

地址：北京市百万庄大街22号　邮政编码：100037

联系电话：(010) 68326294　网址：http://www.cmpbook.com

E-mail:online@cmpbook.com

奥赛·高考全程对接

高三数学

丛书总策划：蔡　晔

本书主编：黄凤圣　于海飞

机械工业出版社

本书以高中三年级教学大纲中的重点、难点和高中竞赛大纲中被加深、拓展的知识点为知识基础。结合涉及到的本年级各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，对接历年高考中有关本知识段的“难题”，用奥赛解题思维巧解高考难题，并通过举一反三训练及时巩固，引导创新。

图书在版编目（CIP）数据

奥赛·高考全程对接．高三数学/黄凤圣，于海飞主编．—北京：机械工业出版社，2003.9

ISBN 7-111-01811-7

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①黄…②于…　Ⅲ．数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第070037号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：邝　鸥　　　　责任编辑：王春雨

版式设计：郑文斌　　　　封面设计：鞠　杨

责任印制：施　红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003年9月第1版·第1次印刷

880mm×1230mm 1/32·10.875印张 336千字

定价：15.00元

前　言

如今，奥林匹克这个名字，已经成为人类最高水平竞赛的代名词，对每一位有竞争意识的人，都充满着无法抗拒的诱惑力。能够得到它的垂青，是一个人一生中无上的荣誉，哪怕是仅仅参与一下都会让人激动不已。

本书编写意图

中学生学科奥林匹克竞赛也是如此。

1959 年第一届国际中学生数学奥林匹克竞赛（IMO）在罗马尼亚成功举办，拉开了中学生学科奥林匹克竞赛的序幕，紧接着又相继产生了中学生物理（IPHO）、化学（ICO）、生物（IBO）、信息学（IOI）等学科奥林匹克竞赛。我国自 1985 年参加这一赛事以来，取得了辉煌的成绩，为祖国争得了很高的荣誉，同时也使得国内奥林匹克选拔赛轰轰烈烈地开展来。国家的最高教育和科技行政部门也对中学生的各学科奥林匹克的一系列竞赛给予了足够重视。不仅形成了规范的竞赛制度，还制定了与普通教学大纲相衔接的三级竞赛大纲，如此系统的大纲，除高考外还是第一个。

在 2003 年高考招生过程中，全国一流重点大学及各地招生办对高中应届毕业生的保送资格有如下要求："获全国高中数学联赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克联赛、全国中学生生物学联赛，省级赛区一等奖；获全国数学奥林匹克竞赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克竞赛、全国中学生生物学竞赛，全国决赛一、二、三等奖。"而且，对于以上获奖又参加高考的，享有 10 到 20 分的特征加分待遇。

看到以上这段文字，每一位面临高考的同学都不免会怦然心动：既是一种莫大的荣誉，又有实实在在的收获。

但是，要想攀上奥林匹克的高峰可不是一件易事，因为它首先要求同学们在具有扎实的课本知识基础上还要了解知识的更深内涵和更广的外延；其次，还要求同学们具有很强的综合创新解题能力。这两点要求，就目前正常的中学教学和学习深度还是很难达到的。所以还要在学好教学大纲规定的知识和能力同时，进行一些拓展学习和训练。日积月累、循序渐进，把自己也培养成一个“天才”。

如何进行课外拓展学习，不能盲目操作，要有一套科学的方法和计划，还要有一个得力的助手——辅导参考书。否则，会顾此失彼，得不偿失。

另外，奥林匹克竞赛受到如此程度的重视，其最根本原因是各级“奥赛”试题具有很强的创新性、灵活性、综合性。注重考查学生对知识的理解及综合运用能力和思维方法的掌握和创新能力。而这一点恰恰是素质教育的核心内容，也是高考改革的精神实质。

