数学归納法

伊·亚·杰朴曼 著

人民教育出版社

数学归納法

伊·亚·杰朴曼 著

呂 学 礼 譯

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据苏联伊·亚·杰朴曼著的“数学归納法”譯出的，原书是苏联中学教师用的数学参考书。

原书对于在向学生讲述数学归納法之前所必需的启发性談話，提供了丰富的材料；給出了数学归納法的許多例題；并且指出了怎样在以后的数学教学中（例如，在教学排列、組合、不等式时）应用数学归納法。

对于我国中学数学教师来說，这本书也是一本优良的教学参考书。

在譯出本书时，把原序及原书第六章“从欧拉著作中的一些摘录”删去了。

*

И. Я. ДЕПМАН

МЕТОД
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ИНДУКЦИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ
УЧПЕДГИЗ
ЛЕНИНГРАД 1957

本书根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社列宁格勒分部1957年列宁格勒俄文版譯出

*

数学归納法

〔苏联〕 伊·亚·杰朴曼著
呂学祇 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号
人民教育出版社出版（北京景山东街）
新华书店发行
人民教育印刷厂印刷

統一书号：7012·398 字数：47千
开本：787×1092公厘 1/32 印張：$2\frac{1}{4}$
1958年7月第一版
1959年3月第一次印刷
北京：1—26,500册

*

定价（6）0.20元

目　录

第一章　在数学里的归納法

1. 归納和归納法

在課堂上或者在小組里最好跟学生进行象下面这样的談話。

在低年級的时候你們曾經做过下面的实驗：拿一根銅針，把它加热，結果看到加热后銅針伸长。对鉄的、黃銅的、以及其他几种質料的針进行实驗，发現加热后針也伸长。

根据这些观察，能不能作出結論：一切物体加热后都要膨脹呢？你們中間某些人在那个时候可能是这样想的。

这个結論并不正确。这从接下去的一个实驗可以看到：取温度近于攝氏 0° 的水，加热到近于攝氏 4° 的温度。这时水的体积不是增加，而是減少。一切物体加热后都要膨脹的断言是不正确的。只可以这样說，某些物体加热后膨脹，或者更精确地說，我們做过实驗的那些物体加热后膨脹。在对有限个数物体所做的实驗中观察到了某些規律，不能有把握地断言，其他的物体也有所观察到的規律。根据了对于某些現象的观察，而对更广大多数的現象的性質所作出的結論，或即所謂从特殊到一般的結論，是可能发生錯誤的。

然而，为了要建立某种現象的規律，往往沒有其他方法，只有对我們所要尋求規律的現象，作了某些数量的观察，而根据这些观察作一些猜測。根据了所进行的数目很有限的观察，研究者們設

法建立这一种現象的規律，把它作为一个假定或者假設提出，然后用实驗来检驗它对于所有的这种現象是正确的还是不正确的。

研究者从特殊走向一般的科学研究方法，叫做归納法。这个名詞表示归引的意思：对某些現象的观察，把我們归引到一种想法，有这样的規律存在，它也能适用于比我們藉以提出規律的現象更为广大的范圍。从物体加热膨脹的例子我們看到，根据了对某些有限个数的物体或者現象的观察而作的猜測，可能对于沒有經受观察的其他一些情况并不正确。

作为結論的根据的观察，如果包含了規律所逼及的一切現象，这种归納法叫做**完全归納法**。这样的結論是可靠的。如果所提出的規律逼及还沒有經受观察的現象，那末这种归納法叫做**不完全归納法**。

按照不完全归納法所得的結論可能是錯誤的。

下面是按照不完全归納法得到錯誤的結論的几个算术方面的例子。

1）設誰学生把分数$\frac{30303}{62500}$化成小数。

学生記得把分数化成小数的时候应当把它的分子除以分母，他在把 30303 除以 62500 的时候，得到了商 0.4848 和余数 30000。

在商里得到了重复的数字 4 和 8，学生作出結論，在所求的小数里这些数字还将重复，而写成：$\frac{30303}{62500}=0.\dot{4}\dot{8}$。

学生的結論是否正确呢？

不，并不正确，因为継續除下去并不得出循环小数 $0.\dot{4}\dot{8}$，而得出有限小数 0.484848。学生关于所得的小数的循环性的結論是錯誤的；它是按照不完全归納法而作的沒有根据的結論的一个例子。

