

初中数学

攻城



寨

主编 任志东 金迪曾

总复习

Gongchengbazhai

- 中考试题精讲与精练
- 命题方向分析与预测
- 例题名师导引与点拨
- 启迪思维开放与创新



江西高校出版社

初中数学攻城拔寨总复习

丛书主编	任志东		
丛书编委	陈昌勋	钱俊瑞	金迪曾
	黄健如	徐建生	周美华
本册主编	任志东	金迪曾	
本册编者	任志东	金迪曾	万仁德
	林望春	王美德	董乐华
	刘修华	费 敏	周 琬

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学攻城拔寨总复习/任志东,金迪曾主编. —南昌:江西高校出版社,2003.6

ISBN 7-81075-403-3

I. 初… II. ①任… ②金… III. 数学课—初中—升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003) 第 045935 号

江西高校出版社出版发行

(江西省南昌市洪都北大道 96 号)

邮编:330046 电话:(0791)8592235,8504319

江西恒达科贸有限公司照排部照排

江西教育印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 8.375 印张 290 千字

印数:1~15000 册

定价:10.30 元

(江西高校版图书如有印刷、装订错误,请随时向承印厂调换)

前言

全国各地的中考试题是教改百花园中精雕细刻的精品.它体现了学科素质教育的要求,反映了教学改革的动态,蕴含着今后中考命题改革的走向.广大初中任课教师和学生急切盼望借鉴各地中考试题,改进教学,提高初中总复习的质量和效率.我们顺应广大师生的需求,组织多年来教学成绩好、对中考试题颇有研究的特级、高级教师和教研员,以教育部中考改革精神和课程改革理念为指导,以修订教学大纲和修订教材为依据,以全国各地近年来中考试题为基本材料,编写了初中思想政治、语文、数学、英语、物理、化学共六个学科组成的初中攻城拔寨总复习丛书.其中,物理分为配合人教版教材和配合沪科版教材两册.

本丛书按学科知识结构体系和初中总复习内容安排顺序,精选中考试题,分篇、章、节进行精编、精讲、精练.书中一般设置了如下栏目:

【考点概述】 每章一开始,就对本章主要考查内容与考试重点或热点、试题类型与试题难度、试题反映的命题趋势或方向等进行概述.

【典型题例】 在每一节,安排具有科学性、时代性、人文性、代表性和典型性的中考试题为例题进行讲解.

【创新题选】 在典型题例之后,安排有在试题立意、或试题内容、或试题设问、或试题情境、或试题题型等方面创新的中考试题为例题进行讲解.

在典型题例和创新题选的讲解中,解答之前有“思路导引”,解答之后有“回顾反思”.思维由问题始,提出问题往往比解决问题更重要.所以,“思路导引”采用分析、启发、点拨思路的问题串的形式,或采用直接点拨解题思路的方式,使学生从中体验如何提出问题、分析解决问题和领悟思维方法,提高思维能力.解答题目之后,及时进行回顾反思,其收获超出解题本身.“回顾反思”总结解题规律、方法,或提示多种解法,或将问题拓展推广,或提醒易错之处、对比易混之处.

【试题精练】 每节(或章)之末,安排有覆盖本节主要知识、技能、方法和题型的中考试题,供学生练习之用.

【自我测试】 每章之末,安排有覆盖本章内容和题型的中考试题,供学生自我测试之用.

本丛书每本学科分册的书末,均有本学科的四套中考模拟测试卷.所有试题精练、自我测试及模拟测试的答案与提示,均附于书末.

本丛书既重视“双基”的复习,又突出能力的培养;既立足于当前的教学现实,又着眼于中考的测试目标;既考虑到教师备课、讲课的方便,又注重学生复习的巩固与提高;真正具有内容新颖、形式活泼、注重能力、针对性强、精简实用、使用方便等特点.我们真诚希望,本丛书的出版和使用,给教师带来便利和快乐,给学生带来喜获丰收的笑脸和成功!

丛书编委会

目 录

第一章 实数、代数式和统计初步	(1)	6.3 相似三角形(二)	(57)
1.1 实数	(1)	自我测试	(59)
1.2 整式	(2)	第七章 解直角三角形	(60)
1.3 因式分解	(4)	7.1 锐角三角函数	(61)
1.4 分式	(5)	7.2 解直角三角形	(62)
1.5 二次根式的意义和性质	(6)	7.3 解直角三角形的应用	(65)
1.6 二次根式的运算	(7)	自我测试	(67)
1.7 统计初步(一)	(9)	第八章 圆	(68)
1.8 统计初步(二)	(10)	8.1 圆的基本性质及与圆有关的角	(68)
自我测试	(12)	8.2 直线与圆的位置关系	(71)
第二章 方程与不等式	(13)	8.3 与圆有关的比例线段	(73)
2.1 一元一次不等式和不等式组	(14)	8.4 圆与圆的位置关系	(75)
2.2 整式方程和方程组	(15)	8.5 正多边形和圆	(77)
2.3 分式方程	(17)	8.6 圆柱、圆锥的侧面展开图	(79)
2.4 一元二次方程根的判别式及根与系数 的关系	(19)	自我测试	(80)
2.5 列方程(组)解应用题	(21)	第九章 综合性问题	(82)
自我测试	(22)	9.1 方程型综合	(82)
第三章 函数及其图象	(23)	9.2 函数型综合	(83)
3.1 平面直角坐标系及函数	(24)	9.3 几何型综合	(86)
3.2 一次函数的图象和性质	(26)	9.4 其他综合性问题	(89)
3.3 二次函数及其图象	(27)	自我测试	(91)
3.4 反比例函数及其图象	(30)	第十章 应用问题	(92)
3.5 函数的综合应用	(31)	10.1 数、式与方程的应用	(92)
自我测试	(34)	10.2 函数的应用	(93)
第四章 相交线、平行线与三角形	(35)	10.3 几何知识的应用	(95)
4.1 线与角、相交线与平行线	(35)	10.4 其他应用问题	(97)
4.2 三角形的基本性质	(37)	自我测试	(99)
4.3 全等三角形	(39)	第十一章 新题型	(101)
4.4 特殊的三角形	(40)	11.1 阅读理解题	(101)
自我测试	(42)	11.2 开放性问题	(104)
第五章 四边形	(44)	11.3 探索题	(106)
5.1 多边形和平行四边形	(44)	11.4 操作题	(108)
5.2 特殊的平行四边形	(46)	自我测试	(110)
5.3 梯形	(48)	模拟测试	(113)
5.4 对称与图形变换	(50)	模拟测试(一)	(113)
自我测试	(52)	模拟测试(二)	(115)
第六章 相似形	(53)	模拟测试(三)	(117)
6.1 比例线段	(53)	模拟测试(四)	(119)
6.2 相似三角形(一)	(55)	附 答案与提示	(122)

第一章 实数、代数式和统计初步

【考点概述】

实数与整式的有关概念是中考的必考内容,一般以选择题、填空题等题型出现.

实数的运算除计算题外,近年来还增加了阅读理解题、探索题等新题型,而整式的运算,特别是求代数式的值和乘法公式的应用,则侧重于考查数学方法的运用.

因式分解的考查重点是二次三项式的因式分解与一元二次方程间的关系.

分式的有关概念、分式的基本性质一般用选择题、填空题等题型考查.分式的考查重点是分式的四则运算及化简求值.

二次根式的概念题是中考中失分较多的考题,准确理解和掌握概念的定义及前提条件是答题关键.二次根式的运算是考查重点,主要考查运算的熟练程度.

统计初步的有关内容是中考必考内容,而且近年来常用大题、综合题进行考查.复习这部分内容的关键是理解概念的定义,明确题目的考查对象,熟练掌握有关的计算公式.