下面是有关 2003 年的高考试卷的一段报道。

“‘今年的数学题新而不怪，试题难，易拉开档次，每位考生可以根据自己的能力爬台阶式的做题。’高考数学阅卷组组长周兴和教授谈起今年的高考数学显得很有话说。据介绍，今年的数学试卷就连小题目都没有明显的送分题，考查点偏重于知识网络的交汇点。周兴和指出：这张数学试卷是对沉迷于题海战术式教育的一次沉重打击，用常规的课堂教学思维应付这张试卷显然不太够。据了解，从试批的考卷看，考生缺乏开放性思维、应用意识不完美等问题已暴露无遗。”

从以上这段报道，我们可以更清晰的看出学习“奥赛”的重要性。对比“奥赛”初赛、复赛大纲和高考大纲，以及历年初赛、复赛试题和高考中的难题、压轴题也不难得出这一结论。因此，我们学习和研究奥林匹克竞赛不光是为了夺取“奥赛”金牌，更重要的是可以让我们站在一个更高一点的高度俯视普通的中学学习和高考，在学习和应考上能够登上一个新的台阶，更加从容面的对高考的洗礼，取得出色成绩。

基于以上几方面原因，我们编写了这套“演习奥林匹克，夺取高考高分”奥赛学习辅导丛书，希望能为同学们找到一条通向更大成功

的有效捷径。

本书编写特点

本书内容的难度定位在略高于高考水平，不超过奥赛复赛的最高难度，以中学教学大纲中的重、难点和被奥赛大纲加深、拓展的知识点为知识基础。结合各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，对接历年高考中的经典“拔高”题，用奥赛解题思维巧解高考难题，并通过举一反三训练及时巩固，引导创新。

本书编写形式为讲练结合，重点放在例体讲解上。各栏目所选例题具有典型的代表性，思路剖析透彻，解答过程详尽，点津之笔富有启发性，练习题少而精，能起到举一反三之效果，避免“偏题”、“怪题”和“题海战术”。对于较难的练习题，一般会给出全解或解答提示，但这仅作参考。同学们要自己开动脑筋，结合例题，想出自己的解决方案来。

本套丛书涉及数学、物理、化学、生物各科，涵盖中学各个年级，共计 16 分册，知识讲解系统，题型全面，可作为同步辅导教材使用。

本书编写力量

本套丛书由中学教育专家、全国化学教学研究会副理事长、北京化学奥校校长、特级教师黄儒兰担任编委会主任，主持丛书编写工作。

参加本套丛书编写的人员均为来自北京四中、北师大附属实验中学、人大附中、清华附中、首师大附中、北师大二附中、北京八中、北京 101 中学、北京 13 中、民大附中等一批京城重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练；几位清华大学和北京大学的奥赛保送生和高考理科状元也为本书做了许多有益工作。

由于此书产生于“非常时期”，时间有限，水平有限，可能存在一些缺憾，请批评指正。

编　者

目　录

注：每章均包含[知识对接]、[经典名题]、[思维发散]、[高考对接]、[举一反三训练]、[答案与提示]六个板块。

第一章　函数综合应用

知识对接

1.集合、简易逻辑

考试内容：

集合、子集、补集、交集、并集.

逻辑联结词、四种命题、充要条件.

考试要求：

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义；理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义.

2.函数

考试内容：

映射、函数、函数的单调性.

反函数、互为反函数的函数图像间的关系.

指数概念的扩充、有理指数幂的运算性质、指数函数.

对数、对数的运算性质、对数函数.

函数的应用举例.

考试要求：

(1)了解映射的概念，理解函数的概念.

(2)了解函数的单调性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性的方法.

(3)了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系，会求一些简单函数的反函数.

(4)理解分数指数幂的概念，掌握有理指数幂的运算性质，掌握指数函数的概念、图像和性质.

(5)理解对数的概念，掌握对数的运算性质，掌握对数函数的概念、图像和性质.

(6)能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

经典名题

例1 (1996·全国高中数学竞赛)求集合

$\left\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathrm{N}\right\}$的真子集的个数.

