中学数学解题方法

（解析几何部分）

谭光宙　丁家泰　安书田

北京师范大学出版社

中学数学解题方法
（解析几何部分）
谭光宙　丁家泰　安书田
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
重庆新华印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：8.375　字数：173千
1986年10月第1版　1986年10月第1次印刷
印数：1—20,000
统一书号：7243·417　定价：1.25元

内容简介

本书是根据《中学数学教学大纲》和中学教材的要求而编写的。它以阐述逻辑思维，探讨解题规律，总结解题方法以及技能技巧为目的，按照知识的内在联系分类并通过一定数量的各种例题系统地介绍解析几何的解题方法，同时尽可能采用多种解法，借以启迪思维，提高解题能力。

本书可供中学生、中学数学教师、自学青年作参考书。

前　言

在多年的教学实践中，我们深感，学会思考数学问题的方法和掌握解题的一些技能技巧是教师教好数学、学生学好数学的重要因素。为了帮助高、初中学生，自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧；我们特根据《中学数学教学大纲》和现行中学数学教材，以阐述逻辑思维、总结中学数学的解题方法与技巧为主，以例题的形式说明方法与技巧的应用为辅编写了这套《中学数学解题方法》。

本书由谭光宙、丁家泰会同郁华、张乃凡、郑连德、安书田、赵素兰、张士清、张德平等同志编写（“解析几何部分”主要是根据安书田的手稿改编的）。

本书稿曾请我们的老师——北京师范大学数学系蒋铎等先生详细审阅，对此我们表示衷心的感谢。

在编写过程中，我们还曾得到曹德荣、孙国辉等同志的热情支持和帮助，在此表示谢意。

限于我们的水平，书中谬误一定不少，希广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章 绪 言

一、概 述

“问题是数学的心脏．”如何提出问题并解决问题，成为推动数学发展的动力．理解、掌握基本概念和基本定理，是解决数学问题的前提，灵活运用基本概念和基本理论，迅速准确处理数学问题的能力是衡量掌握数学知识的一个重要标志．“欲善其事，必先利其器．”在熟练掌握基本概念基本理论的基础上，我们必须而且也应该探讨解题规律，总结解题方法，以便提高分析问题和解决问题的能力．这正是本书的编写目的．把解析几何所遇到的，解决各类问题的一般的，常用的和行之有效的各种方法、整理、辑纳于此，仅供教师与学生参考．

解析几何又称坐标几何．它是用代数方法研究几何问题的一门学科．在解析几何里，几何概念可用代数方法表示，要解决的几何问题可通过代数运算来达到；反之，代数的概念又得到了直观的几何解释，这样加深了我们对代数概念的理解．

解析几何研究问题的一般步骤：首先提出几何问题，以适当的坐标系为桥梁，根据形数结合的对应法则，把几何问题“翻译”成代数问题，然后通过代数运算，得到代数结果，再把代数结果“翻译”为几何结果，以达到我们要解决的几何

问题的目的。

解析几何研究的两个基本课题：

（1）已知曲线求方程；

（2）已知方程求曲线。

围绕上述两个基本课题，解析几何问题大致分为以下四点：

1．已知曲线（点的轨迹）求方程；

2．已知曲线方程求曲线；

3．点与曲线或曲线与曲线的位置关系；

4．用解析法证平面几何问题。

本书共分六章：第一章介绍解析几何中常用的基本技巧；第二、三、四、六章，详细探讨了上述四类问题的各种方法；第五章中总结、归纳了解析几何中使用的一般技巧。

二、基本技巧

（一） 适当选择坐标系

如题设中未给坐标系，我们可以人为地选择合适的坐标系。选取的总原则是：易于计算而缩短推导过程；计算结果能得到标准方程；一般选取直角坐标系；倘给出的一些点的几何条件与一定直线夹角有关或绕定点旋转时，通常建立极坐标系较为方便。一般有下列五种情况：

（1）选择图形中一个特殊点为原点。如定线段的中点或端点；中心对称图形的中心；抛物线的顶点，多边形的一个顶点……目的是使这点的纵坐标与横坐标均为零。

（2）选取图形中的一条定直线为x轴或y轴。如定直线、

轴对称图形的对称轴、角平分线、多边形的边……目的是使这些直线上的点的纵坐标或横坐标为零。

（3）如果图形是三角形，又涉及到点至三角形三边之距离时，往往把坐标系的原点建立在三角形的内部，这样便于处理距离公式中的符号。

（4）如果图形中有两个不同的圆，这时选取一个圆的圆心为原点，连心线为x轴或y轴，使圆的方程比较简单。

（5）如果证明具有一般性质的公式时，有时我们有意对曲线（或图形）上的点，在建立坐标系时，不作任何特殊的选择，使各点处于完全平等的地位，以使点或线的解析表达式具有非常明显的轮换性。