2)設让七年級学生求$\sqrt{36493681}$。他按照法則計算而得到

$$\sqrt{36'49'36'81}=6041。$$

学生在开方的时候，把被开方数分节而注意到所有的各节都是完全平方数(81, 36, 49, 36)。他作出結論：如果被开方数分成的各节都是完全平方数，那末整个被开方数也是完全平方数，因此它开得尽平方。这个归納得来的結論是不是正确呢？

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{36'49'36'81}=6041 & \\
36 & \\
\hline
\quad 49\ 36 & 1204 \\
\quad 48\ 16 & \\
\hline
\quad\ \ 1\ 20\ 81 & 12081 \\
\quad\ \ 1\ 20\ 81 &
\end{array}$$

計算表明，学生所作的結論是不正确的。去掉最后的一节而計算$\sqrt{364936}$，虽則 364936 这个数也是由都是完全平方数的各节組成的，但是我們得到 604 和余数 120。

3)学生計算平方根$\sqrt{60.4938275}$时，得到了 7.7777777……而决定說，$\sqrt{60.4938275}=7.\dot{7}$。他的結論是不是正确的呢？

它是不正确的：$\sqrt{60.4938275}=7.77777779\cdots\cdots$。

4)五年級的学生要把 1.11111……这个数目除以 9。他求得了商的 8 个数字 0.1234567 而决定說，后面的两个数字是 8 和 9。他作这样的結論有沒有根据呢？

檢驗表明，商的后面的数字不是 8 和 9，而是 9 和 0，而学生的結論是不正确的。

在上面所举的一切情况里，用不完全归納法所作的結論，都是不正确的。但是在另外一些情况里，不完全归納法也可能引得正确的結論。归納的結論只是可能的，或者只是所謂或然的：在某种

情况可能是正确的，而在这种情况我們就用了归納的方法建立了所考察的現象的規律，在另一种情况归納的結論可能是不正确的。

2. 著名的学者应用不完全归納法而作的某些錯誤

1）費尔馬的錯誤。

法国数学家費尔馬（1601—1665）在他所提出的許多定理里有下面的一条。

“对于任何非負整数 n，形状为 $2^{2^n}+1$ 的数都是質数。”①

这样的数叫做“費尔馬数”而用符号 F_n 来表示：

$$F_0=2^{2^0}+1=3$$

$$F_1=2^{2^1}+1=5$$

$$F_2=2^{2^2}+1=2^4+1=17$$

$$F_3=2^{2^3}+1=2^8+1=257$$

$$F_4=2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$$

$$F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$$

前面五个費尔馬数 F_0、F_1、F_2、F_3、F_4 确是質数，对于前四个可以直接証实这一点，而对于 F_4 可以用質数表来証实（現在我們有印就的 12000000 以内所有質数的表）。用現在有着的表来檢驗

$$F_5=4294967297$$

是不是質数，就已經不可能了。

提出他的定理的时候，費尔馬根据的是对于前面五个数的观察，就是說，他用了不完全归納法，虽則他在另一个地方說过：“在

① 原注：$2^{2^n}+1$ 这个数表示 $2^{(2^n)}+1$ 的意思。

数学里用类比来得出結論，并不是眞理……。适合于某些特殊情况的法則，虽然可能是很有用的，但是不能作为科学的根据；在这种情况只能用証明来滿足要求。"费尔馬也犯了沒有証明而无根据地相信观察的錯誤：他的定理对于 F_5 就已經不正确了。

$$F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297,$$

这个数目是合数。彼得堡的科学院院士欧拉(1707—1783)在1732年发現了费尔馬的錯誤，他指出，F_5 这个数能被 641 整除。我們可以不用計算 F_5 的值而来証明这一点。

$$2^{2^5}=2^{32}=2^4\times2^{28}=16\times2^{28}=(641-625)\times2^{28}$$
$$=641\times2^{28}-625\times2^{28}。$$

把减数单独拿来考察：

$$625\times2^{28}=5^4\times2^{28}=(5\times2^7)^4=640^4=(641-1)^4$$
$$=641^4-4\times641^3+6\times641^2-4\times641+1。$$