【解答】

$$\left\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathrm{N}\right\}$$
$$= \left\{x \,\middle|\, -1 \leqslant \frac{1}{\lg \frac{1}{x}} < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathrm{N}\right\}$$
$$= \{x \mid 1 \leqslant \lg x < 2, 1 < x \in \mathrm{N}\}$$
$$= \{x \mid 10 \leqslant x < 100, 1 < x \in \mathrm{N}\}$$

此集合中元素个数为90.故其真子集个数为$(2^{90}-1)$个.

例2 (1998·全国高中数学竞赛)已知集合 $A=\{y \mid 2<y<3\}$, $x=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}}$,判断 x 与 A 的关系.

【解答】 $x=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}=\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{10}=\log_3 10$

又 $2=\log_3 3^2<\log_3 10<\log_3 27=3$

故 $x \in \mathrm{A}$

例3 设 $a, b \in \mathrm{R}$, $A=\{(x, y) \mid x=n, y=na+b, n \in \mathrm{Z}\}$, $B=\{(x, y) \mid x=m, y=3m^2+15, m \in \mathrm{Z}\}$, $C=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 144\}$是平面 xOy 内的点集.讨论是否存在 a 与 b,使 $A \cap B \neq \varnothing$,且$(a, b) \in \mathrm{C}$.

【解法一】 如果存在实数 a 和 b,使 $A \cap B \neq \varnothing$ 成立,那么就一定存在整数 m 和 n 使$(n, na+b)=(m, 3m^2+15)$,即

$$n=m \text{ 且 } na+b=3m^2+15$$

也就是存在整数 n,使得 $na+b-(3n^2+15)=0$

如果存在实数 a 和 b,使$(a, b) \in \mathrm{C}$,那么必有 $a^2+b^2 \leqslant 144$

因此,实数 a, b 满足

$$\begin{cases} na+b-(3n^2+15)=0 \quad (n \in \mathrm{Z}) \cdots\cdots ① \\ a^2+b^2 \leqslant 144 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①式表明点 $P(a,b)$ 在直线 $l: nx+y-(3n^2+15)=0$ 上,设原点到 l 的距离为 d,于是 $d=\dfrac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=3\sqrt{n^2+1}+\dfrac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 12$,等号只在 $n^2=3$ 时成立,而 $n\in Z$,故等号不能成立,因此 $d>12$.

因为点 P 在直线 l 上,点 P 到原点的距离 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$,这使 $a^2+b^2\leqslant 144$ 不可能成立.

所以不存在实数 a 与 b,使式①与式②同时成立.由此不存在 a 与 b,使 $A\cap B\neq\varnothing$,且 $(a,b)\in C$.

【解法二】 由解法一中式①得,$b=3n^2+15-an$,代入式②整理得到关于 a 的不等式

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0.$ ………………… ③

它的判别式

$$\Delta=-36(n^2-3)^2$$

由于 $n\in Z$, $n^2-3\neq 0$,则 $\Delta<0$.

又 $1+n^2>0$,故不存在实数 a 使式③成立.这表明不存在实数 a 与 b 使式①与式②同时成立.

【解法三】 如果存在整数 a 和 b 满足题意,由解法一中式①知:必存在整数 n,使 $3n^2-an-(b-15)=0$.这个关于 n 的方程的判别式 $\Delta=a^2+12b-180\geqslant 0$,即 $a^2\geqslant -12(b-15)$.而由式②得 $a^2\leqslant 144-b^2$.所以 $144-b^2\geqslant -12(b-15)$,即 $(b-6)^2\leqslant 0$,得 $b=6$.

当 $b=6$ 时,$a^2\leqslant 144-b^2$ 的等号也应成立,于是 $a^2\leqslant 108$;而 $\Delta\geqslant 0$ 即为 $a^2\geqslant 108$.所以 $a^2=108$.此时 $\Delta=0$, $n=\dfrac{a}{6}=\pm\sqrt{3}$不是整数.

所以不存在 a 与 b.