1.1 实数

【典型例题】

例1 (黄冈市)在 $-7, \cot 45^\circ, \sin 60^\circ, \frac{\pi}{3}, -\sqrt{9}, (-7)^{-2}$ 这六个实数中,有理数的个数有().

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

思路导引:先想想什么是有理数,什么是无理数?再考虑各数的值是否为有理数?

解: $\because \cot 45^\circ = 1, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{9} = -3,$
 $(-7)^{-2} = \frac{1}{49}.$

$\therefore -7, \cot 45^\circ, -\sqrt{9}, (-7)^{-2}$ 是有理数.

故选(D).

回顾反思:对实数的分类,不能只看运算形式,还要看运算的结果,再如 $\frac{\pi}{3}$ 是分数的形式,却不是分数,而是无理数.

例2 (哈尔滨市)已知 $|x| = 3, |y| = 2$,且 $x \cdot y < 0$,则 $x + y$ 的值等于().

A. 5或-5 B. 1或-1
C. 5或1 D. -5或-1

思路导引:脱绝对值号的关键在于确定 x, y 的符号,由 $x \cdot y < 0$,判定 x, y 的符号有几种情况?

解: $\because xy < 0$

1. 当 $x > 0, y < 0$ 时,

则 $x = 3, y = -2, \therefore x + y = 1$

2. 当 $x < 0, y > 0$ 时

则 $x = -3, y = 2, \therefore x + y = -1.$

故选(B).

回顾反思:当满足题目所给的条件的情况不是一种时,要根据不同情况进行分类讨论.

【创新题选】

例3 将正偶数按下表排成5列:

	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
第1行		2	4	6	8
第2行	16	14	12	10	
第3行		18	20	22	24
...		...	28	26	

根据上面排列规律,则2000应在().

A. 第125行,第1列
B. 第125行,第2列
C. 第250行,第1列
D. 第250行,第2列

思路导引:先找行的规律,每行是 n 个数?2000应该是第几行中的数?再看哪几列的数规律明显?这些列在第250行是否有数?是哪一个数?从而推出2000的准确位置.

解:第5列的数是8的倍数,但仅在奇数行有数字,故可排除.

第1列是16的倍数,第250行应在 $16 \times 125 = 2000$.

$\therefore$ 应选(C).

回顾反思:本题是一道探索型问题,要求通过观察、分析、比较,总结出题设所反映的某种规律,进而利用规律解题,本题所给数恰在第250行第一列,比较好判断,如所给的2004亦可先通过对特殊数2000的定位,再根据各行数规律得出是215行第3列.

【试题精练】1.1

1. (北京市海淀区) $|- \frac{1}{3}|$ 的倒数是().

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

2. (重庆市)数轴上表示 $-\frac{1}{2}$ 的点到原点的距离是().

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

3. (呼和浩特市) m 是实数,则 $|m| + m$ 的值().

A. 可以是负数
B. 不可能是负数
C. 必为正数

D. 可以是负数,也可以是正数

4. (黄冈市) 将 $(\frac{1}{6})^{-1}$, $(-2)^0$, $(-3)^2$ 这三个数按从小到大的顺序排列, 正确的是 ().

A. $(-2)^0 < (\frac{1}{6})^{-1} < (-3)^2$

B. $(\frac{1}{6})^{-1} < (-2)^0 < (-3)^2$

C. $(-3)^2 < (-2)^0 < (\frac{1}{6})^{-1}$

D. $(-2)^0 < (-3)^2 < (\frac{1}{6})^{-1}$

5. (杭州市) 下列各组数中互为相反数是 ().

A. -2 与 $-\frac{1}{2}$

B. -2 与 2

C. -2 与 $\sqrt{(-2)^2}$

D. -2 与 $\sqrt[3]{-8}$

6. (苏州市) 一天的时间共 86400 秒, 用科学记数法表示为 ().

A. 864×10^2 秒

B. 86.4×10^3 秒

C. 8.64×10^4 秒

D. 8.64×10^5 秒

7. (四川省) 纳米是一种长度单位, 1 纳米 = 10^{-9} 米, 已知某种植物花粉的直径约为 35000 纳米, 那么用科学记数法表示该花粉的直径为 ().

A. 3.5×10^4 米

B. 3.5×10^{-4} 米

C. 3.5×10^{-5} 米

D. 3.5×10^{-9} 米

8. (重庆市) 如果表示 a, b 两个实数的点在数轴上的位置如图所示, 那么化简 $|a - b| + \sqrt{(a + b)^2}$ 的结果等于 ().

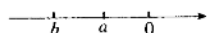
A. $2a$

B. $2b$

C. $-2a$

D. $-2b$

9. (荆州市) 当 $0 < x < 1$ 时, $x^2, x, \frac{1}{x}$ 的大小顺序是 ().



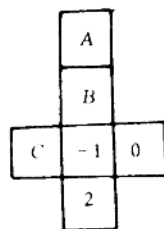
A. $\frac{1}{x} < x < x^2$

B. $\frac{1}{x} < x^2 < x$

C. $x^2 < x < \frac{1}{x}$

D. $x < x^2 < \frac{1}{x}$

10. (济南市) 如图是一个正方体纸盒的展开图, 若其中的三个正方形 A、B、C 内分别填入适当的数, 使得它们折成正方体后相对的面上的两个数互为相反数, 则填入正方形 A、B、C 内的三个数依次为 ().



A. 1, -2, 0

B. 0, -2, 1

C. -2, 0, 1

D. -2, 1, 0

11. (江西) 若 m, n 互为相反数, 则 $|m - 1 + n| =$.

12. (河南) 观察下面一列数的规律, 并填空: 0,

3, 8, 15, 24, ..., 则它的第 2002 个数是 .

13. 若 $(\sqrt{3} - a)^2$ 与 $|b - a|$ 互为相反数, 则 $\frac{2}{a - b}$ 的值为 .

14. (北京市朝阳区) 计算: $-\frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \tan 60^\circ - (-2001)^0 + (\frac{1}{2})^{-1}$

15. (福州市) 计算: $(\frac{1}{3})^{-1} - (2001 + \sqrt{2})^0 + (-2)^2 \times \sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

16. (苏州市) 计算 $(-2)^3 - 1 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^{-2} \times (1 - \sqrt{3})^0$

17. (淮安市) 观察: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$.

1.2 整式

【典型例题】

例 1 (安徽) 计算 $x^2 y^3 \div (xy)^2$ 的结果是 ().

A. xy

B. x

C. y

D. xy^2

思路导引: 既有除法运算又有乘方运算, 本题应先进行哪一种运算? 积的乘方的运算法则是什? 两个单项式相除, 同底数幂是指数相加还是相减?

解: $x^2 y^3 \div (xy)^2 = x^2 y^3 \div x^2 y^2 = x^{2-2} y^{3-2} = y$

故选(C)

例 2 (河南) 已知代数式 $3y^2 - 2y + 6$ 的值为 8, 那么代数式 $\frac{3}{2}y^2 - y + 1$ 的值为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

思路导引: 观察两个代数式含字母 y 的对应项系数有何特征? 根据特征, 不求 y 的值可以直接求出所求代数式的值吗?

解: 由 $3y^2 - 2y + 6 = 8$

得 $3y^2 - 2y = 2$

$\therefore \frac{3}{2}y^2 - y = 1$

$\therefore \frac{3}{2}y^2 - y + 1 = 1 + 1 = 2$.

故选(B).

回顾反思: 本题若先由已知条件, 解关于 y 的一元二次方程, 求出 y 的值再代入求第二个代数式的

值,则繁难得多,采用上面的整体代入法,关键是含字母的各对应项系数要相等或能转化为相等.

