华北水利水电学院 规划教材

高等学校教材

机械优化设计

韩林山 主编

黄河水利出版社

高等学校教材

机械优化设计

韩林山　主编

黄 河 水 利 出 版 社

内 容 简 介

本书主要阐述机械优化设计的基本概念、理论、常用优化方法及机械优化设计实例。主要内容有:机械优化设计概论、优化设计的数学基础、一维优化方法、无约束优化方法、约束优化方法、多目标函数优化方法简介、混合离散变量的优化设计方法、机械优化设计实例及常用优化方法的FORTRAN源程序。可作为机械类或近机类专业本科生、研究生教材,也可供有关专业教师或工程技术人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械优化设计/韩林山主编 .—郑州:黄河水利出版社,2003.1

高等学校教材

ISBN 7-80621-638-3

Ⅰ.机… Ⅱ.韩… Ⅲ.机械设计:最优设计-高等学校-教材 Ⅳ.TH122

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第095365号

出 版 社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路11号　　邮政编码:450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话及传真:0371-6022620

E-mail:yrcp@public2.zz.ha.cn

承印单位:黄河水利委员会印刷厂

开本:787mm×1 092mm　1/16

印张:13

字数:300千字　　印数:1—2 100

版次:2003年1月　第1版　　印次:2003年1月第1次印刷

书号:ISBN 7-80621-638-3/TH·12　　定　价:25.00元

前　言

机械优化设计是随着电子计算机的迅速发展和广泛应用而产生的一种现代设计方法。它是以电子计算机为工具,依据最优化理论和方法,寻求机械最优化设计参数。采用优化方法设计机械产品,可以提高产品质量、节省原材料、降低成本,从而达到提高机械产品经济效益的目的。

本书是作者在多年从事优化设计教学实践基础上编写而成的,由华北水利水电学院教材建设基金资助出版。全书除绪论和附录外共有八章内容;第一章介绍机械优化设计基本概念;第二章介绍机械优化设计所涉及的数学基础知识;第三、四、五章分别介绍一维优化方法、无约束优化方法、约束优化方法;第六、七章分别介绍多目标函数优化方法、混合离散变量的优化方法;第八章介绍机械优化设计实例。附录给出常用优化方法的 FORTRAN 源程序,以便学生上机练习。在编写过程中,作者力求通俗易懂,始终贯彻“少而精”和“理论联系实际”的原则,内容编排由浅入深,注重逻辑性与系统性,强调物理概念与几何解释,便于工程应用。本书可作为机械类或近机类专业本科生、研究生教材,也可供有关专业教师或工程技术人员学习和参考。

本书由华北水利水电学院韩林山主编,华北水利水电学院武兰英、付建华、李荣喜参加编写。其中绪论、第一、四、七、八章由韩林山编写,第五章由武兰英编写,第二、三章由付建华编写,第六章、附录由李荣喜编写。

本书内容参考了大量文献资料,在此向有关作者、编者表示感谢。

西北工业大学王三民教授担任本书的主审工作,王三民教授对本书进行认真审查,并提出了一些宝贵的修改意见和建议,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中缺点、错误在所难免,恳请读者批评、指正,以便进一步提高教材质量。

编　者

2002 年 10 月

目 录

前言
绪论…………………………………………………………………………………………(1)
第一章 机械优化设计概论……………………………………………………………(4)
第一节 机械设计中的优化问题…………………………………………………(4)
第二节 机械优化设计的数学模型………………………………………………(7)
第三节 优化问题的几何描述……………………………………………………(11)
第四节 优化计算的迭代过程和终止准则………………………………………(12)
第二章 优化设计的数学基础…………………………………………………………(15)
第一节 矩阵…………………………………………………………………………(15)
第二节 向量…………………………………………………………………………(24)
第三节 多元函数……………………………………………………………………(27)
第四节 凸集、凸函数与凸规划……………………………………………………(35)
习 题…………………………………………………………………………………(38)
第三章 一维优化方法…………………………………………………………………(40)
第一节 初始单峰区间的确定……………………………………………………(41)
第二节 黄金分割法………………………………………………………………(44)
第三节 二次插值法………………………………………………………………(48)
习 题…………………………………………………………………………………(54)
第四章 无约束优化方法………………………………………………………………(55)
第一节 概述…………………………………………………………………………(55)
第二节 梯度法………………………………………………………………………(56)
第三节 牛顿法………………………………………………………………………(60)
第四节 变尺度法……………………………………………………………………(66)
第五节 坐标轮换法…………………………………………………………………(72)
第六节 共轭方向与鲍威尔法……………………………………………………(76)
习 题…………………………………………………………………………………(86)
第五章 约束优化方法…………………………………………………………………(87)
第一节 概述…………………………………………………………………………(87)
第二节 约束坐标轮换法…………………………………………………………(89)
第三节 约束随机方向搜索法……………………………………………………(92)
第四节 复合形法……………………………………………………………………(97)
第五节 惩罚函数法…………………………………………………………………(103)
第六节 内点惩罚函数法…………………………………………………………(104)

