中興經營管理叢書

線型規劃

—原理及應用—

郭明哲 編著

中興管理顧問公司 發行

中興經營管理叢書

線型規劃

——原理及應用——

郭明哲著

中興管理顧問公司

發行

著 者 簡 介

著者：郭明哲
籍貫：臺灣省新竹縣
出生：民國23年4月
學歷：臺灣省立師範大學理學院數學學士
美國賓州州立大學工學院工業工程碩士
簡歷：中國石油股份有限公司研究發展處、企劃處組長
國立交通大學工學院管理科學研究所、管理科學系兼任副教授
國立清華大學數學系兼任副教授
私立淡江文理學院管理科學研究所兼任副教授
著作：經營決策理論之應用（經濟部國營會印行、中興管理顧問公司出版，64年度嘉新優良著作獎得獎作品）
預測方法（中興管理顧問公司出版）

中華民國六十八年九月初版

中興經營管理叢書

線型規劃——原理及應用

精裝本實價新臺幣　二百四十元

著　者：郭　明　哲

發行者：中興管理顧問公司
臺北市民生東路66號新力大樓
電話：561-6356 • 561-6357
郵政劃撥儲金戶第 100952 號

印刷者：精進印刷有限公司
臺北市西昌街193號
電話：306-5762 • 306-5656

行政院新聞局出版事業登記證：局版臺業字第0040號

中興經營管理叢書

出版宗旨

在這個多元衝擊、競爭激烈、充滿希望也遍佈機會的環境中，管理的良窳對企業成敗常有決定性的影響。本叢書的出版，希望為國內管理知識的普及與企業經營的現代化獻盡一份心力，也深願能帶給讀者更佳的智慧、判斷與信心。

中興管理顧問公司　　敬啓
臺北市民生東路66號新力大樓五樓
電話：5616356•5616357
郵政劃撥帳戶第100952號

緒　言

「線型規劃」係作業研究最常用的基本技術之一。吾人遭遇的各種結構優良之決策問題，以數學模式代表後，如其目標函數及限制條件式子均為一次式，則立可藉此技術解模式，以得最佳決策方案。

自1947年George B. Dantzig 等氏發展線型規劃之理論，使其模式能以「單純法」求解後，它的應用日益廣大，遍及軍事、農業、經濟、工商企業各方面。其後，諸如整數線型規劃、線型規劃靈敏度分析、大型線型規劃分解原理等等特殊論題的相繼出現，以及技術與電腦之配合運用，使線型規劃應用領域更加擴展。

本書內容重點在介紹線型規劃之基本理論、解題、技術、及應用方法，使讀者瞭解線型規劃原理及具備解答有關問題能力。全書共分八章，第一、二章扼要介紹線型規劃內容，及其理論推導所用數學；第三章提供線型規劃模式圖解法；第四、五章有系統地陳述推導「單純法」之理論及應用本法步驟，使任何線型規劃模式皆能藉一系列表列運算求解；第六章討論如何處理單純法遭遇的種種特殊問題；第七章敘述二種改進的單純法之理論與方法；第八章論及線型規劃的對偶問題之形式、定理、含義、與用途。每章各節均依需要列舉例題，俾有助於瞭解所述的理論與方法，章末並附有習題供練習之用。

線型規劃係大學之工業工程、管理科學、系統分析、應用數學、經濟學、企業管理等學系之必修或選修課程。本書除可供此等學系做為三學分的線型規劃課程之教材外，尚可供一般企業經理、決策幕僚、系統分析師、研擬各種計劃人員、工程設計人員等研讀及利用。

本書之出版，承蒙作者服務單位中國石油公司及中興管理顧問公司之支持，特深致謝忱。

郭明哲 謹識

民國六十八年八月廿一日

目　　錄

第一章　線型規劃簡介

§ 1.1　線型規劃模式

線型規劃模式（Linear Programming Model）為一種甚常見的數學模式，在這種模式中的目標函數（Objective Function）及限制式（Constraints）均為一次式，即呈線型，故本模式名稱冠有「線型」之形容詞。至於「規劃」一詞，實與「計劃（Planning）」同義，而線型規劃含義則為：「計劃線型系統中的各項活動，使獲最佳（Optimal）效果」，此處所言最佳效果，指所有可行方案中使特定目標為最佳者。