【创新题选】

例3 (陕西) 如图图1,在边长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形($a > b$),把余下的部分拼成一个矩形(如图2),通过计算两个图形(阴影部分)的面积,验证了一个等式,则这个等式是().

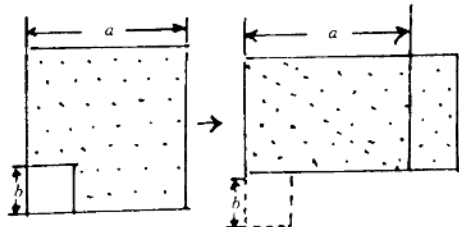


图1

图2

- A. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 B. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 C. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 D. $(a+2b)(a-b) = a^2 + ab - 2b^2$

思路导引:图1的阴影部分面积是多少?要拼成图2的矩形,图1的阴影部分要按怎样的线剪成两块?剪下部分是边长为多少的矩形?图2矩形的边长是多少?

解:图1阴影部分面积是 $a^2 - b^2$

图2的面积是 $(a+b)(a-b)$

验证了公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

应选(A).

回顾反思:图形的剪接拼折问题需要动手动脑,发挥想象力,是当前中考的一种新题型,解这类题能力的提高,需要平时对类似问题的勤思考、勤实践.

【试题精练】1.2

1.(宁德市)把多项式 $3xy^3 + x^3y + 6 - 4x^2y^2$ 按 x 的升幂排列是_____.

2.(天津市)计算: $3xy^2 \cdot (-2xy) =$ _____.

3.(河北)下列计算中正确的是().

A. $(ab^2)^3 = ab^6$ B. $(3xy)^3 = 9x^3y^3$

C. $(-2a^2)^2 = -4a^4$ D. $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$

4.(成都市)下列计算中正确的是().

A. $a^2 + 2a^2 = 3a^4$

B. $2x^3 \cdot (-x^2) = -2x^5$

C. $(-2a^2)^3 = -8a^5$

D. $6x^{2m} \div 2x^m = 3x^2$

5.(扬州市)用代数式表示“比 m 的平方的3倍大1的数”是().

A. $(3m)^2 + 1$

B. $3m^2 + 1$

C. $3(m+1)^2$

D. $(3m+1)^2$

6.(四川)已知 $-0.5x^{a+b}y^{a-b}$ 与 $\frac{2}{3}x^{a-1}y^3$ 是同类型项,那么().

A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

7.(重庆市)若 $(a^{m+1}b^{n+2}) \cdot (a^{2n-1}b^{2m}) = a^5b^3$,则 $m+n$ 的值为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. -3

8.(自贡市)计算 $(a+b)^2 - (a-b)^2$,其结果是().

A. $4ab$ B. $2ab$ C. $2a^2$ D. $2b^2$

9.(潍坊市)计算 $(a+m)(a+\frac{1}{2})$ 的结果中不含关于字母 a 的一次项,那么 m 等于().

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

10.(济南市)一次买10斤鸡蛋打8折比打9折少花2元钱,则这10斤鸡蛋的原价是_____元.

11.(江西)先化简,再求值: $(2a+1)^2 - (2a+1)(2a-1)$,其中 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

12.(长沙市)下表为杨辉三角系数表,它的作用是指导读者按照规律写出形如 $(a+b)^n$ (其中 n 为正整数)展开式的系数,请你仔细观察下表中的规律,填出 $(a+b)^4$ 展开式中所缺的系数.

		1		
	1		1	
	1	2	1	
1	3		3	1

$(a+b) = a+b$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

则 $(a+b)^4 = a^4 + \underline{\hspace{1cm}} a^3b + 6a^2b + 4ab^3 + b^4$

13.(宁夏回族自治区)设 $a-b = -2$,求 $\frac{a^2+b^2}{2} - ab$ 的值.

14.(自贡市)观察下列算式:

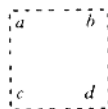
$1^2 - 0^2 = 1 + 0 = 1$; $2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$;

$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$; $4^2 - 3^2 = 4 + 3 = 7$;

$5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$; ...

若字母 n 表示自然数,请把你观察出的规律用含 n 的式子表示出来,你认为的正确答案是_____.

15.(安徽)如图,是2002年6月份的日历,现用一矩形在日历中任意框出4个数字,请用一个等式表示 a, b, c, d 之间的关系:



16. (武汉市) 观察下列各式: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$; $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$; $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$, 根据前面各式的规律可得 $(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$. (其中 n 为正整数)

1.3 因式分解

【典型例题】

例1 (盐城市) 多项式 $4x^2 + 1$ 加上一个单项式后, 使它能成为一个整式的完全平方, 则加上的单项式可以是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (填上你认为正确的一个即可, 不必考虑所有的可能情况.)

思路导引: 题目只要求最后结果是一个整式的完全平方. 如果要构成两数和的平方, 应加上一个怎样的单项式? 两数差的平方呢? 单项式的平方呢?

$$\begin{aligned} \text{解: } 4x^2 + 1 + (4x) &= (2x + 1)^2 \\ 4x^2 + 1 - (4x) &= (2x - 1)^2 \\ 4x^2 + 1 + (4x^4) &= (2x^2 + 1)^2 \\ 4x^2 + 1 - (1) &= (2x)^2 \\ 4x^2 + 1 - (4x^2) &= 1^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ 所加的单项式可以是 $\pm 4x, 4x^4, -1, -4x^2$ 这五个单项式中任选一个.

回顾反思: 这是一道答案不唯一的开放型试题, 它要求我们克服习惯的思维方法 (如前2种), 多角度进行思考, 寻求解答.

例2 (黄冈市) 如果 a, b 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个实数根, 那么代数式 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

思路导引: 考虑一元二次方程的根与系数关系可得到关于 a, b 的哪些关系式? 所求的代数式能否通过因式分解这一恒等变形的方法, 转化为关于 a, b 的已知关系式形式?

$$\begin{aligned} \text{解: 依题意, } a + b &= -1, \\ ab &= -1. \\ a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 &= a^2(a + b) + b^2(a + b) \\ &= (a + b)(a^2 + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 2ab] \\ &= (-1)[(-1)^2 - 2(-1)] = -3. \end{aligned}$$

回顾反思: 因式分解是多项式进行恒等变形的一种工具, 它为多项式的化简、求值提供了一条重要的途径, 这也就是学习因式分解的意义所在.

【创新题选】

例3 (襄樊市) 阅读下列材料, 并解答相应问题:

九年义务教育初级中学教科书《代数》中, 有以下文字: 对于二次三项式 $x^2 + 2ax + a^2$ 这样的完全平方式, 可以用公式法将它分解成 $(x + a)^2$ 的形式. 但是二次三项式 $x^2 + 2ax - 3a^2$, 就不能直接应用完全平方公式3, 我们可以在二次三项式 $x^2 + 2ax -$

$3a^2$ 中先加上一项 a^2 , 使其成为完全平方式, 再减去 a^2 这项, 使整个式子的值不变, 于是有:

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax - 3a^2 &= x^2 + 2ax + a^2 - a^2 - 3a^2 \\ &= (x + a)^2 - (2a)^2 = (x + 3a)(x - a) \end{aligned}$$

(1) 像上面这样把二次三项式分解因式的数学方法是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 这种方法的关键是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 用上述方法把 $m^2 - 6m + 8$ 分解因式.

思路导引: 上式能最后完成因式分解的关键在于先要把原式变形为平方差的形式, 而变形的要害又在于“先加上一个 a^2 ”, 构成 $x^2 + 2ax + (a^2) = (x + a)^2$, 为什么选择“ a^2 ”, a^2 和 $2ax$ 是什么关系? 要把 $m^2 - 6m + 8$ 分解因式应该加上一个什么数, 又减去这个数呢?