第七节　外点惩罚函数法…………………………………………………………（110）
第八节　混合惩罚函数法…………………………………………………………（117）
第九节　增广乘子法………………………………………………………………（118）
第十节　序列二次规划法…………………………………………………………（127）
习　题……………………………………………………………………………（130）
第六章　多目标函数优化方法简介……………………………………………（132）
第一节　多目标优化问题及其解…………………………………………………（132）
第二节　主要目标法………………………………………………………………（134）
第三节　统一目标法………………………………………………………………（134）
第四节　分层序列法………………………………………………………………（137）
第七章　混合离散变量的优化设计方法………………………………………（140）
第一节　概述………………………………………………………………………（140）
第二节　混合离散变量优化设计问题的数学模型及基本概念…………………（140）
第三节　离散变量的网格法………………………………………………………（143）
第四节　离散变量的组合形法……………………………………………………（144）
第五节　离散性惩罚函数法………………………………………………………（148）
第八章　机械优化设计实例……………………………………………………（153）
第一节　机械优化设计的一般步骤………………………………………………（153）
第二节　圆柱螺旋压缩弹簧的优化设计…………………………………………（155）
第三节　圆柱齿轮减速器的优化设计……………………………………………（157）
第四节　平面铰链四杆机构再现运动规律的最优化设计………………………（165）
第五节　平面铰链四杆机构再现给定轨迹的最优化设计………………………（167）
附录　常用优化方法的 FORTRAN 源程序 …………………………………（170）
附录 A　进退法确定单峰区间的源程序…………………………………………（170）
附录 B　黄金分割法(0.618 法)源程序 …………………………………………（172）
附录 C　DFP 变尺度法源程序……………………………………………………（174）
附录 D　复合形法源程序…………………………………………………………（179）
附录 E　外点惩罚函数法源程序…………………………………………………（185）
附录 F　混合惩罚函数法源程序…………………………………………………（192）
参考文献…………………………………………………………………………（202）

绪　论

优化设计是20世纪60年代初发展起来的一门新学科,也是一项新技术。它是将最优化原理和计算技术应用于设计领域,其理论基础是数学规划,所采用的工具是电子计算机。因此,优化设计可以形象地表示为:专业理论+数学规划论+电子计算机。

优化设计已广泛应用于各个工业部门。为什么人们如此重视这项新技术呢?因为"最优化"是每一个工程或产品设计者所追求的目标。任何一项工程或一个产品的设计都需要根据设计要求,合理选择设计方案,确定各种参数,以期达到最佳的设计目标,如质量轻、材料省、结构紧凑、成本低、性能好、承载能力高等。优化设计正是由于这样的需要而产生并发展起来的。利用这种新的设计方法,人们就可以从众多的设计方案中寻找出最佳的设计方案,从而大大提高设计效率和质量。

一、机械优化设计的特点

一般工程设计都有多种可行的设计方案。如何根据设计任务和要求,从众多的可行方案中,寻找一个最好的方案,即最优方案,是设计者的首要任务。要圆满完成这样困难的任务,必须掌握可靠的先进设计方法。

传统设计者采用的是经验类比的设计方法。其设计过程可概括为"设计—分析—再设计"的过程,即首先根据设计任务及要求进行调查、研究和搜集有关资料,参照相同或类比现有的、已完成的较为成熟的设计方案,凭借设计者的经验,辅以必要的分析及计算,确定一个合适的设计方案,并通过估算,初步确定有关参数;然后对初定方案进行必要的分析及校核计算;如果某些设计要求得不到满足,则可进行设计方案的修改,设计参数的调整,并再一次进行分析及校核计算,如此反复,直到获得满意的设计方案为止。显然,这个设计过程是人工试凑与类比分析的过程,不仅需要花费较多的设计时间,增长设计周期,而且只限于在少数几个候选方案中进行分析比较。

