中学数学
思想方法初论

ZHONGXUE
SHUXUE
SIXIANGFANGFA
CHULUN

马复 著

安徽教育出版社

中学数学
思想方法初论

马复 著

出版社
中学数学思想方法初论
安徽教育出版社
中学数学思想方法初论
安徽教育出版社
中学数学思想方法初

（皖）新登字03号

中学数学思想方法初论

马复　　著

安徽教育出版社出版

（合肥市金寨路283号）

新华书店经销　　　六安新华印刷厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张8.5　　字数150000

1993年9月第1版　　1993年9月第1次印刷

印数　1,500

ISBN7-5336-1234-5/G·1676

定价：4.80元

前　言

从教育的角度来看，数学知识不仅仅指它所包含的数学内容，如概、念定、理公式、法则等等，还表示由这些内容所反映出来的数学思想方法。这一认识对于中学数学教学改革来说，意义十分重大，它将导致对“传授知识”这一传统教学目标的深化认识，也将使“培养能力”这一现代教学任务赋予具体的内涵，还将影响到课堂教学的实际过程。一句话，它所产生的乃是观念上的更新。事实上，这也是促使我们撰写此书的重要原因。

数学思想方法在数学教育活动中究竟占有什么样的地位，这一点，正如米山国藏所指出的：科学工作者所需的数学知识，相对地说是不够的，而数学的精神、思想与方法却是绝对必需的；数学知识可以记忆一时，但数学精神、思想与方法却永远发挥作用，可以受益终生，是数学能力之所在，是数学教育根本目的之所在。无论对于科学工作者，技术人员，还是数学教育工作者，最重要的就是数学的精神、思想和方法，而数学知识（指数学内容——引者注）只是第二位的。

本书着重探讨的正是中学数学内容所反映出来的重要数学思想方法，以及它的教育意义，之所以冠以“中学数学思想方法初论”乃是出于论述的出发点在于中学数学内容，关注的主要范围在于中学教学活动的缘故、事实上，中学数学思想方法与数学思想方法之间并没有一条经渭分明的鸿沟。两者是相通

的：一方面，高等数学，乃致于近现代数学里的许多思想方法源于相应的中学数学，如群论的思想方法源于代数方程的求解；测度的概念与方法可说是萌芽于长度、面积与体积等内容；另一方面，许多中学数学问题的彻底解决又依赖于高等数学，现代数学的思想方法之运用，如复数能否比较大小，自然数的理论基础是什么等等。而高度形式化的“关系映射反演”方法（即RMI原则）对中学数学研究所起的指导性作用，更是具有重大的意义。

撰写本书的另一个重要原因乃是基于对高等师范院校数学教育改革的思考。为了适应与促进中小学数学教育的改革，更好地发挥师范教育在普通教育中的“母体”作用。应当建立高等师范数学教育专业课程体系，而“中学数学思想方法初论”应当列入这一课程体系。因为师范生（未来的数学教师）们能否认识到数学思想方法的含义、意义和作用，将在很大程度上影响到中小学数学教学的改革。

本书分上、中、下三篇。其目的乃是为了论述的需要和阅读的方便。上篇着重从理论上探讨中学数学思想方法的有关问题，并阐述了它在中学数学教学活动中的作用。其中，有许多观点是作者本人的。中篇则有选择地列举了解决数学问题中常用的数学思想方法。下篇是从数学活动形式、过程的分析，来阐述如何综合运用不同的数学思想方法从去事数学活动。因为每一个稍许复杂一些的数学活动过程中，都有着不同的数学思想方法在起作用，至多在不同的阶段，由不同的数学思想方法起主要作用而已。因而，从实际运用的角度来看，中、下篇的作用也是不同的。