上述各种方法的应用，将在本章以后的例题中随处可见。这里仅举三个例题，说明选择坐标系方法的优劣。

例 1 已知四边形一组对边平方和等于另一组对边平方和。求证：两条对角线互相垂直。

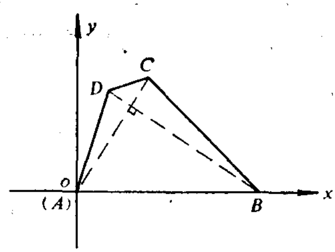

图1.1

证法一：如图 1.1 建立坐标系，各顶点依次为$A(0, 0)$，$B(a, 0)$，$C(b, c)$，$D(d, e)$。由题设$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2$，

即：$a^2+(b-d)^2+(c-e)^2=(a-b)^2+c^2+d^2+e^2$。化简后，得：

$$ce=-b(d-a). \qquad ①$$

又∵ $K_{AC}\cdot K_{BD}=\dfrac{c-0}{b-0}\cdot\dfrac{e-0}{d-a}=\dfrac{ce}{b(d-a)}$， ②

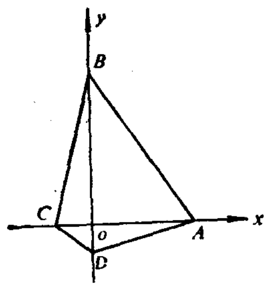

图1.2

将①代入②，得$K_{AC}\cdot K_{BD}=-1$，所以$AC\perp BD$

证法二：如图1.2建立坐标系，可选择A，B，C三点分别在坐标轴上，各点依次为$A(a,0)$，$B(0,b)$，$C(c,0)$，$D(d,e)$。

由题设可知：$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2$，则有

$a^2+b^2+(c-d)^2+e^2=b^2+c^2+(a-d)^2+e^2$。化简，得 $(a-c)d=0$ $\because$ $a\neq c$，$\therefore$ $d=0$，即D点在y轴上，因此，$AC\perp BD$。

证法三：设A，B，C，D坐标依次为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，(x_4,y_4)，按前面证明过程一样可以证明命题成立（略）。

注：纵观此题三种证法，证法二简捷、明瞭，证法一稍繁，证法三麻烦。

例2 求过一定点且和定圆相切的动圆圆心的轨迹的方程。

解法一：设定点为F_2，定圆心为F_1，$|F_1F_2|=2c$，半径为R；以F_1F_2为x轴，F_1F_2的中垂线为y轴，F_1F_2中点为坐标原点o，如图1.3，图1.4，图1.5建立坐标系。则F_1，F_2坐标为$(-c,0)$，$(c,0)$，动圆圆心为$P(x,y)$。