用这个式子去代 625×2^{28}，我們有：

$2^{2^5}=641\times2^{28}-641^4+4\times641^3-6\times641^2+4\times641-1$；

$2^{2^5}=641$ 的倍数-1，或即 $F_5=2^{2^5}+1$ 是 641 的倍数。

計算証实了我們的結論：

$$F_5=2^{32}+1=4294967297=641\times6700417。$$

要注意，在费尔馬数 F_n 中間当 $n>4$ 的时候还沒有找到一个质数。对于

$$n=7,8,9,11,12,15,18,23,36,38,73$$

的时候的数目 F_n，已經証明，所有这些数都是合数。

$F_{12}=2^{2^{12}}+1=2^{4096}+1$ 这个数能被 114689 整除；$F_{23}=2^{2^{23}}+1=2^{8388608}+1$ 这个数能被 167772161 整除。上面这个数目 F_{23} 有 2525223 位数字，如果用本书里的字体印出来，就要有 5 公里

的长度。

F_{12} 和 F_{23} 是合数以及它們有所說的因数，是由俄罗斯业余数学家伊·姆·佩尔武什內(1827--1900)在1877年和以后的几年証明的。

关于数目 $F_n=2^{2^n}+1$ 是質数还是合数的問題，对于几何里解决能不能用圓規和直尺来作正多边形的問題是很重要的。

2)著名的数学家之一萊布尼茨(1646—1716)，曾經对于，把已知的自然数 n 化成自然数的和有几种方法，这个問題发生兴趣。

用符号 $p(n)$ 来表示自然数 n 能由自然数組成的方法的种数。我們有：

n	把 n 化成和的形式	$p(n)$
2	2, 1+1	$p(2)=2$
3	3, 2+1, 1+1+1	$p(3)=3$
4	4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1	$p(4)=5$
5	5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 1+1+1+1+1	$p(5)=7$
6	6, 5+1, 4+2, 3+3, 4+1+1, 3+1+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 3+2+1	$p(6)=11$

对于 n 从2到6的值，$p(n)$的值給出了自然数列里的質数列2、3、5、7、11。这可以引出这样的假定，$p(n)$ 是自然数列里的第 $(n-1)$ 个質数而 $p(7)$ 等于13。然而計算表明，7这个数目不是有13种方法，而是有15种方法可以化成和的形式。

7, 6+1, 5+2, 4+3, 5+1+1, 4+1+1+1, 3+1+1+1+1, 2+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1, 2+2+3, 3+3+1, 1+1+2+3, 1+2+4, 2+2+2+1, 2+2+1+1+1。

莱布尼茨，发現了他原先所作的归納猜測的錯誤以后，說道，这是騙人的归納的极好的例子！

計算可以表明，在这个情况，归納的結論騙人的程度究竟怎样。

如果归納的猜測說 $p(n)$ 等于自然数列里第 $(n-1)$ 个質数是正确的，那末 $p(200)$ 应当等于第 199 个質数，这等于 1217。①然而事实上

$$p(200)=3972999029388,$$

3）彼得堡院士古德巴赫在十八世紀中叶根据观察指出，一切奇数都是三个質数的和。欧拉对此作补充，說如果能够証明，每一个偶数都是两个質数的和，那末这个定理就能得到証明了。

事实上，$2n+1=2(n-1)+3$；如果偶数 $2(n-1)$ 是两个質数的和，那末奇数 $2n+1$ 就是三个質数的和。

古德巴赫关于奇数的定理，虽然对于千百万次个别情况已經得到証实，但是直到現在还是沒有被証明。社会主义劳动英雄，伊·姆·維諾格拉朵夫院士（生于 1891 年）对于相当大的数目証明了这个定理。任何偶数都是两个質数的和的这个假設，也已經对于大量的数目得到了証实，然而直到現在还沒有对于一切数目証明它的正确性。

3. 关于观察的次数对于归納結論的可靠性的影响

在我們所看到的由归納法得到錯誤結論的几个情况中，我們

① 原注：千以內有 168 个質数。

都只是作了少数几次的观察。自然就发生了这样的問題：是不是产生錯誤結論的原因，在于所作的观察的次数太少了呢？如果作了足够多次的观察，能不能得到所研究的現象的正确規律呢？