本书的主要读者为在职的中学数学教师和师范学校（含教

育学院）的数学系学生。部分内容也可为程度较好的中学生阅读。

在本书的撰写过程中，引用了许多学者们的研究成果。主要参考书目中只列举了其中一部分，其余参考资料恕不一一列举，在此谨表谢意。

作为一种探索，本书难免有不妥之处，恳请专家、学者、同仁们不吝赐教。

作　者

1992年3月30日

目　录

上篇　数学思想方法概论

“只要文明不断进步，在下一个两千年里，人类思想中压倒一切的新事物，将是数学智慧的统治。” A·N·怀特海的大胆预言，已为社会的发展，科学的进步所证实。今天，数学是科学、数学是文化、数学是一切科学的基础，已为世人公认。数学的影响已遍及文明社会的每一个方方面面。乃至于“数学的发展与至善和国家的繁荣昌盛密切相关”（拿破仑语）。

数学的应用，通常表现在两个方面，一是数学知识的应用，这一点，自数学诞生之日起，就逐渐显露出来(事实上，这也是数学得以迅速发展的重要原因之一）。到今天，已大有“没有现代的数学就不会有现代的文明。没有现代数学的文化是注定要衰落的”。（齐民友）之势；再就是数学思想方法的应用。与数学知识的应用不同，它以一种潜移默化的形式，作用于人的思维，反映到人的思维活动之中，不仅在数学以外的世界有着众多的应用，更重要的是在数学内部世界所产生的巨大作用。正如数学家赫巴特所说：“数学一般通过直接激发创造精神和活跃思维的方式来提供其最佳服务。”

为了更好地探讨中学数学思想方法，有必要先从宏观的角度对数学思想方法作一些概要的阐述，这就是上篇的主要内容。

第一章 什么是数学思想方法

作为一个名词，“数学思想方法”已经广泛地出现在各种书籍与文章中；作为一个概念，它也被广泛地应用于不同的场合，其内涵十分丰富。若欲以定义的形式对其加以定型、限制目前还有些困难，但这决非意味着“数学思想方法”的含义不明，更多地是由于随着数学自身的发展，数学应用的不断扩大，“数学思想方法”的内容、形式、意义都在不断地得到充实，当然，部分原因也在于对它所做的系统研究不够。

究竟什么是数学思想方法？我们将通过对以下几个问题的探讨，阐述我们的认识。

1.1 数学思想方法的含义

一般说来，思想方法可以视作“观点”、“途径”、“手段”，乃至于“工具”——智力活动的工具。其作用在于认识、处理不同的对象，解决不同的问题。因此，可以从其作用的范围去描述数学思想方法的含义。

若把数学思想方法的作用范围考虑为数学以外的世界——自然科学、社会科学、乃至于人类社会各个方面，则数学思想方法的含义可以是：**在研究各种非数学现象，或者解决各种非数学问题的过程中，所运用的数学思维方法、数学知识，以及各种数学理论。**

例1.1 海王星的发现。

19世纪中叶，天文学家阿达姆斯和勒维雷在分析了天王星运动的不规律现象时，运用力学以及数学理论，推断出尚有一颗新的行星在影响着天王星的运动，并运用微分方程推算出这颗行星应处的位置。最终，观察员果然从他们所指出的位置上看到了这颗星。

若把数学思想方法的作用置于数学本身，则数学思想方法的含义可以是：在各种数学活动——定义概念、选择方法、形成猜想、论证命题等过程中，所表现出来的种种观念，思维方式，技能与技巧等，以及在认识论与方法论意义下对于数学的整体认识。

例1.2 函数概念的定义。

自17世纪以来，“函数”一直是数学研究的重要对象，其定义更是随着人们对它，以及整个数学认识的深化而不断地发展：从变量、表示方法，到对应关系，乃至于今天的广义函数，每一种定义的出现，都蕴含着当时人们对于数学，对于定义对象（函数）本身的认识，也体现人们的思维方式。

有许多重要的数学思想方法，在数学的内部，外部都有着极重要的作用.例如：

为了研究椭圆的性质，数学家运用压缩变换的方法，将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ 沿坐标轴方向按压缩系数 $\mu=a:b$ 压缩成圆：$x^2+y^2=a^2$。于是，运用压缩变换的性质，对椭圆的研究便转为对圆的研究。例如：求解椭扇形面积；证

明阿普罗尼奥斯的两大定理：椭圆的任一对共轭半径的长的平方和为常数（a^2+b^2）； 以椭圆的一对共轭直径为对角线的平行四边形，其面积为常数（$2ab$）.（这两大定理的证明在一般解析几何教程中都可以看到，但很繁，而用压缩变换将椭圆压缩成圆以后，将有简洁的证明出现）. 这种特殊的压缩变换方法所获得的对圆的运用方法，可简称为“参考圆”的方法.