由两圆内、外切的性质，

得：$|F_1P|=||F_2P|\pm R|$，

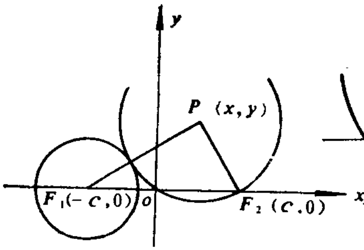

图1.3

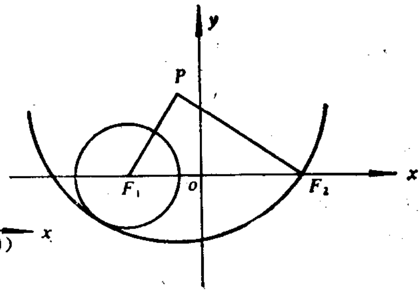

图1.4

代入各点坐标，有：$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm R|$，化简后方程变为：

$$4(R^2-4c^2)x^2+4R^2y^2=R^2(R^2-4c^2) \qquad ①$$

讨论①，$R^2=4c^2$时，即$R=2c$，

亦即定点F_2在圆上时，如 图1.6，轨迹为$y=0$。是除掉定点F^2的x轴。

$R>2c$时，即定点在圆内，动圆仅与定圆内切时，如图1.5，①化成

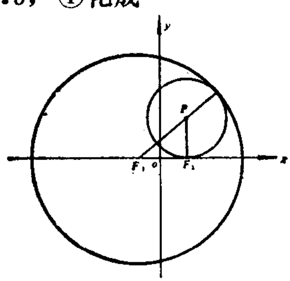

图1.5

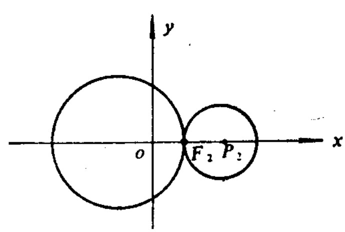

图1.6

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{R^2-4c^2}{4}}=1 \qquad ②$$

此方程表示椭圆．而②在 $R<2c$ 时，即定点在圆外时，②改写成：

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\frac{4c^2-R^2}{4}}=1$$ ，轨迹是双曲线．事实上，动圆与定圆外切时，轨迹为双曲线②右半支；动圆与定圆内切时，轨迹为双曲线②左半支．如图1.3，图1.4．

解法二：以定圆圆心为原点 $o(0,\ 0)$，定点为 $A(a,\ 0)$，如图1.7建立坐标系，与解法一同理可得 P 点轨迹方程：

$$4(R^2-a^2)x^2+4R^2y^2-4a(R^2-a^2)x-(R^2-a^2)^2=0 \quad ③$$

解法三：以定圆圆心为原点 $o(0,\ 0)$，定点为 $A(a,\ b)$，如图1.8建立坐标系，与解法一同理可得 P 点轨迹方程：

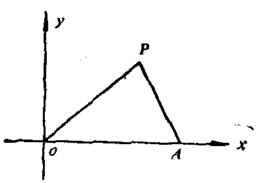

图1.7

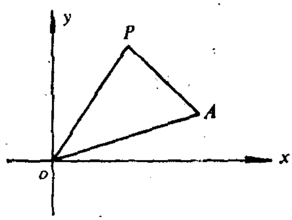

图1.8

$$4(R^2-a^2)x^2+4(R^2-b^2)y^2-8abxy-4a(R^2-a^2-b^2)x-4b(R^2-a^2-b^2)y-(R^2-a^2-b^2)^2=0, \quad ④$$

注：上述②，③，④式均是 P 点 轨迹方程，但②式简单明瞭，一望即知；而 ③ ④ 繁锁冗长，且无法马上 判定曲线之类型．解法 ② ③ 之推导过程也较解法① 繁难，造成这种差别的主要原因是坐标系 选择不当．

例 3 求证：平面上三点共线的充要条件是以三点顺次横标、纵标为两列，以 1 作元素为第三列的三阶行列式为零。

证明：(1) 预备知识：设在某一直角坐标系下，三点为 $P_i(x_i, y_i)$，$(i=1, 2, 3)$，由线性方程组理论知，三元齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1A+y_1B+C=0, \\ x_2A+y_2B+C=0, \\ x_3A+y_3B+C=0. \end{cases} \qquad ①$$

有非零解 A，B，C 之充要条件，是系数行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad ②$$

下面证明本题

(2) 先证必要性。

若点 (x_i, y_i) $(i=1, 2, 3)$ 共线，则三点均在某直线 $Ax+By+C=0$ 上，$(A^2+B^2>0)$ 即三点坐标满足齐次方程组①，立即得②式成立。

(3) 再证充分性。

若三点坐标满足②式，那么线性齐次方程①一定有非零解：A，B，C，若 $A^2+B^2=0$，则 $A=B=0$ 代入①式，必有 $C=0$。因此，这组非零解中，A，B 必不同时为零，这就说明，$Ax+By+C=0$ 是平面上一条直线。三点 (x_i, y_i) $(i=1, 2, 3)$ 均满足①式，即三点共线。

由(2)，(3)就证明了本题。

注：本题证明直接应用了线性方程组理论，而点的坐标未作任何特殊选择，使公式②具有明显的轮换性，这样既

便于记忆，也便于应用．倘作特殊选择，反而失去了公式②的优点．因此，在选择坐标系时，如果为了使公式具有普遍性，或者证明过程复杂，中间过程雷同，一般对坐标系及点的坐标，不作任何特殊选择．

（二）适当地使用曲线的各种方程

每种曲线都有几种形式的方程，如普通方程、标准方程、参数方程、极坐标方程，特别是直线方程，形式更是多种多样．如何根据所给条件，恰当地选择使用曲线方程，也是我们处理解析几何问题的一个重要技巧．