【点津】 三种解法都是出于对式①与式②的不同处理手法,特别是对式①的不同认识.将 a 与 b 看成坐标变量时,式①成为直线方程,$\sqrt{a^2+b^2}$是点 (a,b) 与 $(0,0)$ 的距离;将式①中的 a 看作变量,就成为关于 a 的一元二次方程;将式①中的 n 作为变量,得到关于 n 的一元二次方程.由此分别得出三种解法.

例 4 (1997·上海市高中数学竞赛)设 $f(x)+g(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}$ $\left(x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$,且 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 是偶函数,求 $[f(x)]^2-$

$[g(x)]^2$.

【解答】 由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，$g(x)$ 是偶函数，$g(-x)=g(x)$. 在 $f(x)+g(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}$ 中用 $-x$ 代替 x 得 $-f(x)+g(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin x}}$，通过解方程组得

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}}\right)$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}+\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}}\right)$$

通过化简易得 $[f(x)]^2-[g(x)]^2=-2\cos x\left(x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

例 5 (1992·上海市数学竞赛)已知函数 $f(x)=x^2-2x+2$，$x\in[t,t+1]$ 的最小值是 $g(u)$. 试写出函数 $S=g(t)$ 的解析表达式.

【解答】 $f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in[t,t+1]$.

(1)当 $t\leqslant 1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)=f(1)=1$.

(2)当 $1>t+1$，即 $t<0$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)=f(t+1)=t^2+1$.

(3)当 $1<t$，即 $t>1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)=f(t)=(t-1)^2+1$.

综上所述

$$S=g(t)=\begin{cases}t^2+1 & (t<0)\\ 1 & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ (t-1)^2+1 & (t<1)\end{cases}$$

【点津】 对于二次函数在闭区间 $[m,n]$ 上的最值，要分析对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 是否经过此区间，然后用函数的单调性解题.

例 6 (1992·上海市数学竞赛)已知函数 $f(x)$ 定义在非负整数集上，且对于任意正整数 x，都有

$$f(x)=f(x-1)+f(x+1)$$

若 $f(0)=1992$，求 $f(1992)$.

【解答】 因为对任意正整数 x，有

$$f(x)=f(x-1)+f(x+1)$$

所以

$$f(x+1)=f(x)+f(x+2)$$

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x+3)$$

将上面三式相加，得

$$f(x)=-f(x+3)$$

以 $x+3$ 代替 x，得

$$f(x+3)=-f(x+6)$$

从而 $$f(x)=f(x+6)$$

即 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，因此

$$f(1992)=f(6\times 332)=f(0)=1992$$

例 7 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a、b、c\in\mathbf{R})$，满足 $f(-1)=0$，对于任意实数 x，都有 $f(x)-x\geqslant 0$，并且当 $0<x<2$ 时，有 $f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 证明 $a>0,c>0$；

(3) 当 $x\in[-1,1]$ 时，函数 $g(x)=f(x)-mx(x\in\mathbf{R})$ 是单调的，求证 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 1$.

(1)**【解答】** 由题意对于任意实数 x，都有 $f(x)-x\geqslant 0$

$\therefore\quad f(1)\geqslant 1$

又当 $0<x<2$ 时，有

$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$

$\therefore\quad f(1)\leqslant 1$

$\therefore\quad f(1)=1$

(2)**【证明】** $f(-1)=0$ 得　$a-b+c=0$ ………………………… ①

由 $f(1)=1$ 得　$a+b+c=1$ ………………………………… ②

由式①式②得　$b=a+c=\frac{1}{2}$

又由题意知，对任意实数 x，都有 $f(x)-x\geqslant 0$，即 $ax^2-\frac{1}{2}x+c\geqslant 0$

$\therefore\quad \Delta\leqslant 0$，且 $a>0$

即 $ac \geqslant \frac{1}{16}$，从而 $c>0$ 获证.