解: (1) 配方法

(2) 加上一项系数一半的平方

$$\begin{aligned} (3) m^2 - 6m + 8 &= (m^2 - 6m + 9) - 1 \\ &= (m - 3)^2 - 1 \\ &= (m - 2)(m - 4). \end{aligned}$$

回顾反思: 这是一道阅读理解题, 解这类题先要读懂材料中提供的思路和方法, 通过类比, 运用这种方法解决题目给出的问题.

【试题精练】1.3

1. (云南) 填上适当的数, 使等式成立.

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \underline{\hspace{2cm}} = (x - \frac{1}{4})^2$$

2. (海南) 下列因式分解中, 错误的是 ().

A. $1 - 9x^2 = (1 + 3x)(1 - 3x)$

B. $a^2 - a + \frac{1}{4} = (a - \frac{1}{2})^2$

C. $-mx + my = -m(x + y)$

D. $ax - ay - bx + by = (x - y)(a - b)$

3. (杭州市) 用配方法将二次三项式 $a^2 - 4a + 5$ 变形的结果是 ().

A. $(a - 2)^2 + 1$ B. $(a + 2)^2 + 1$

C. $(a + 2)^2 - 1$ D. $(a - 2)^2 - 1$

4. (自贡市) 计算 $(a + b)^2 - (a - b)^2$, 其结果是 ().

A. $4ab$ B. $2ab$

C. $2a^2$ D. $2b^2$

5. (安徽) 将 $mn - m - n + 1$ 分解因式的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. (荆州市) 分解因式: $a^3 - 2a^2b + ab^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. (北京市海淀区) 分解因式: $m^2 - 4n^2 + 4n - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (北京市东城区) 分解因式: $3x^3 - 12x^2y + 12xy^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (呼和浩特市) 因式分解: $(a + b)(a - b) + 4(b - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. (武汉市) 分解因式: $ax^2 + ay^2 - 2axy - ab^2$

11. (杭州市) $x^2 - 9x + 14$ 的因式分解结果是

1.4 分式

【典型例题】

例1 (黑龙江) 如果分式 $\frac{|x|-1}{x^2-3x+2}$ 的值为零, 那么 x 等于().

A. -1 B. 1 C. -1 或 1 D. 1 或 2

思路导引: 分式的值为 0, 除分子的值必须为 0 外, 还需满足什么条件? 本题是否可选(C)?

解: 由 $|x|-1=0$ 得 $|x|=1$

即 $x=-1$ 或 1 .

但是, 当 $x=1$ 时, 分母 $x^2-3x+2=0$

$\therefore$ 应选(A).

回顾反思: 此题是分式的概念题, 也是中考的热点题型, 要防止错选(C) 的错误.

例2 已知 $x + \frac{1}{x} = 4$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} =$

思路导引: 能否采用分子、分母同时除以 x^2 将所求分式变形? 由已知能否求出 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值?

解: 由已知可得 $x \neq 0$

$$\text{原式} = \frac{\frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{4^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{15}$$

回顾反思: 本题采用的是整体代入法, 先把所求分式中含 x 的项恒等变形为已知条件的形式.

【创新题选】

例3 已知不论 x 取什么数时, 分式 $\frac{ax+3}{bx+5}$ ($bx+5 \neq 0$) 都是一个定值, 求 a, b 应满足的关系式, 并求出这个定值.

思路导引: 给 x 取一个特定的值找到这个分式的定值, 然后再给 x 取其他的值确定 a, b 的关系.

解: 取 $x=0$, $\frac{ax+3}{bx+5} = \frac{3}{5}$ (定值)

取 $x=1$, 则 $\frac{ax+3}{bx+5} = \frac{a+3}{b+5}$

$\therefore$ 不论 x 取什么实数, $\frac{ax+3}{bx+5}$ 是一个定值

$$\therefore \frac{a+3}{b+5} = \frac{3}{5}, \therefore 5a+15 = 3b+15$$

$$\therefore 5a = 3b, \text{即 } a = \frac{3}{5}b.$$

把 $a = \frac{3}{5}b$ 代入原式得

$$\frac{ax+3}{bx+5} = \frac{\frac{3}{5}bx+3}{bx+5} = \frac{\frac{3}{5}(bx+5)}{bx+5} = \frac{3}{5}$$

$\therefore a, b$ 的关系为 $5a = 3b$, 定值为 $\frac{3}{5}$.

回顾反思: 本题通过取特殊值 ($x=0$) 首先确定定值, 这种解题方法称为特殊值法.

【试题精练】1.4

1. (河北) 如果把分式 $\frac{x}{x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大 3 倍, 那么分式的值().

A. 扩大 3 倍 B. 不变
C. 缩小 3 倍 D. 缩小 6 倍

2. (无锡市) 不改变分式 $\frac{0.5x-1}{0.3x+2}$ 的值, 把它的分子和分母中的各项系数都化为整数, 则所得的结果为().

A. $\frac{5x-1}{3x+2}$ B. $\frac{5x-10}{3x+20}$
C. $\frac{2x-1}{3x+2}$ D. $\frac{x-2}{3x+20}$

3. (武汉市) 化简 $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab}$ 的结果是().

A. 0 B. $-\frac{2a}{b}$ C. $-\frac{2b}{a}$ D. $\frac{2b}{a}$

4. (武汉市) 计算 $\frac{x-1}{x} \div (x - \frac{1}{x})$ 所得正确结果是().

A. $\frac{1}{x+1}$ B. 1 C. $\frac{1}{x-1}$ D. -1

5. (呼和浩特市) 若分式 $\frac{1}{x^2-2x+m}$ 不论 x 取何实数总有意义, 则 m 的取值范围是().

A. $m \geq 1$ B. $m > 1$ C. $m \leq 1$ D. $m < 1$

6. (菏泽市) 当 $x=-1, y=\sqrt{2}$ 时, 分式 $\frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{xy-y^2}{x^2-y^2}$ 的值是().

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7. (黄冈市) 化简 $(ab-b^2) \div \frac{a^2-b^2}{a+b}$ 的结果是

8. (成都市) 已知 $x^2-3x-2=0$, 那么代数式 $\frac{(x-1)^3-x^2+1}{x-1}$ 的值为

9. (天津市) 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 则分式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值为

10. (哈尔滨市) 已知 $a + \frac{1}{a} = 3$, 则 $a^2 + \frac{1}{a^2} =$

11. (重庆市) 已知 $x = \sqrt{2} + 1$, 则代数式: $\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-1} \div \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$ 的值等于_____.

12. (四川眉山市) 已知 $x = \frac{y+1}{y-1}$, 用含 x 的代数式表示 y 为_____.

13. (呼和浩特市) 已知 $\frac{M}{x^2-y^2} = \frac{2xy-y^2}{x^2-y^2} + \frac{x-y}{x+y}$, 则 $M =$ _____.

14. (上海市) 计算 $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2-x-6} - \frac{2x+6}{x^2-9}$

15. (山西) 先化简, 再求值: $(\frac{a-2}{a^2+2a} - \frac{a-1}{a^2+4a+4}) \div \frac{a-4}{a+2}$, 其中 a 满足 $a^2+2a-1=0$.

16. (太原市) 先化简, 再求值: $\frac{a+1}{a^2+a-2} \div (a-2+\frac{3}{a+2})$, 其中 $a = \sqrt{2}$.

17. (四川) 化简求值: $\frac{a^2-1}{a^2-5a+6} \div \frac{a^2+a-2}{a-3} - \frac{a+3}{a^2-4}$, 其中 $a = -3$.