优化设计具有常规设计所不具备的一些特点。主要表现在两个方面:

(1)优化设计能使各种设计参数自动向更优的方向进行调整,直至找到一个尽可能完善的或最合适的设计方案,常规设计虽然也能找到比较合适的设计方案,但都是凭借设计人员的经验来进行的。它既不能保证设计参数一定能够向更优的方向调整,同时也不可能保证一定能找到最合适的设计方案。

(2)优化设计的手段是采用电子计算机,在较短的时间内从大量的方案中选出最优的设计方案,这是常规设计所不能相比的。

二、机械优化设计发展概况

古典的优化方法主要是应用微分法和变分法。直到20世纪40年代初,由于军事上

的需要产生了运筹学，提供了许多用古典微分法和变分法不能解决的最优化方法。50年代发展起来的数学规划理论，为优化设计奠定了理论基础。而60年代计算技术和计算机的发展，为优化设计的发展与应用提供了强有力的手段，使工程技术人员从大量繁琐的计算工作中解放出来，把主要精力转到模型的建立和优化方法的选择方面来，优化设计的应用从此得到飞速发展。

近30多年来，优化设计方法已在许多工业部门得到应用，并发挥着重要的作用，相对来讲，优化方法在机械设计中的应用稍晚一些，直到60年代后期才开始有较成功的应用，但发展却十分迅速。在机构综合，机械零部件设计，专用机械设计和工艺设计等方面都获得应用，并取得丰硕的成果。

机构运动参数的优化设计是机械优化设计中发展较早的领域，不仅研究了连杆机构、凸轮机构等再现函数和轨迹的优化设计问题，而且还提出一些标准化程序。机构动力学优化设计方面也有很大进展，如惯性力的最优平衡，主动件力矩的最小波动等的优化设计。机械零、部件的优化设计，最近20多年也有很大发展，主要是研究各种减速器的优化设计，滑动轴承和滚动轴承的优化设计以及轴、弹簧、制动器等的结构参数优化。除此之外，在机床、锻压设备、压延设备、起重运输设备，汽车等的基本参数、基本工作机构和主体结构方面也进行了优化设计工作。

近几十年来机械优化设计的应用愈来愈广，但还面临着许多问题需要解决。例如，机械产品设计中零、部件通用化、系列化和标准化，整机优化设计模型及方法的研究，机械优化设计中离散变量优化方法的研究，更为有效的优化设计方法的发掘等一系列问题，都需做较大的努力才能适应机械工业发展的需要。

近年来，发展起来的计算机辅助设计(CAD)，在引入优化设计方法后，使得在设计过程中既能够不断选择设计参数并评选出最优设计方案，又可以加快设计速度，缩短设计周期。在科学技术发展要求机械产品更新周期日益缩短的今天，把优化设计方法与计算机辅助设计结合起来，使设计过程完全自动化，已成为设计方法的一个重要发展趋势。

三、本课程的主要内容和目的

本课程研究优化方法在机械设计中的应用，即机械优化设计的有关问题。

机械优化设计包括建立优化设计的数学模型和选择恰当的优化方法及程序两方面的内容，即建立数学模型和求解数学模型两方面的内容。建立数学模型除必须遵循一定的规范外，主要依靠机械学科的专业知识，所以不是本书所能解决的。求解数学模型一靠相应的优化方法，二靠计算技术、程序软件，并一般通过计算机实现。其中计算技术、优化程序编制及计算机的使用，也由专门学科解决。所以，本课程的主要内容概括地分为优化设计的基本概念、常用优化方法和典型机械优化设计实例三大部分。具体来讲，绪论及第一章介绍机械优化设计的基本概念，第二章介绍一些与优化设计有关的数学基础知识，以便为以后各章学习打好基础。第三、四、五章分别介绍一维优化、无约束优化和约束优化的原理和算法；第六、七章简单介绍多目标函数、离散变量优化方法。第八章介绍几个机械