以數學式子陳述的線型規劃模式之一般式如下：

求使下面之線型函數 z 具最小值，

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n \qquad (1.1)$$

且同時滿足下列諸一次式之限制式之變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 值，

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \qquad (1.2)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \qquad (1.3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \qquad (1.4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots\cdots, x_n \geq 0 \qquad (1.5)$$

式中 a_{ij}, b_{ij} 及 c_{ij} 為已知常數。注意此模式之限制式共有 m+n 條，而其中所含未知數只有 n 個。吾人實際所遭遇的線型規劃問題寫出線型規劃模式後，其限制式條數及變數個數常均達數百，甚至達數千，這類龐大的線型規劃模式事實上靠人力無法求解，必須藉助電腦之計算始能迅速獲得解答。

線型規劃問題寫出模式後，其限制式未必與上述一般式完全同一

形式，即可能有一部份或全部之限制式係等式，或其不等號方向相反。這種情形，模式求解時，並不把這些限制式先化爲上述之一般形式，而是直接把(1.5)式以外之限制式全化爲等式，具上述一般式形式者亦然(利用圖解法求解例外)。茲將不等式化爲等式之方法敍述於後：

(1) 如果某些限制式具如下式之形式，且 $b_1>0$，

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\geq b_1$$

則可於此式之左邊減去一個不爲負值之未知數 x_{n+1}，而把結果之式子寫爲等式，並增列 $x_{n+1}\geq 0$ 之限制式，即

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n-x_{n+1}=b_1$$

$$x_{n+1}\geq 0$$

至於目標函數則不必變更，因增加之項可視爲 $0x_{n+1}$。此增加進去的未知數通常稱爲呆變數 (Slack Variable)。

(2) 如果某些限制式具如下式之形式，且 $b_1\leq 0$，

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\geq b_1$$

則可把此式之兩邊全乘以 -1，變爲

$$(-a_{11})x_1+(-a_{12})x_2+\cdots\cdots+(-a_{1n})x_n\leq(-b_1)$$

然後再於上式之左邊加上一個不爲負值之未知數 x_{n+1}，而把結果之式子寫爲等式，並增列 $x_{n+1}\geq 0$ 之限制式，即

$$-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\cdots\cdots-a_{1n}x_n+x_{n+1}=-b_1$$

$$x_{n+1}\geq 0$$

目標函數不變。

(3) 如果某些限制式具如下之形式，則可仿(1)或(2)之方法處理之：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leq b_1$$

有些問題之數學模式雖屬線型，但缺少 $x_1\geq 0, x_2\geq 0,\cdots\cdots, x_n\geq 0$

之一部份或全部之限制式。換言之，欲求解之未知數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 值有一部份或全部可爲負值。這類模式仍屬線型規劃模式，因爲吾人使用變換變數之技巧，甚易以不爲負值之新變數替換目標函數及諸限制式中的所有可爲負值之變數。茲將變換前後（包括限制式全變爲等式之變換）之模式詳列於後：

Minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n \tag{1.6}$$

Subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \tag{1.7}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \tag{1.8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \tag{1.9}$$

命 $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$，及 $x_{n+i} \geq 0$, $j = 1, 2, \cdots\cdots, n$；$i = 1, 2, \cdots\cdots, m$，

則此模式變爲

Minimize

$$z = c_1(x_1' - x_1'') + c_2(x_2' - x_2'') + \cdots\cdots + c_n(x_n' - x_n'') \tag{1.10}$$

Subject to

$$a_{11}(x'_1 - x''_1) + a_{12}(x'_2 - x''_2) + \cdots\cdots + a_{1n}(x'_n - x''_n) - x_{n+1} = b_1 \tag{1.11}$$

$$a_{21}(x'_1 - x''_1) + a_{22}(x'_2 - x''_2) + \cdots\cdots + a_{2n}(x'_n - x''_n) - x_{n+2} = b_2 \tag{1.12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}(x_1' - x_1'') + a_{m2}(x'_2 - x''_2) + \cdots\cdots + a_{mn}(x'_n - x''_n) - x_{n+m} = b_m \tag{1.13}$$

$$x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, \cdots\cdots, x'_n \geq 0 \tag{1.14}$$

$$x_1'' \geq 0, x_2'' \geq 0, \cdots\cdots, x_n'' \geq 0 \tag{1.15}$$

$$x_{n+1} \geq 0 \ , x_{n+2} \geq 0 \ , \cdots\cdots , x_{n+m} \geq 0 \qquad (1.16)$$