可以用数学的例子来对所有这些問題給以否定的答案。

甲）計算下面的数列

$$x_n=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-100)。$$

得到：$x_1=1$，$x_2=4$，$x_3=9$，$x_4=16$，$x_5=25$，……，$x_{99}=99^2=9801$，$x_{100}=10000$。

如果根据归納得出結論，$x_n=n^2$，那末我們就犯了錯誤，因为这个法則只有到 x_{100} 是正确的，x_{100} 的确是 10000，但是 x_{101} 就不等于 101^2，而等于一个龐大的数目 $101^2+100\cdot 99\cdot 98\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1$。

如果 x_n 是由公式

$$x_n=n^2+(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-999)(n-1000)$$

确定的，那末数列 x_n 的前面一千項就能按公式 $x_n=n^2$ 得出，但是

$$x_{1001}=1001^2+1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdot 1000。$$

在确定 x_n 的公式的第二个加数里增加因数的个数，我們就可以得到一个数列，使其中前面的任意若干項是由某一个規律組成的，而其余的項就按另外的規律組成。这就等于說，某一个規律对于不管怎样多的确定次数的檢驗能够成立，在其他的場合也会不能应用。

可以举出一个惊人的例子如下。

乙）在高等数学里研究了彼耳方程

$$x^2-ky^2=1,$$

其中 k 是不等于完全平方的自然数。

在印度，后来在欧洲，已經找到了求这种方程的整数解的方法。

假定說，我們不知道彼耳方程，例如下面的方程，有沒有整数解：

$$x^2-4729494y^2=1。$$①

我們試用归納法来解这个問題。

我們得 $x^2=4729494y^2+1$，

我們将用1、2、3、4、……这些数目来代替 y；并且依次檢驗，$4729494y^2+1$ 是不是完全平方，因而确定有沒有可能对于 x 求得整数的值。

列出下面的数值表：

y	$x^2=4729494y^2+1$	所得的和是不是完全平方	x
1	4729495	不是	不是整数
2	18917977	不是	不是整数
……	……	……	……
……	……	……	……

对于各个自然数繼續一直做到

$$y=50549485234033074477819735540408986339,$$

我們每次都証实，对于 x 不能得到整数值。我們已經进行了这样大量的檢驗（試驗），檢驗的次数已經是用上面所写的不易讀出的38位数来表示，而对于 x 还沒有得到整数值。看起来，这个檢驗的次数是够大的了，似乎是足以說明对于所考察的方程

$$x^2-4729494y^2=1$$

① 原注：亚基米德提出的所謂雄牛問題，归結到这个方程。

x和y不可能同时有整数值了。然而在

$$y=505494852341033074477819735540408986340$$

的时候，x得到了 45 位数的整数值

$$x=109931986732829734979866232821433543901088049。^{①}$$

上面的断言的正确性可以把x和y的这些值代入方程来检验，这需要很多的时間。要把上面所說的檢驗表进行到求得适合我們的方程的y的最小整数值，需要用几百万年的时間。代数知識可以在不多几个小时內求得所說的x和y的值。

上面的例子使我們确信，不管試驗了多少次，总不会有这样的一个試驗的次数，进行了这些次試驗后，足以使我們有理由把在这些次試驗中观察到的规律，認为是对于所有的情况都确立的規律。根据了許多次試驗而作的假設，只是更可能的，使它有更多可靠性的，但是不管試驗了多少次，都不能最后証明观察到的規律的眞确性。

归納法能得出的是或然的結論，而不是必然的結論。它可能是錯誤的。

第二章 数学归納法

1. 在数学里的归納和演繹

在第一章里已經指出，归納法給我們带来的結論，只是或然的和可能的。

---

① 原注：見阿·兹·瓦利菲什：彼耳方程，1952 年出版。
譯者注：这个数目恐有錯誤。

列宁說过："以最簡單的归納方法所得到的最簡单的眞理，总是不完全的，因为經驗总是未完成的。"(譯者注：見列宁，"哲学笔記"，人民出版社1956年版，165頁)。

归納法不能使它的結論有象数学眞理那样的可靠性。数学眞理的可靠性是由和归納法一起应用的另一种方法給出的，这种方法叫做演繹或者演繹法。

拉丁文中演繹表示推演的意思。应用演繹法，我們是从一般的断言走向特殊的。如果一般的命題是已經証明了的或者是未經証明而作为眞理用的，那末从这个一般命題推出的每一个特殊命題也就是正确的。例如：