优化设计问题的实例,用以说明如何应用优化方法解决机械优化设计问题的过程。附录给出6个常用优化方法源程序(结构化 FORTRAN77 语言),供读者上机练习。

希望通过对本课程的学习,了解优化设计的基本概念,掌握常用优化方法的原理、算法及应用特点,初步树立正确的优化设计观点,具备处理一般机械优化设计问题的能力。

第一章　机械优化设计概论

第一节　机械设计中的优化问题

作为从事机械设计的技术人员,总希望所设计的机械产品在满足基本工作要求的前提下,尽可能取得较高的经济效益和较好的使用性能,但由于机械设计中的参数往往很多,参数之间的关系比较复杂,所以用传统的设计方法和工具往往只能获得可行方案,难以获得能实现预期目标的最优方案。但有了优化设计方法,我们就可以将许多实际的机械设计问题转化为最优化问题,从满足基本要求的可行方案中利用电子计算机自动寻找出最优设计方案。

下面用几个简单的例子来说明机械设计中的最优化问题。

一、销轴结构参数的优化设计问题

如图 1-1 所示,有一圆形等截面的销轴,一端固定在机架上,另一端作用着集中载荷 $F=10\ 000\text{N}$ 和转矩 $T=100\text{N}\cdot\text{m}$。已知销轴材料的许用弯曲应力为 $[\sigma]=120\text{MPa}$,许用扭转剪应力 $[\tau]=80\text{MPa}$,允许挠度 $[f]=0.1\text{mm}$,密度 $\rho=7.8\text{t/m}^3$,弹性模量 $E=2\times10^5$ MPa。要求在满足使用条件和结构尺寸(轴长不得小于 80mm)限制的前提下使其质量最小。

该销轴的力学模型是一个悬臂梁。它的质量计算公式为:

$$m=\frac{1}{4}\pi d^2 L\rho\times10^{-6}(\text{kg})$$

可见悬臂梁的质量取决于其直径 d 和长度 L。这是一个合理选择 d 和 L 而使质量 m 最小的优化设计问题。该设计应满足的使用条件和结构尺寸限制是:

(1)弯曲强度条件:

$$\sigma_{\max}=\frac{F\times L}{0.1d^3}\leqslant[\sigma]$$

(2)扭转强度条件:

$$\tau_{\max}=\frac{T}{0.2d^3}\leqslant[\tau]$$

(3)刚度条件:

$$f_{\max}=\frac{FL^3}{3EI}=\frac{64FL^3}{3E\pi d^4}\leqslant[f]$$

(4)销轴结构条件:

$$L\geqslant L_{\min}$$

这个问题虽不算复杂,但用常规的设计方法已很难解决。

二、齿轮副参数优化设计问题

直齿圆柱齿轮副如图 1-2 所示。设该齿轮副的传动比 $i=3.7$，主动齿轮 1 的转速 $n_1=745$ r/min，传动功率 $P=17$kW；齿轮副为单向传动，中等冲击，小齿轮材料用 40MnB，调质至平均硬度 =260HBS，大齿轮材料用 ZG35SiMn，调质至平均硬度 =225HBS；大齿轮的许用接触应力为 $[\sigma]_{H_2}=620$MPa；小齿轮许用弯曲应力为 $[\sigma]_{F_1}=169$MPa，大齿轮的许用弯曲应力 $[\sigma]_{F_2}=115$MPa。在以上条件下，设计齿轮副，使该传动副体积最小。

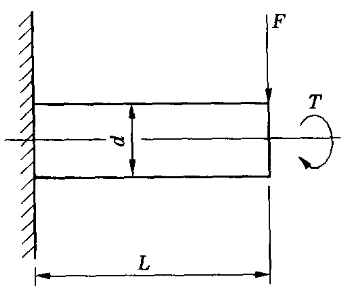

图 1-1 销轴

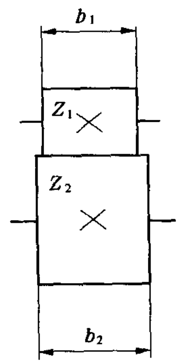

图 1-2 直齿圆柱齿轮副

圆柱齿轮的体积，可近似地看成是其分度圆面积和齿宽的乘积。即：

$$V=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4}\pi d_i^2 b_i=\frac{1}{4}\pi[(mZ_1)^2 b_1+(mZ_2)^2 b_2]$$

可见，直齿圆柱齿轮副的体积取决于模数 m、齿数 Z_1、Z_2 和齿轮宽度 b_1、b_2。由于齿轮副中 b_1、b_2 相同或相差很小，故取 $b_1=b_2=b$，而 $Z_2=iZ_1$，所以，实际决定齿轮副体积的独立参数只有 Z_1、b、m。这是一个合理选择小齿轮齿数 Z_1、模数 m 和齿轮宽度 b 而使体积 V 最小的优化设计问题。设计齿轮副必须满足的条件是：