1．直线方程的选择

我们知道，只要有两个独立的条件，就可确定直线方程．一般，已知直线上两点，用两点式（两点连线平行于坐标轴时除外）；已知直线上一点及斜率（或已知倾斜角，但不为$\frac{\pi}{2}$），用点斜式；不管倾角为何值，均可用参数式；已知斜率及在y轴上的截距，用斜截式；已知直线在x、y轴上的非零截距（或求与坐标轴围成的面积时），用截距式；研究时涉及讨论平面上任意一条直线，则用一般式；欲求点到直线的距离时（或已知法线的倾斜角及原点到直线的距离时），用法线式；求直线与其它曲线之交点，用一般式或斜截式、参数式，但直线与曲线相交，求交点与一定点的距离时，最好用参数式．

2．圆的方程的选取

已知圆的三个独立条件，可求圆的方程．已知圆心及半径，或者圆心及圆的一条切线，用圆的标准方程；求圆的切线时，一般用圆的标准方程，圆心不在原点时，可平移坐标

系；求过不共线三点的圆的方程，用圆的一般方程；圆在直线上或在另一圆上滚动，求动圆面上某点轨迹时，一般用圆的参数方程.

3. 抛物线方程的选取

已知焦点及准线求抛物线方程，应用标准方程或其它三种变形(注意保持焦参数始终为正值)；如果已知抛物线对称轴平行于y轴，可用二次函数式$y=ax^2+bx+c$；已知离心率及焦参数，可用极坐标方程；求抛物线与其它二次曲线交点，既可用标准方程，亦可用参数方程. 最后这种情况举例如下：

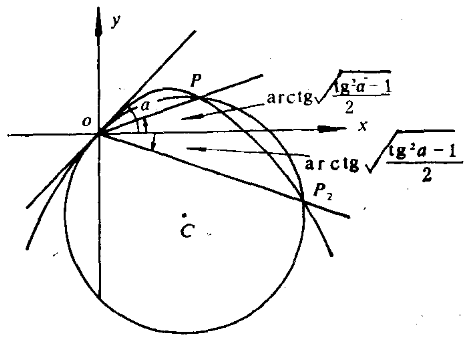

图1.9

例 4 求抛物线①与圆②之交点；见图1.9

$$\begin{cases} y=x\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{x^2}{4\cos^3\alpha} & ① \\ (x-\sin\alpha)^2+(y+\cos\alpha)^2=1 & ② \end{cases}$$

分析： 如果把①代入②消去y，就得到一个四次方程，原则上虽然可解，但十分麻烦. 然而我们容易得到，(0, 0)是①，②之解，过原点之直线$y=tx$(t是参数，表示斜率)，代入①，②，使其变成x，t的二元方程组，若此新方程组易解，求出相应的t值，即为直线$y=tx$与二曲线之公共点.

解： 令$y=tx$，代入①，②，除去显然解(0, 0)，得：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{4\cos^3\alpha}+t-\operatorname{tg}\alpha=0 & ③\\ (1+t)^2x+2(t\cos\alpha-\sin\alpha)=0 & ④\end{cases}$$

③，④中x次数为1，欲求①，②之交点，只须求③,④之公共解即可.

由③ $x=4\cos^3\alpha(\operatorname{tg}\alpha-t)$,

由 ④ $x=\dfrac{2(\sin\alpha-t\cos\alpha)}{1+t^2}$,

$$\therefore\quad 4\cos^3\alpha(\operatorname{tg}\alpha-t)=\frac{2(\sin\alpha-t\cos\alpha)}{1+t^2}$$

化简、分解因式得：

$$(t-\operatorname{tg}\alpha)[2\cos^2\alpha(1+t^2)-1]=0,$$

$$\therefore\quad t=\operatorname{tg}\alpha\text{或}t=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{2}}.$$

以上式t值分别代入①，③，得：

$x=0$，$y=0$；或

$$x=4\cos^3\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha\mp\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{2}}\right),$$

$$y=4\cos^3\alpha\left(\pm\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{2}}-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{2}\right).$$

4．椭圆与双曲线方程的选取

椭圆与双曲线，一般使用标准方程。但有时涉及面积、距离等有关问题，用直角坐标可能出现根式时，可考虑选用参数方程；与过焦点夹角有关的问题，可考虑选用极坐标方程。

例 5 求椭圆内接矩形的最大面积

解法一：设椭圆方程为：