18. (武汉市) (已知 $\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$, 求 $\frac{x-3}{2x-4} \div (\frac{5}{x-2} - x-2)$ 的值.

19. (济南市) 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 求 $\frac{x-1}{x} \cdot (1+\frac{1}{x})$ 的值.

20. (深圳市) 如果实数 a, b 满足 $(a+1)^2 = 3-3(a+1)$, $3(b+1) = 3-(b+1)^2$, 那么 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值为_____.

1.5 二次根式的意义和性质

【典型题例】

例1 (呼和浩特市) 二次根式 $\sqrt{45a}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, $\sqrt{40b^2}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{17(a^2+b^2)}$ 中的最简二次根式是_____.

思路导引: 最简二次根式必须要满足哪两个条件? $\sqrt{17(a^2+b^2)}$ 被开方数中的因数和因式各是什么? 它是不是最简二次根式?

解: $\because \sqrt{45a} = \sqrt{5 \times 3^2 a}$;

$\sqrt{54} = \sqrt{6 \times 3^2}$;

而 $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ 中被开方数是分数;

$\therefore$ 最简二次根式是 $\sqrt{17(a^2+b^2)}$.

回顾反思 $\sqrt{\frac{5}{2}}$ 和 $\sqrt{(a+b)^2}$ 都不是最简二次根式, 但 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 和 $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^4+b^4}$ 都是最简二次根式, 要注意它们的区别.

例2 (四川) 已知 $xy = 3$, 那么 $x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值是_____.

思路导引: 由 $xy = 3$, 说明 x, y 的取值正负性有何特征? x, y 是否一定同为正?

解: 原式 $= \frac{x}{|x|} \sqrt{xy} + \frac{y}{|y|} \sqrt{xy} = (\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}) \cdot \sqrt{3}$

(1) 当 $x > 0$ 时, $y > 0$

原式 $= (\frac{x}{x} + \frac{y}{y}) \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(2) 当 $x < 0$ 时, $y < 0$

原式 $= (-\frac{x}{x} - \frac{y}{y}) \cdot \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 原式的值是 $2\sqrt{3}$ 或 $(-2\sqrt{3})$.

回顾反思: 由已知只能得出 x, y 同号的结论, 因此, 必须分两种情况求结果, 即需要作分类讨论.

【创新题选】

例3 观察下列各式及其验证过程:

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2 + \frac{2}{3}}$$

验证:

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2^3}{3}} = \sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (2^2-1)+2}{1 \times 2^2-1}} = \sqrt{2 + \frac{2}{3}}$$

$$3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{3 + \frac{3}{8}}$$

验证:

$$3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3^3}{8}} = \sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 \times (3^2-1)+3}{3^2-1}} = \sqrt{3 + \frac{3}{8}}$$

(1) 按照上述两个等式及其验证过程的基本思路, 猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证;

(2) 针对上述各式反映的规律, 写出用 n (n 为任意自然数, 且 $n \geq 2$) 表示的等式, 并给出证明.

思路导引: 比较 2 和 $\frac{2}{3}$, 3 和 $\frac{3}{8}$ 中的整数 2, 3 分别与两个分数的分子有何特征, 与两个分数的分母又有何联系? 4 和 $\frac{4}{15}$ 是否具备这种特征与联系? 与自然数 n 有这种特征和联系的分式应该是什么?

解:所给式子中整数与根号内分数的特征是:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{2^2-1}, \frac{3}{8} = \frac{3}{3^2-1}$$

(1) $\frac{4}{15} = \frac{4}{4^2-1}$ 符合所给数特征

$$\text{猜想 } 4\sqrt{\frac{4}{15}} = \sqrt{4 + \frac{4}{15}}$$

$$\begin{aligned} \text{验证: } 4\sqrt{\frac{4}{15}} &= \sqrt{\frac{4^3}{15}} = \sqrt{\frac{(4^2-4)+4}{4^2-1}} \\ &= \sqrt{\frac{4 \times (4^2-1) + 4}{4^2-1}} \\ &= \sqrt{4 + \frac{4}{15}} \end{aligned}$$

$$(2) n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}} = \sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{验证: } \because n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}} &= \sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{(n^3-n)+n}{n^2-1}} \\ &= \sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}} = \sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}} \\ \therefore n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}} &= \sqrt{n + \frac{n}{n^2-1}} \end{aligned}$$

回顾反思:找出所给条件的规律,按照这种规律去猜想同样符合条件的问题应有的结果.这种方法称为类比猜想,它是由特殊情况去猜想一般情况的结果.这是数学中的一种重要的思想方法.当然,猜想的结果不一定都是正确的,必须通过验证才能给予肯定.

【试题精练】1.5

1. (河南) 下列根式: $2\sqrt{xy}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{ab}{2}}$, $\sqrt{\frac{3xy}{5}}$, $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 中,最简二次根式的个数是().

A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

2. (长沙市) 下列二次根式中,最简二次根式是().

A. $\sqrt{2x^2}$ B. $\sqrt{b^2+1}$
C. $\sqrt{4a}$ D. $\sqrt{\frac{1}{x}}$

3. (辽宁) 下列二次根式中与 $\sqrt{24}$ 是同类二次根式的是().

A. $\sqrt{18}$ B. $\sqrt{30}$ C. $\sqrt{48}$ D. $\sqrt{54}$

4. (黄冈市) 若最简二次根式 $\sqrt{1+a}$ 与 $\sqrt{4a^2-2}$ 是同类二次根式,则 a 的值为().

A. $a = 1$ 或 $-\frac{3}{4}$ B. $a = 1$
C. $a = -\frac{3}{4}$ D. 都不对

5. (武汉市) 已知 $xy < 0$, $\sqrt{x^2y}$ 化简后为

().

A. $x\sqrt{y}$ B. $-x\sqrt{y}$ C. $x\sqrt{-y}$ D. $-x\sqrt{-y}$

6. (常州市) 若 $\sqrt{(1-m)^2} = m-1$, 则 m 的取值范围是().

A. 一切实数 B. $m \leq 1$
C. $m \geq 1$ D. $m = 1$

7. (北京市顺义区) 把二次根式 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 化简后,结果正确的是().

A. $\sqrt{-a}$ B. $-\sqrt{-a}$ C. $-\sqrt{a}$ D. $\sqrt{a}$

8. (天津市) 若 $1 < x < 4$, 则化简 $\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$ 的结果是_____.

9. (山西) 若实数 a, b 满足 $(a+b-2)^2 + \sqrt{b-2a+3} = 0$, 则 $2b-a+1 =$ _____.

10. (漳州市) 当 x 满足_____的条件时,二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 在实数范围内有意义.

11. (聊城市) 若 $m - \sqrt{1-2m+m^2} = 1$, 则 m 的取值范围是().

A. $m > 1$ B. $m < 1$
C. $m \geq 1$ D. $m \leq 1$

12. (沈阳市) 对于题目“化简并求值: $\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + a^2 - 2}$, 其中 $a = \frac{1}{5}$ ”, 甲、乙两人的解答不同.

甲的解答是: $\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + a^2 - 2} = \frac{1}{a} +$

$$\sqrt{(\frac{1}{a} - a)^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - a = \frac{2}{a} - a = \frac{49}{5};$$

乙的解答是: $\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + a^2 - 2} = \frac{1}{a} +$

$$\sqrt{(a - \frac{1}{a})^2} = \frac{1}{a} + a - \frac{1}{a} = a = \frac{1}{5}.$$

谁的解答是错误的?为什么?