天文学家运用参考圆的方法，获得了有名的刻卜勒方程：

设行星绕太阳（F）作椭圆运动，P为t时刻行星所在位置.A是近日点，行星过A点的时刻为t_0，为了确定P的位置，只要求出t时刻P点的离心角φ值. 而这只要依据“行星绕太阳作椭圆运动时，相等时间内所扫过的面积相等”，再利用参考圆的方法，便可获得有名的刻卜勒方程：

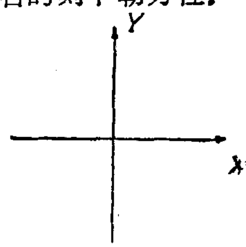

图1-1

$$\varphi - e\sin\varphi = n\,(t - t_0) \qquad (e=\frac{c}{a},\ n=\frac{2\pi}{T}\text{平均角速度，}$$

均为已知）

物理学家则更巧妙地运用了参考圆方法. 物理学家在掌握等速圆周运动规律之后，进一步研究简谐运动，其选用的数学方法便是参考圆的方法：它使得相对而言复杂的简谐运动，转变为相应的圆周运动.

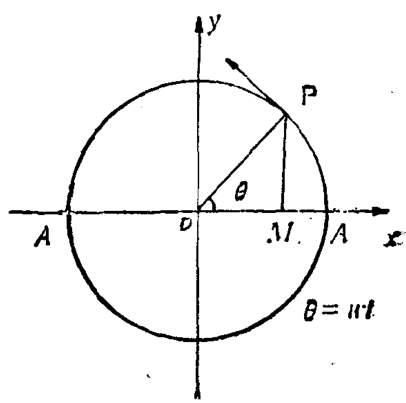

图1-2

当质点在线段$A'A$上做往返振动时，如果加速度a具备

特征：$a=-cx$（$c>0$为常数），则称质点M作简谐运动（图1-2）。

而当质点P在以$A'A$为直径$2r$的圆上作等速圆周运动时，其向心加速度为$r\omega^2$（ω为角速度）。因此，P点在x轴上投影点M的运动加速度$a=-r\omega^2\cos\omega t$。即：$a=-\omega^2 x$（$x=r\cos\omega t$），此式表明M在作简谐运动。这表明质点P作等速圆周运动时，它在直径上的投影恰为简谐运动。于是，直线上的简谐运动便与等速圆周运动挂上了钩。这也说明，源出于压缩变换得来的参考圆方法已超出椭圆运用的范围。

本书所探讨的主要是作用于数学本身的思想方法。自然，客观上，许多数学思想方法不仅仅适用对数学自身的研究，也适用于数学以外的世界。尤其是当我们从哲学意义上去探讨它们时，这种现象就显得是必然的了。因此，论述过程中不可避免地会涉及到一些“非数学”问题，对它们的探讨有时会使某些数学思想方法的本质更为明朗化。

1.2 思想与方法的区别

严格说来，“数学思想方法”这一概念本身包含有两个范畴：“数学思想”与“数学方法”。尽管人们常常对此不加区分。

通常，数学思想既牵涉到认识论方面的内容，又涉及到方法论方面的内容。即，它表现出：对数学科学的看法——数学的对象、内容、基础、意义、真理性及特点都是哪些；对数学与外部世界关系的看法——数学科学发展的实践动力与实际应用如何；对数学认识过程的看法——其认识对象、认识途径与

认识方法等。同时，数学思想还表现出对于处理数学现象与数学问题的意识、策略和指向。

数学方法则主要牵涉到方法论方面的内容。它包括：加工、处理、表示某种科学对象或形式的手法；为实现某个预期目的的具体途径、手段。

它们都是人类思维的结晶，都以一定的原型——具体的问题、范例或活动过程作为形成与发展的背景。

相比较而言，数学思想更具有着普适性与可创造性，其理论的味道更浓一些；数学方法则表现出更多的可操作性与程序性，实践的味道更浓一些。

数学方法经常表现为实现某种数学思想的手段；对于方法的有意识选择，往往体现出对于某种数学思想的自觉运用与理解深度。同样，对于多种数学方法的反复与熟练应用，往往有助于形成数学思想，其关系颇似“源与流”的关系。