1. 在所有的平行四边形中对角綫互相二等分。

2. 矩形是平行四边形。

3. 矩形的对角綫互相二等分。

如果命題1已經証明，那末命題3就是必然的。

所举的三个步驟的推理，叫做三段論式，这是在数学中应用的演繹推論的范例。

数学眞理所独具的可靠性，是由我們应用演繹法而得到的。

然而，这种情况不应該使我們認为，演繹法在数学中占絕对的統治地位。虽則演繹法超过归納法是数学的特征，但是在数学中，跟在其他科学中一样，"归納和演繹正如分析和綜合一样是必然相互联系着的"(譯者注：見恩格斯，"自然辯証法"，人民出版社1955年版，189頁)。归納法提出了定理，它再經受演繹的証明。

可以引出卓越的数学家(欧拉，高斯，伽罗华等等)对于归納法在数学創造方面的作用所說的許多証言。

弗·克萊因(1849—1925)(見"高等观点下的初等数学"1935

年版第一卷，835—836页)写道：

“研究者在数学中以及在一切科学中工作，……本質上是应用着他的想象，并且是归納地推动前进的，依靠着探测性的輔助手段。……最初建立某一个假設的人所做的归納法的工作，跟最初証明这个假設的人所做的演繹法的工作，当然具有同样的价值，因为这个和那个是同样必要的。”

阿·亚·欣斤表示了近代科学的观点，他說：

“数学創造的基础是由把演繹和归納的过程綜合起来組成的”，“归納法，沒有和演繹法綜合起来，就把数学变成跟数学沒有共同之点的經驗，而演繹法，沒有經过归納法的授粉作用，也就使数学失去了創造的能力”；他作出結論：“数学分析的一切建筑都充滿着归納法，組成了和創造了它的財富、它的美丽、它的价值，正好象演繹的形态保障了它的永久的穩固性一样。”

2. 数学归納法的内容是什么

在数学中除了应用不完全归納法以外，还广泛地应用着所謂“数学归納法”。它是一种归納—演繹的結論方法，根据的是下面的公理：“如果某一个命題T对于自然数m(通常取$m=1$或$m=0$)是正确的，又如果在命題T对于自然数k $(k>m)$是正确的这个假設之下，能够引出命題T对于$n=k+1$也是正确的，那末命題T对于任意自然数都是正确的”。

这个公理表示了下面所述的自然数列的基本性質：

在自然数的每一个不空的集合中，必有一个最小的数。

象有理数就沒有同样的性質：并不是在有理数的每一个集合里都有最小的数。

从自然数的这个性質可以引出：如果任何一个集合：

1)含有自然数 a，

2)含有在这个集合里所有的每一个数后面的自然数(就是，只要含有 n，也就含有 $n+1$)，

那末这个集合就含有比 a 大的每一个自然数。

数学归納法的实質

我們来看一个在古代就已注意到的問題：自然数列里前 n 个奇数的和等于什么：

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)。$$

从观察得出，自然数列里前一个、两个、三个、等等奇数的和是

$$\begin{aligned} 1 &= \quad\quad\quad 1=1^2, \\ 1+3 &= \quad\quad\quad 4=2^2, \\ 1+3+5 &= \quad\quad\quad 9=3^2, \\ 1+3+5+7 &= 16=4^2。\end{aligned}$$

这就自然得出这样的想法：自然数列里前 n 个奇数的和对于任意的 n 都等于 n^2。

但是只根据了对某几个特殊情况的观察而作出的这个結論，不能認为是对于一切 n 都已証明了的。

要經过下面这样的推理以后它才是必然的。①

設我們的結論对于某一个数目 k 个加数是正确的。如果能够証明，从这个規律对于 k 个加数的正确性的假設能够引出它对于 $k+1$ 个加数的正确性，那末可以断言，这个規律对于一切自然数

① 原注：古代的数学家不進行進一步的推理，而是根据类推，就是根据簡单归納法，来作出結論說所指的規律对于任意个加数都是正确的。