13. (北京市东城区) 已知正数 a 和 b , 有下列命题:
(1) 若 $a+b=2$, 则 $\sqrt{ab} \leq 1$; (2) 若 $a+b=3$, 则 $\sqrt{ab} \leq \frac{3}{2}$; (3) 若 $a+b=6$, 则 $\sqrt{ab} \leq 3$. 根据以上三个命题所提供的规律猜想: 若 $a+b=9$, 则 $\sqrt{ab} \leq$ _____.

1.6 二次根式的运算

【典型题例】

例1 (陕西) 化简: $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}$ 的结果是_____.

思路导引: 容易看出, 分子、分母的分别提出

$\sqrt{a}$, 并约分后, 其结果是 $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, 能否将分子作因式分解后与分母约分达到化简目的?

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{\sqrt{a}(a-b)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.\end{aligned}$$

回顾反思: 本题在约去 $\sqrt{a}$ 后, 是采用因式分解法化简, 如果采用分母有理化的方法, 分子分母同乘以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, 看似结果相同, 但解法不严密, 因为根据题目所给条件不能排除 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ 的可能性.

例 2 (荆门市) 计算 $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + 2 + 1 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}(\pi-1)^0 - \frac{11}{\sqrt{12}+1}$

思路导引: 先将每个加数化简, 要特别注意化简过程中概念的准确把握, 及每个加数化简后前面符号的选择.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} + 2 + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2} \times 1 - \frac{11(\sqrt{12}-1)}{(\sqrt{12}+1)(\sqrt{12}-1)} \\ &= -\frac{3}{2} + 2(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{2} - (\sqrt{12}-1) \\ &= -\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} - 2 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} + 1 = -3.\end{aligned}$$

例 3 (金华市) 已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $\frac{a^2-a+6}{a+2} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

思路导引: 本题显然采用先化简再代入求值, 但在化简 $\sqrt{(a-1)^2} = |a-1|$ 时, 如何确定 $a-1$ 的符号? 由已知是否隐含了这一条件?

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{(a+2)(a-3)}{a+2} - \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)} \\ &= (a-3) - \frac{|a-1|}{a(a-1)} \\ \because a &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \\ \therefore 0 &< a < 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= (a-3) + \frac{a-1}{a(a-1)} = (a-3) + \frac{1}{a} \\ &= (2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) = 1\end{aligned}$$

回顾反思: 本题的难点和易错点在于 $a-1$ 的正负确定, 发掘已知中的隐含条件是中考命题的热点.

【创新题选】

例 4 (桂林市) 观察下列分母有理化的计算:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} =$$

$\sqrt{4}-\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \sqrt{5}-\sqrt{4}, \dots$ 从计算结果中找出

规律, 并利用这一规律计算: $(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2001}})(\sqrt{2002}+1) =$

思路导引: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$ 等于什么? 照此规律一直加到 $\frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2001}}$ 的和是多少?

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= [(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) \\ &+ \dots + (\sqrt{2002}-\sqrt{2001})](\sqrt{2002}+1) \\ &= (\sqrt{2002}-1)(\sqrt{2002}+1) = 2002-1 = 2001\end{aligned}$$

【试题精练】1.6

- (北京市西城区) 计算 $1-2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{12}$
- (镇江市) 计算 $(\frac{1}{10})^{-1} + \sqrt{12} - \frac{2}{2-\sqrt{3}}$
- (陕西) 计算 $2^0 + 2\sin 45^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
- (泰州市) 计算 $\sqrt{(-2)^2} + 1 - \sqrt{2} + \tan 60^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

5. (河南) $(2-\sqrt{3})$ 的倒数的相反数是_____.

6. (陕西) 化简 $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}}$ 的结果是_____.

7. (聊城市) 若 $a = \frac{1}{2-\sqrt{5}}, b = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$, 则 $a+b+ab$ 的值为().

- A. $1+2\sqrt{5}$ B. $1-2\sqrt{5}$
C. -5 D. 3

8. (三明市) 计算: $[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2] \times \frac{\sqrt{ab}}{4}$

9. (辽宁) 已知 $a = \frac{1}{1-\sqrt{2}}, b = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, 求 $a^3b + ab^3$ 的值.

10. (北京市东城区) 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}, b = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2$ 的值.

11. (金华市) 已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $\frac{a^2-a+6}{a+2} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

12. (荆门市) 先化简, 再求值: $\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y} +$

$\frac{\sqrt{xy}-y}{x-\sqrt{xy}}$, 其中 $x = \sqrt{3} + 1, y = \sqrt{3} - 1$.

13. (重庆市) 先化简, 再求值: $\frac{x-y}{x+2y} \div \frac{x^2-y^2}{x^2+4xy+4y^2} - 2$, 其中 $x = 2 - \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2} - 1$.

1.7 统计初步(一)

【典型例题】

例1 (四川) 为了了解某市初三毕业生升学考试数学成绩的状况, 从参考学生中抽取了 1000 名学生的数学成绩进行统计分析, 在这个问题中, 下面说法正确的是().

- A. 总体是指该市参加数学升学考试的全体学生
- B. 个体是指 1000 名学生中的每一名学生的数学成绩
- C. 样本容量是指 1000 名学生的数学成绩
- D. 样本是指这 1000 名学生的数学升学考试成绩

思路导引: 本题考查的对象是考生还是考生的数学成绩? 样本容量是指样本中的个体数, 那么它是否有单位?

解: 本题考查对象是考生的数学成绩, 因而(A)、(B)是错误的. 又由于样本容量不应有单位, 从而否定(C), 正确答案应选(D).

反思: 明确考查对象是本题的关键.

例2 为了培养学生的环境保护意识, 某校组织课外小组对该市做空气含尘调查, 下面是一天每隔 2 小时测得的数据: 0.03, 0.04, 0.03, 0.02, 0.04, 0.01, 0.03, 0.03, 0.04, 0.05, 0.01, 0.03 (单位: 克 / 立方米)

(1) 求出这组数据的众数和中位数;

(2) 若国家环保局对大气飘尘的要求为平均值不超过每立方米 0.025 克, 问这天该城市的空气是否符合国家环保局的要求?

思路导引: 众数和中位数这两个概念的区别是什么? 从求中位数的需要和求众数的方便出发, 可以先考虑将数据作怎样的重新排列? 怎样求平均数?

解: 将这组数据按从小到大的顺序排列: 0.01, 0.01, 0.02, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.04, 0.04, 0.04, 0.05.

(1) 众数是 0.03, 中位数是 0.03

(2) $\bar{x} = \frac{1}{12} (0.01 \times 2 + 0.02 \times 1 + 0.03 \times 5 + 0.04 \times 3 + 0.05 \times 1)$
 $= 0.03 > 0.025$ (克 / 立方米)

∴ 这天该城市的空气不符合国家环保局的要求.

【创新题选】

例3 (江西) 甲、乙两同学做“投球进筐”游戏.

商定: 每人玩五局, 每局在指定线外将一个皮球投往筐中, 一次未进可再投第二次, 以此类推, 但最多只能投 6 次, 当投进后, 该局结束, 并记下投球次数; 当 6 次都未投进时, 该局也结束, 并记为“×”, 两人五局投球情况如下:

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲	5 次	×	4 次	×	1 次
乙	×	2 次	4 次	2 次	×

(1) 为了计算得分, 双方约定: 记“×”的该局得 0 分, 其他局得分的计算方法要满足两个条件: ① 投球次数越多, 得分越低; ② 得分为正数, 请你按约定的要求, 用公式、表格、语言叙述等方式, 选取其中一种写出一个将其他局的投球次数 n 换算成 M 的具体方案;

(2) 请根据上述约定和你写出的方案, 计算甲、乙两人的每局得分, 填入上面的表格中, 并从平均分的角度来判断谁投得更好.