(1)大、小齿轮满足弯曲强度要求，即：

$$[\sigma]_{F_1}-\sigma_{F_1}\geqslant 0$$

$$[\sigma]_{F_2}-\sigma_{F_2}\geqslant 0$$

(2)齿轮副满足接触强度要求，即：

$$[\sigma]_{H_2}-\sigma_H\geqslant 0$$

(3)设齿宽系数不超过 1.2，则需满足：

$$\frac{b}{d_1}-1.2\leqslant 0$$

(4)保证小齿轮不发生根切，即：

$$Z_1-17\geqslant 0$$

三、平面四连杆机构的优化设计问题

平面四连杆机构的设计主要是根据运动学的要求，确定其几何尺寸，以实现给定的运

动规律。

图 1-3 所示是一个曲柄摇杆机构。图中 l_1、l_2、l_3、l_4 分别是曲柄 AB、连杆 BC、摇杆 CD 和机架 AD 的长度。φ 是曲柄输入角，ψ_0 是摇杆输出的起始位置角。这里，规定 φ_0 为摇杆在右极限位置角 ψ_0 时的曲柄起始位置角，它们可以由 l_1、l_2、l_3 和 l_4 确定。通常规定曲柄长度 $l_1=1.0$，而在这里假定 l_4 是给定的，并设 $l_4=5.0$，所以只有 l_2 和 l_3 是设计变量。

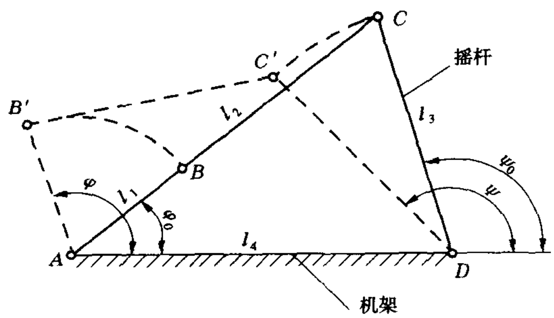

图 1-3　曲柄摇杆机构

设计时，可在给定最大和最小传动角的前提下，当曲柄从 φ_0 位置转到 $\varphi_0+90°$ 时，要求摇杆的输出角实现一个给定的运动规律 $f_0(\varphi)$。例如，要求

$$\psi = f_0(\varphi) = \psi_0 + \frac{2}{3\pi}(\varphi - \varphi_0)^2$$

对于这样的设计问题，可以取机构的期望输出角 $\psi = f_0(\varphi)$ 和实际输出角 $\psi_j = f_j(\varphi)$ 的之差平方积分最小作为目标函数，即：使 $F(X) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}[\psi - \psi_j]^2\mathrm{d}\varphi$ 最小。

当把输入角 φ 取 s 个点进行数值计算时，它可以化简为 $F(X) = f(l_3, l_4) = \sum_{i=0}^{s}[\psi_i - \psi_{ji}]^2$ 最小。

相应的约束条件有：

(1)曲柄与机架共线位置时的传动角：

最大传动角　　$\gamma_{max} \leqslant 135°$

最小传动角　　$\gamma_{min} \geqslant 45°$

对本问题可以计算出

$$\gamma_{max} = \arccos\left[\frac{l_2^2 + l_3^2 - 36}{2l_2 l_3}\right]$$

$$\gamma_{min} = \arccos\left[\frac{l_2^2 + l_3^2 - 16}{2l_2 l_3}\right]$$

(2)曲柄存在条件：

$$l_2 \geqslant l_1$$

$$l_3 \geqslant l_1$$

$$l_4 \geqslant l_1$$

$$l_2 + l_3 \geqslant l_1 + l_4$$

$$l_4 - l_1 \geqslant l_2 - l_3$$

(3)边界约束。当 $l_1=1.0$ 时，若给定 l_4，则可求出 l_2 和 l_3 的边界值。例如，当 $l_4=5.0$ 时，则有曲柄存在条件和边界值限制条件如下：

$$l_2 + l_3 - 6 \geqslant 0$$
$$4 - l_2 + l_3 \geqslant 0$$
$$1 \leqslant l_2 \leqslant 7$$
$$1 \leqslant l_3 \leqslant 7$$