以新變數 x_j',x_j'',x_{n+1}寫出之線型規劃模式求得x_j'及x_j''之解後，把此等值代入$x_j = x_j' - x_j''$中，即得原模式之解答。

例題1.1　試將下列之線型規劃模式化爲如（1.10）至（1.16）式之形式：

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & z = -3x_1 + x_2 \\
\text{Subject to} & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& -x_1 - 3x_2 \geq -3 \\
& \qquad x_2 \leq 4 \\
& x_1 \qquad \geq 0 \\
& \qquad x_2 \geq 0
\end{array}$$

解：化成所求形式之模式爲

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Minimize} & z = -3x_1 + x_2 & & & & & & \\
\text{Subject to} & 2x_1 & + x_2 & -x_3 & & & = & 2 \\
& x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = & 3 \\
& & x_2 & & & +x_5 & = & 4 \\
& x_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & x_2 & & & & \geq & 0 \\
& & & x_3 & & & \geq & 0 \\
& & & & x_4 & & \geq & 0 \\
& & & & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

式中之 x_3,x_4 及 x_5 爲呆變數。

第二條限制式 $-x_1 - 3x_2 \geq -3$ 化爲 $x_1 + 3x_2 + x_4 = 3$ 之方法，除前述（2）之方法外，亦可先從原給限制式左式減去一不爲負值之呆變數 x_4，並把結果之式子寫爲等式，然後在式子之兩邊同時乘以 -1，以獲最後式子。兩種方法所得最後式子相同。

例題1.2　試將下列之線型規劃模式化爲如（1.10）至（1.16）

式之形式：

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad & z=-2x_1-5x_2\\
\text{Subject to}\quad & x_1 \le 400\\
& x_2\le 300\\
& x_1+x_2\le 600\\
& x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

（x_1之值不限制必不為負值）

解：化成所求形式之模式為

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad & z=-2\ (x_1'-x_1'')\ -5x_2\\
\text{Subject to}\quad & (x_1'-x_1'') \quad +x_3 \quad =400\\
& x_2 \quad +x_4 \quad =300\\
& (x_1'-x_1'')\ +x_2 \quad +x_5=600\\
& x_1'\ge 0,\ x_1''\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

式中之 x_3, x_4及x_5為呆變數；x_1'及x_1''為x_1變數經變換後所得新變數。

有些線型規劃模式中，所欲求之目標函數值爲求最大值，而非如以上所列舉的模式，求其目標函數之最小值。在本書後面所推導得的解線型規劃模式之步驟及方法，係針對求最小值發展得者，當然只適用於求最小值之情形。求最大值之情形，求解之步驟及方法須自行略加以修改，始能應用。然而許多讀者常喜好只慣用一種求解之步驟及方法，以免求解時與別法混淆或誤用，而得錯結果。因此，此地將介紹如何把求目標函數之最大值之模式，轉變為求目標函數之最小值之模式，使以後推導出之解法恆能適用。

求任何函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 之最大值，使其變數滿足一組限制式，係完全相當於求函數$-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 之最小值，使其變數滿足同一組限制式，當然此函數可不一定爲線型函數。模式之目標函數部份，此等關係可用下面之數學式子表示：

$$\text{Maximize } f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = -\text{Minimize } [-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)] \tag{1.17}$$

故 $$\text{Max } f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = -\text{Min } [-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)] \tag{1.18}$$

(1.18) 式中之 **Max** 及 **Min**爲最大値及最小値記號。由 (1.18) 式，吾人知模式之目標函數化爲 Minimize $[-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)]$ 後（注意其前不附負號），解此模式所獲之最小値Min $[-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)]$，須把數値反號（即絕對値不變，而正値則改爲負値，負値則改爲正値）始能得所求目標函數之最大値$-$Min $[-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)]$。至於所得$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之値，則不必反號或變値，即已爲原模式之解，其理至明。