思路导引: 满足两个条件的方案可以有多种, 如设 $M = a - n$, 其中 a 为常数, n 为投进筐的次数, 则 a 必须在什么范围取值, 才能使 $M > 0$? 如考虑用最高分 a 去除以投进筐次数的结果为得分, 又可有怎样一种换算式.

解: 有许多方案, 这里只给出三种.

解法一: (1) 取换算公式为 $M = 7 - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 6$)

(2) 填得分表:

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲得分	2	0	3	0	6
乙得分	0	5	3	5	0

$$\bar{M}_{\text{甲}} = \frac{2+0+3+0+6}{5} = \frac{11}{5} \text{ (分)},$$

$$\bar{M}_{\text{乙}} = \frac{0+5+3+5+0}{5} = \frac{13}{5} \text{ (分)}$$

∵ $\bar{M}_{\text{甲}} < \bar{M}_{\text{乙}}$ 以此方案判断, 乙投得更好.

解法二: 取 $M = \frac{60}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 6$)

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲得分	12	0	15	0	60
乙得分	0	30	15	30	0

$$\bar{M}_{\text{甲}} = \frac{12+0+15+0+60}{5} = \frac{87}{5} \text{ (分)}$$

$$\bar{M}_{\text{乙}} = \frac{0+30+15+30+0}{5} = \frac{75}{5} \text{ (分)}$$

∵ $\bar{M}_{\text{甲}} > \bar{M}_{\text{乙}}$ 以此方案判断, 甲投得更好.

解法三: 为了奖励一次投进的成功者, 计分方法按如下安排:

n(投球次数)	1	2	3	4	5	6
M(该局得分)	8	5	4	3	2	1

则得分表为:

	第一局	第二局	第三局	第四局	第五局
甲得分	2	0	3	0	8
乙得分	0	5	3	5	0

$$\bar{M}_{\text{甲}} = \frac{2+0+3+0+8}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\bar{M}_{\text{乙}} = \frac{0+5+3+5+0}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\bar{M}_{\text{甲}} = \bar{M}_{\text{乙}}$$

回顾反思:由于评价方法不同,可以有不同的评价结果,本题是结论不唯一的结论开放型试题,是中考的一种新题型.

【试题精练】1.7

1.(大连市)为了了解一批电视机的寿命,从中抽取 100 台电视机进行试验,这个问题中的样本是().

- A. 这批电视机的寿命
B. 抽取的 100 台电视机
C. 100
D. 抽取的 100 台电视机的寿命

2.(常德市)某校 12 名同学参加全国初中数学竞赛,其中 8 名男同学的平均成绩为 85 分,4 名女同学的平均成绩为 76 分,则该校 12 名同学的平均成绩为().

- A. 85 分 B. 80.5 分 C. 76 分 D. 82 分

3.(陕西)在由 CCTV-3 举办的歌唱比赛中,由 12 位评委现场给每位歌手打分,然后将去掉其中的一个最高分和一个最低分之后的其余分数的平均数作为该歌手的成绩,已知 12 位评委给某位歌手打出的分数如下:

9.6 9.2 9.4 9.3 9.7 9.6
9.2 9.3 9.2 9.5 9.4 9.5

那么这位歌手的最后得分为_____.

4.(天津市)在某次数学测验中,随机抽取了 10 份试卷,其成绩如下:

85, 81, 89, 81, 72, 82, 77, 81, 79, 83

则这组数据的众数、平均数与中位数分别为().

- A. 81, 82, 81 B. 81, 81, 76.5
C. 83, 81, 77 D. 81, 81, 81

5.(吉林)公园里有甲、乙两群游客正在做团体游戏,两群游客的年龄如下(单位:岁):

甲群:13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17

乙群:3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 54, 57

解答下列各题(直接填在横线上):

(1) 甲群游客的平均年龄是_____岁,中位数

是_____岁,众数是_____岁.

(2) 乙群游客的平均年龄是_____岁,中位数是_____岁,众数是_____岁,其中能较好反映乙群游客年龄特征的是_____.

6.(北京市海淀区)为了让人们感受丢弃塑料袋对环境造成的影响,某班环保小组的六名同学记录了自己家中一周内丢弃的塑料袋的数量,结果如下(单位:个):33, 25, 28, 26, 25, 31. 如果该班有 45 名学生,那么根据提供的数据估计本周全班同学各家总共丢弃塑料袋的数量约为().

- A. 900 个 B. 1080 个 C. 1260 个 D. 1800 个

7.(北京市顺义区)随机抽取某城市一年(以 365 天计)中的 30 天的日平均气温状况统计如下:

温度($x^{\circ}\text{C}$)	10	14	18	22	26	30	32
天数 t	3	5	5	7	6	2	2

请根据上述数据填空:

(1) 该组数据的中位数是_____ $^{\circ}\text{C}$;

(2) 该城市一年中日平均气温为 26°C 的约有_____天;

(3) 若日平均气温在 $17^{\circ}\text{C} \sim 23^{\circ}\text{C}$ 为市民“满意温度”,则该城市一年中达到市民“满意温度”的约有_____天.

8.(上海市)小李通过对某地区 1998 年至 2000 年快餐公司发展情况的调查,制成了该地区快餐公司个数情况的条形图(如图 1)和快餐公司盒饭年销量的平均数情况条形图(如图 2),利用图 1、图 2 共同提供的信息,解答下列问题:

快餐公司个数
情况图

快餐公司盒饭年销
售量平均情况图

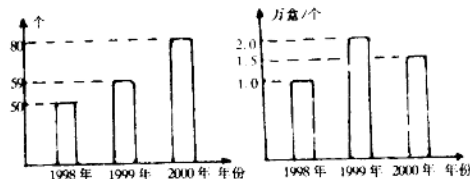


图 1

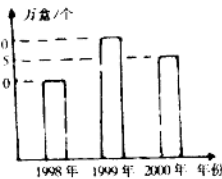


图 2

(1) 1999 年该地区销售饭盒共_____万盒.

(2) 该地区盒饭销量最大的年份是_____,这一年的年销量是_____万盒.

(3) 这三年中该地区每年平均销售盒饭多少万盒?

1.8 统计初步(二)

【典型题例】

例 1 (河南) 已知一个样本 1, 3, 2, 5, x , 它的平均数是 3, 则这个样本的标准差是_____.

思路导引:标准差与方差的区别与联系是什么?方差的公式是什么?怎样求 s ?

解:∵ 样本的平均数是 3

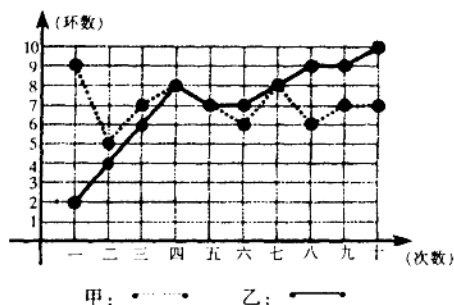
∴ 样本的和为 $5 \times 3 = 15$.

$x = 15 - (1 + 3 + 2 + 5) = 4$.

$$\begin{aligned}\therefore s^2 &= \frac{1}{5}[(1-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2] \\ &= 2\end{aligned}$$

标准差 $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}$

例 2 (河北) 如图,甲、乙两人在相同条件下各射靶 10 次,每次射靶的成绩情况如图所示.



(1) 请填写下表:

	平均数	方差	中位数	命中 9 环以上次数
甲	7	1.2		1
乙		5.4		

(2) 请从下列四个不同的角度对这次测试结果进行分析.

① 从平均数和方差相结合来看;

② 从平均数和中位数相结合看(分析谁的成绩好些);

③ 从平均数和命中 9 环以上的次数相结合看(分析谁的成绩好些);

④ 从折线图上两人射击命中环数的走势看(分析谁更有潜力).