例1.3 整体思想与曲线系方法、基本量方法。

整体思想是近、现代数学的一个重要的基本思想。其基本观点是：数学科学是一个有机的整体，而非一些似乎没有什么关系的数学片断凑合而成的。正如M·克莱茵所说的：“虽然数学大树已经伸张出成百的分支，它毕竟是一个整体，并且有它自己的重大问题和目标。”近年来，法国布尔巴基学派的“结构”观点与论说证明了这一点。同时，整体思想对于数学活动表现出“全景式”的认识：数学活动并不只是结果，还具有活动的起因、过程与方法。这一点，对于数学教学有着极重要的指导性意义。

若将整体思想施用于问题解决过程之中，则会产生由于研

究对象不同而显示出来的不同表现形式；

曲线系方法就是整体思想在解析几何中的直接运用：一个待求的数学对象（曲线方程）并非是孤立体，而是存在于某个集合（曲线系）之中，一旦我们确认了这个集合，便可以利用问题中所给的条件，求出所需的解答。

基本量方法也是如此：由于一个数学对象由一定的基本元素及其联结方式所确定，一旦搞清楚了这些基本元素与基本联结方式，问题也就明朗多了，也许解题思路也就有了。（详见本书中篇）。

尽管有着这样或那样的区别、差异，但更多的则是两者之间密不可分的联系。在多数情况下，"方法"只是"思想"的具体表现，而"思想"的阐述与运用更是离不开方法，尤其在本书所探讨的范围之内。因此，除非特殊需要，我们以后将"数学思想"与"数学方法"仍合称为"数学思想方法"。

1.3 数学思想方法的内容

虽然目前对于数学思想方法还没有一个公认的确切定义，但是，我们仍然要谈论它，研究它，而且还要尽可能地去应用它。因此，首先需要探讨的问题是：数学思想方法究竟包含哪些内容？根据我们在1.1中对数学思想方法含义的理解，我们认为，数学思想方法藏身于各种数学活动过程之中，以数学语言符号为其外壳，以数学知识为其载体。因而，我们应当在数学活动过程之中，在数学知识系统的形成与完善过程之中，去探寻数学思想方法的内容。下面，我们将通过对几种主要数学活动形式的剖析，如表述问题、定义概念、形成定理、研究方法，

以及对数学理论发展过程的某些回顾，去阐述数学思想方法的内容.主要的方法乃是对某些实例的研究.

例1.4 重新表述问题.

研究一个数学问题，或者数学对象，首先需要弄清楚的是这个问题（对象）的含义. 自然，问题原先的叙述通常表明了它的含义，然而，若单纯凭借已给出的表述去求解这个问题，往往不是很容易的，对一些复杂的问题而言，更是如此. 这大都由于已给的表述通常有意或无意地掩去了某些关键性，或者本质性的信息. 因此，重新表述问题就成为一个基本而又重要的活动形式.

问题 1 给你两只水桶，容量分别为11千克、7千克，设法在河中取出2千克的水.

这显然是一个“人为”的智力问题，要想完成这个任务（获得解），必须且只须反复做一些“取水与倒水”的动作，关键在于怎样做. 当然，我们不必真的去取两只水桶，只需“纸上谈兵”：将两只水桶冠以A(11千克容量)、B(7千克容量)名称. 我们所能得到的千克数有哪些？11、7，还有4——提取一A桶水，倒入B桶中，注满B桶后，则A桶剩下$11-7=4$（千克）水；进一步，我们还可以得到8——将A桶中4千克水倒入B桶（事先将B桶出空），再提取一A桶水倒注B桶，注满后，A桶中剩下$11-(7-4)=8$（千克）水，如此等等. 这些“动作”表明，我们所能做的就是：

提取一桶水——倒出一桶水——再提取一桶水——倒出一桶水——……

于是可以规定：提取水的千克数记为正，倒出水的千克数记为