(1.18) 式之所以成立，可用圖1.1 予以說明：

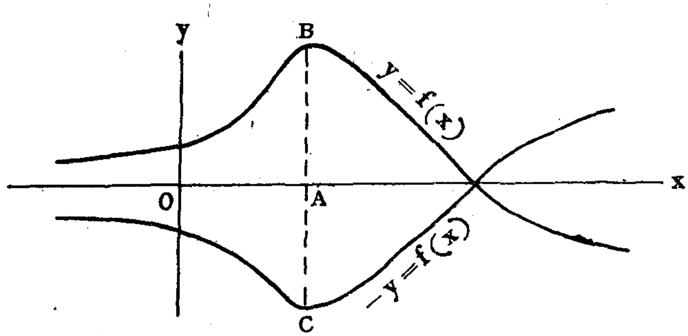

圖 1.1

設 $y=f(x)$ 之曲線形狀如圖1.1 所示，則$-y=f(x)$ 之曲線形狀必與前者對稱，故設 $y=f(x)$之最大値 Max $y=\overline{AB}$，$-y=f(x)$ 之最小値 Min $(-y)=\overline{AC}$，則

$$|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$$

即 $$\overline{AB} = -\overline{AC}$$

故 $\text{Max } y = -\text{Min } (-y)$

此說明 (1.17)式中之函數 f 爲單變數函數式，該式成立。事實上，f 爲多變數函數時，該式亦成立，惟其函數之圖形較難繪示。其實，(1.18) 式成立之道理甚簡單：因 $f = -(-f)$，而當 f 值越大時，$(-f)$ 值越小，且絕對值相等，故 $\text{Max } f = -\text{Min } (-f)$，此處 f 可爲多變數函數。

例題 1.3 試將下面求目標函數最大值之模式化爲求目標函數最小值之模式：

$$\begin{array}{ll} \text{Maximze} & z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{Subject to} & 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad \leq 8 \\ & \qquad\quad 2x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \end{array}$$

如果新模式之解爲 $x_1 = 89/41$, $x_2 = 50/41$, $x_3 = 62/41$，試求原模式之解，並驗證 $\text{Max } z = -\text{Min } (-z)$。

解： 化成所求形式之模式爲

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & -z = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ \text{Subject to} & 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad \leq 8 \\ & \qquad\quad 2x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \end{array}$$

原模式之解仍爲 $x_1 = 89/41$, $x_2 = 50/41$, $x_3 = 62/41$。此等值分別代入原模式及新模式之目標函數中，得

$$\text{Max } z = 3\left(\frac{89}{41}\right) + 5\left(\frac{50}{41}\right) + 4\left(\frac{62}{41}\right)$$

$$= \frac{267 + 250 + 248}{41} = \frac{765}{41}$$

$$\text{Min } (-z) = -3\left(\frac{89}{41}\right) - 5\left(\frac{50}{41}\right) - 4\left(\frac{62}{41}\right)$$

$$=\frac{-267-250-248}{41}=-\frac{765}{41}$$

故 $$\text{Max}\quad z=\frac{765}{41}=-\left(-\frac{765}{41}\right)=-\text{Min}\,(-z)$$

§1.2 線型規劃問題實例

一個屬於作業研究（Operations Research）之問題，寫成數學模式後，如其形式屬於線型規劃模式，則此問題爲線型規劃問題。在作業研究問題中屬此類之問題甚多，故線型規劃在作業研究中佔極重要的地位與份量。像著名的運輸問題（Transportation Problem）、食譜問題（Diet Problem）、資源調配問題（Resource-Allocation Problem）等等都是線型規劃問題。在文獻上，吾人發現在下列領域內，均有線型規劃問題存在：農業、工業、商業、軍事、經濟、人力運用、生產計劃、盤存控制、土木建築設計、交通分析、運輸計劃等等。這些領域內存在之線型規劃問題，其目標函數之種類計有：求費用、時間、速度、距離、人工、機率等等之最小值；求產量、利益、設備利用、運動速度、效率、機率等等之最大值，端視題目性質而定。

下面舉述數題簡單的線型規劃問題實例，把其數學模式寫出：

例題1.4 某小鎮之自來水廠每天須於水中加入硬水軟化劑及殺菌劑兩種藥品。出售這些藥品的公司有甲、乙兩公司，可是他們出售的藥品均係兩種藥劑的混合物。甲公司的藥品每罐售320元，內含硬水軟化劑 8 磅及殺菌劑 3 磅；乙公司的藥品每罐售 400 元，內含硬水軟化劑 4 磅及殺菌劑 9 磅。經專家研究該自來水廠之水質後，認爲欲維持自來水最起碼的軟化程度，每天需加入150 磅以上的硬水軟化劑；欲完全殺菌，每天需加入100 磅以上的殺菌劑，但不宜超過此數量，以免對人體健康有害。問該自來水廠每天宜使用甲、乙公司的藥品各多少罐，始能使藥品費用最少？