(3)【证明】 $\because$ $a+c \geqslant 2\sqrt{ac} \geqslant 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

又 $a+c=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $a=c=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

$\therefore$ $g(x)=f(x)-mx=\frac{1}{4}[x^2+(2-4m)x+1]$

$\because$ 当 $x\in[-1,1]$时，函数 $g(x)$是单调的，

$\therefore$ $\left|\frac{2-4m}{-2}\right| \geqslant 1$

解得 $m\geqslant 1$ 或 $m\leqslant 0$

思维发散

1. 关于函数的单调性

(1)复合函数的单调性：若 $u=g(x)$在区间$[a,b]$上单调，而 $y=f(u)$在区间$[m,n]$上单调，且$[m,n]\supseteq[g(a),g(b)]$或$[g(b),g(a)]$，则函数 $y=f[g(x)]$在$[a,b]$上也单调，根据增、减函数的定义，易证得，若 $g(x)$、$f(u)$都是增(或都是减)函数，则 $f[g(x)]$为增函数.

(2)判断函数单调性的方法有：①根据定义(注意，几乎所有资料总错误地将用定义证明等同于求差比较法：$f(x_1)-f(x_2)>0$ 或 $f(x_1)-f(x_2)<0$)；②根据图像；③利用已知函数的单调性；④利用复合函数的单调性.

2. 关于函数的奇偶性

(1)要注意：①奇、偶函数的定义域须关于原点"对称"(必要条件)；② $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)=-f(x)$是恒等式.

(2)用定义判定、证明奇偶性，可根据具体函数在化简、变形中的需要，采取① $f(-x)=\pm f(x)$；② $f(-x)\pm f(x)=0$；③ $\frac{f(x)}{f(-x)}=\pm 1$，$(f(-x)\neq 0)$等等价手段.

(3)可以用图像的对称性作判断：一函数为奇(偶)函数的充要条件是其图像关于原点(y 轴)对称.

(4)易证得，函数 $f(x)$既是奇函数又是偶函数的充要条件是 $f(x)=0$

（恒等式），且定义域关于原点对称.

3. 函数的图像变换

(1)平移变换

$y=f(x)\to y=f(x+a)$

当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位得到函数 $y=f(x+a)$ 的图像.

当 $a<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $|a|$ 个单位得到函数 $y=f(x+a)$ 的图像.

$y=f(x)\to y=f(x)+b$

当 $b>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像向上平移 b 个单位得到函数 $y=f(x)+b$ 的图像.

当 $b<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像向下平移 $|b|$ 个单位得到函数 $y=f(x)+b$ 的图像.

(2)翻折变换

$y=f(x)\to y=f(-x)$

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图像关于 y 轴对称.

$y=f(x)\to y=-f(x)$

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(x)$ 的图像关于 x 轴对称.

$y=f(x)\to y=-f(-x)$

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(-x)$ 的图像关于原点对称.

$y=f(x)\to y=f(|x|)$

函数 $y=f(x)$ 的图像位于 y 轴右边的图像不变，且关于 y 轴对称，所得图像为 $y=f(|x|)$ 的图像.

$y=f(x)\to y=|f(x)|$

函数 $y=f(x)$ 在 x 轴上边的图像不变，且其下边的图像关于 x 轴对称，所得图像为 $y=|f(x)|$ 的图像.

例 1 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且满足 $f(x+2)=f(x)$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=2^x+1$，求 $f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 上的解析式.

【解答】 设 $x\in(-3,-2)$，则 $-x-2\in(0,1)$

$\because$ 当 $x\in(0,1)$ 时，有 $f(x)=2^x+1$

$\therefore$ 当 $x\in(-3,-2)$ 时，有 $f(-x-2)=2^{-x-2}+1$

$\because$ $f(x)$ 为偶函数，且 $f(x+2)=f(x)$

$\therefore \quad f(-x-2)=f(x+2)=f(x)$

$\therefore \quad$ 当 $x\in(-3,-2)$时，$f(x)=2^{-x-2}+1$.