思路导引:方差是怎样反映数据的波动大小的?平均数相同时,中位数高反映数据的集中趋势如何?

解:(1)

	平均数	方差	中位数	命中 9 环以上次数
甲	7	1.2	7	1
乙	7	5.4	7.5	3

(2) ① ∵ 平均数相同, $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$ ∴ 甲成绩比乙稳定.

② ∵ 平均数相同, 甲的中位数 < 乙的中位数 ∴ 乙的成绩比甲好些.

③ ∵ 平均数相同, 命中 9 环以上的次数甲比乙

少 ∴ 乙成绩比甲好些.

④ 甲成绩在平均数上下波动;而乙处于上升势头,从第 4 次以后就没有比甲少的情况发生,乙较有潜力.

回顾反思:学习的目的全在于应用.“统计初步”这一章的知识更要注重联系实际,理解学习的意义,提高应用的能力.

例 3

(武汉市) 武

汉市某校在

“创新素质实

践行”活动中

组织学生进

行社会调查.

并对学生的

调查报告进

行了评比.下

面是将某年

级 60 篇学生

调查报告进

行整理,分成

5 组画出的频

率分布直方

图.已知从左

至右 4 个小组

的频率分别

是 0.05, 0.15, 0.35, 0.30, 那么在这次评

比中被评为

优秀的调查

报告有(分别

大于或等于

80 分为优秀

,且分数为

整数)().

A. 18 篇 B. 24 篇

C. 25 篇 D. 27 篇

思路导引:一批数据分组后,各组的频率之和应是多少?频率与频数是怎样的关系?

解:第 5 小组的频率 = $1 - (0.05 + 0.15 + 0.35 + 0.30) = 0.15$

80 分以上的调查报告篇数是第 4、5 两小组的频率和 = $(0.30 + 0.15) \times 60 = 27$ (篇)

∴ 应选(D).

【试题精练】1.8

1.(常德市) 甲、乙两个样本,甲样本的方差是 0.4,乙样本的方差是 0.2,那么甲、乙两个样本稳定性较好的是_____.

2.(厦门市) 一个样本有 20 个数据,分组以后落在 20.5 ~ 22.5 内的频数是 4,则这一小组的频率是_____.

3.(海南) 某少年军校准备从甲、乙、丙三位同学中选择一人参加全市射击比赛.他们在选拔比赛中,射靶十次的平均环数是 $\bar{x}_{\text{甲}} = \bar{x}_{\text{乙}} = \bar{x}_{\text{丙}} = 8.3$,方差分别是 $S_{\text{甲}}^2 = 1.5, S_{\text{乙}}^2 = 2.8, S_{\text{丙}}^2 = 3.2$.那么,根据以上提供的信息,你认为应该推荐参加全市射击比赛的同学是().

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 不能确定

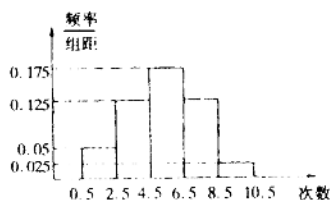
4.(荆门市) 乡镇农技站在永丰村进行某优质高产水稻品种推广实验,在秋收时对所有试验种植户开展了调查.在前 30 户中有 28 户的单位面积产量在 800kg 以上,以后每 9 户有 8 户的单位面积产量在

800kg以上,在已调查的种植户中单位面积产量在800kg以上的频率不小于0.9,试估计种植这种水稻的试验户最多有_____户.

5.(黄冈市)如图(5.4),在对某班的一次数学测验成绩进行统计分析中,各分数段的人数如图所示(分数取正整数,满分100分),请观察图形,并回答下列问题:

- (1)该班有_____名学生;
- (2)69.5 ~ 79.5 这一组的频数是_____,频率是_____;
- (3)请估算该班这次测验的平均成绩.

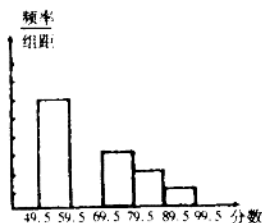
6.(徐州市)如图,为了解高中学生的体能情况,抽了100名学生进行引体向上次数测试,将所得数据整理后,画出频率分布直方图.图中从左到右依次为第1、2、3、4、5组.



- (1)第1组的频率为_____,频数为_____;
- (2)若次数在5次(含5次)以上为达标,则达标率为_____ %;
- (3)这100个数据的众数一定落在第3组吗?

7.(哈尔滨市)

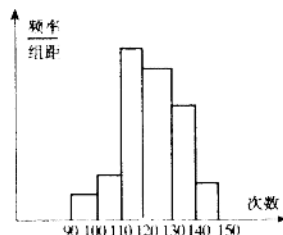
如图,在育民中学举行的电脑知识竞赛中,将初三两个班参赛学生的成绩(得分均为整数)进行整理后分成五组,绘制出如右所示的频率分布直方图.



已知图中从左到右的第一、第三、第四、第五小组的频率分别是0.30、0.15、0.10、0.05,第二小组的频数是40.

- (1)求第二小组的频率,并补全这个频率分布直方图;
- (2)求这两个班参赛的学生人数是多少;
- (3)求这两个班参赛学生的成绩的中位数应落在第几小组内?(不必说明理由)

8.(黑龙江)如图,为了了解初三毕业生的体能情况,某校抽取了一部分初三毕业生进行一分钟跳绳次数测试,将所得的数据整理后,画出频率分布直方图(如图).图中从左到右各小组的小长方形的面积之比是2:4:17:15:9:3,第二小组的频数为12.



(注:每组含最低值,不含最高值)

- (1)填空:第二小组的频率是_____,在这个问题中,样本容量是_____;
- (2)若次数在110以上(含110次)为达标,试估计该校初三毕业生的达标率约是多少?
- (3)在这次测试中,学生跳绳次数的中位数落在哪个小组内?请说明理由.

【自我测试】

一、填空题(每小题3分,共30分)

- 1.(济南市)如果数轴上的点A和B分别代表-2、1,P是到点A或者点B距离为3的点,那么所有满足条件的点P到原点的距离之和为_____.
- 2.(河南)一种电子计算机每秒可做 10^8 次计算,用科学记数法表示它工作8分钟可做_____次计算.
- 3.(哈尔滨市)单项式 $3x^{m+2}y^8$ 与 $-2x^2y^{3m+4n}$ 是同类项,则 $m+n=_____$.
- 4.(河北)分解因式: $a^2 + b^2 - 2ab - 1 = _____$.

5.(遵义市)若分式 $\frac{1-a}{(a-2)(a+3)}$ 的值等于零,则 $a=_____$.

6.(贵阳市)若 $\sqrt{(3-a)^2} = a-3$ 成立,则a的取值范围是_____.

7.(辽宁)计算 $2 + \sqrt{2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = _____$.

8.(包头市)已知 $|a| = -a$,化简 $|1-a| + \sqrt{(a-2)^2} + 2a = _____$.

9.(黑龙江)若一组数据6,7,5,6,x,1的平均数是5,则这组数据的众数是_____.

10.(辽宁)为了考察一个养鸡场里鸡的生长情况,从中抽取5只,称得它们的重量如下(单位:千克):3.0 3.4 3.1 3.3 3.2,在这个问题中,样本方差 $S^2 = _____$.

二、选择题(每小题3分,共18分)

- 11.(盐城市)已知 $a = 2^2$, $b = (\sqrt{3}-1)^0$, $c = (-1)^3$,则a、b、c的大小关系是().
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
C. $c > a > b$ D. $b > c > a$
- 12.(重庆市)若 $(a^{m+1}b^{n+2}) \cdot (a^{2n-1}b^{2m}) =$