例2 若定义在R上的函数 $f(x)$，恒有 $|f(-x)|=|f(x)|$. 则下列关于 $f(x)$ 奇偶性的判断中，正确的是（　　）

A. $f(x)$为奇函数

B. $f(x)$为偶函数

C. $f(x)$为奇函数或偶函数

D. $f(x)$可能既不是奇函数，也不是偶函数

【解答】 取 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant -1)\\ -1 & (x<-1)\end{cases}$

显然 $f(x)$满足 $|f(-x)|=|f(x)|=1$，而由其图像（如图1-1所示）知，$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数，故选D.

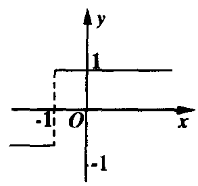

图1-1

【点津】 由 $|f(-x)|=|f(x)|$，得出 $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)=-f(x)$后，一般会错选为C[$f(x)$为奇函数或偶函数]. 注意，这里仅表明在 $x\in R$ 时，恒有 $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)=-f(x)$，而不是恒有 $f(-x)=f(x)$或恒有 $f(-x)=-f(x)$.

高考对接

例1 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，则实数 m 组成的集合是____________.

【思路导航】 由已知集合 $A=\{2,3\}$，因 $mx+1=0$ 是一次方程的形式，显然 $A\neq B$，又 $A\cup B=A$，故 $B\subset A$. 于是有如下解法：

【解法一】 由已知可知 $B\subset A$，所以，$B=\varnothing$ 或 $B=\{2\}$或 $B=\{3\}$

当 $B=\varnothing$ 时，$m=0$

当 $B=\{2\}$时，$2m+1=0$，解得 $m=-\dfrac{1}{2}$

当 $B=\{3\}$时，$3m+1=0$，解得 $m=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore \quad m$ 的值组成的集合是$\left\{0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right\}$

【解法二】 若 $B=\varnothing$ 时，$m=0$

若 $B\neq\varnothing$,则 $m\neq0$ $\therefore\quad x=-\dfrac{1}{m}$

$\because\quad B\subseteq A$ $\therefore\quad -\dfrac{1}{m}\in A$

$\therefore\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2-5\left(-\dfrac{1}{m}\right)+6=0$

解得　$m=-\dfrac{1}{2}$或 $m=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ m 的值组成的集合是$\left\{0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right\}$.

【点津】 空集是指不含任何元素的集合,它是一个特殊的集合,不能忽视空集的性质:空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

例2 (1984·全国高考)如果集合 $X=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$Y=\{y\mid y=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$,那么　(　　)

A. $X\subset Y$　　B. $Y\subset X$　　C. $X=Y$　　D. $X\neq Y$

【解法一】 由

$X=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$

$Y=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$

有 $X=Y$. 故选 C

【解法二】 由 $2n+1=\begin{cases}4k+1, n=2k,\\4k-1, n=2k-1,\end{cases}$ 知 $X=Y$,故选 C.

【解法三】 X 为奇数的集合,而 Y 中的元素为奇数,故有 $Y\subseteq X$.

又任取 $x\in X$,则 $x=2n+1$,当 n 为偶数 $2k$ 时,$x=4k+1\in Y$;当 n 为奇数 $2k-1$ 时,$x=4k-1\in Y$,故 $X\subseteq Y$.

所以 $X=Y$.

【解法四】 (选择题的逻辑分析法)首先 $X\supseteq Y$,若 $X\supset Y$ 即 B 真,则有 D 真,这与选择支"有且仅有一项成立"矛盾,故得 $X=Y$.

【解法五】 (选择题的逻辑分析法)C、D 是矛盾关系,必有一真一假,从而 A、B 均假,又由 $X\supseteq Y$ 且 B 假,得 C 真.

例3 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2mx+4,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid \log_3^2x+\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant0\}$ 且 $A\cap B=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

【解答】 $\because\quad y=x^2+2mx+4=(x+m)^2+4-m^2\geqslant4-m^2$

$\therefore$　集合 $A=\{y\mid y\geqslant4-m^2\}$

$\because\quad \log_3^2x+\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant0$