从上面的例子可以看出，一个机械优化设计问题一般包括三部分内容：一是需要合理选择一组独立参数，称为设计变量；二是需要满足最佳的设计目标，这个目标是设计变量的函数，称为目标函数；三是所选取设计变量必须满足一定的限制条件，称为约束条件，这三者共同描述的优化设计问题就组成优化设计的数学模型。

第二节　机械优化设计的数学模型

优化设计的数学模型，就是描述优化问题的设计内容、变量关系、有关设计条件和优化意图的数学表达式。

建立数学模型是优化设计的基础，数学模型能否严密而准确地反映优化问题的实质，是优化设计成败的关键。

一、设计变量

机械设计的一个方案，一般可用一组参数来表示；这些参数可以是表示构件形状、大小、位置等的几何量，也可以是表示质量、速度、力、力矩等的物理量。在这些参数中，有的参数在设计前可预先给定，设计过程中保持不变，这些参数称为设计常量。如上节第一个问题中的载荷 F、密度 ρ 和材料的许用应力等。有的参数是在设计过程中待选择的量，称为设计变量。如上节第一个问题中的销轴直径 d 和长度 L，第二个问题中的模数、小齿轮齿数等。设计变量应该是互相独立的基本参数，如上节第二个问题中，由于传动比 i 为已知，而 $Z_2 = iZ_1$，故只能取 Z_1 为设计变量，而不能同时取 Z_1、Z_2 为设计变量。

在最优化问题中，设计变量的个数称为维数。只含有一个设计变量的最优化问题，称为一维最优化问题；含有 n 个设计变量的最优化问题，称为 n 维最优化问题，设计变量越多，设计自由度越大，可供选择的方案越多，但难度也越大，求解越复杂。通常按照设计变量的多少，将最优化设计问题分为三类。设计变量在 2～10 个之间为小型问题，10～50 个为中型问题，50 个以上为大型问题。实际设计中常遇到的机械优化设计问题大多数是中、小型问题。

既然设计变量是一组数，它就可以用列矩阵来表达，例如把销轴优化设计问题中的设计变量表示为：

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ L \end{bmatrix} = [d, L]^{\mathrm{T}}$$

把直齿圆柱齿轮副优化设计问题中的设计变量表示为：

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ Z_1 \\ b \end{bmatrix} = [m, Z_1, b]^{\mathrm{T}}$$

具有 n 个分量的一个向量对应着 n 维空间内的一个点，这个点可代表具有 n 个设计变量的一个设计方案，称为设计点，用符号 X 表示。设计点的集合称为设计空间。由于工程设计中的设计变量都属实数，所以称这种设计空间为实欧氏空间。若用符号 R^n 表示 n 维实欧氏空间，则可用集合概念写出：

$$X \in R^n$$

对于二维优化问题，空间 R^2 是一个平面。对于三维优化问题，R^3 就是立体空间。当维数 $n>3$ 时，就只能把 R^n 想象成一个抽象的超越空间。超越空间的每一个设计点与以 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为分量的向量 X 相对应。

一个工程设计问题，常有许多设计方案，其中有一个是最优的设计方案，对应最优设计方案的点称为最优设计点，用符号 X^* 表示，例如在第一个问题中，当销轴直径 $d=4.309\text{cm}$，长度 $L=8\text{cm}$ 时，其质量达到最小，用最优点表示的设计方案是：

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.309 \\ 8 \end{bmatrix}$$

在机械优化设计中，设计变量有连续型、整型和离散型之分。例如齿轮的齿数为整型设计变量，模数为离散型设计变量，而齿宽则可以作为连续型设计变量。一般连续型设计变量最为多见，所以，在不加特殊说明的情况下，都将设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 视为连续量。有关整型、离散型设计变量的优化方法将在第七章中讨论。

二、约束条件

设计空间虽然是所有设计方案的集合，但是这些设计方案并非都是工程实际所能接受的。例如负的面积、负的长度和设计变量不能满足设计条件的设计方案等都是不可取的。因此，在设计过程中，为了得到可行的设计方案，必须根据实际要求，对设计变量的取值加以种种限制，这些限制条件称为约束条件，或称为设计约束。根据约束条件的性质，可把设计约束分为性能约束和边界约束。由所设计的机械提出的性能方面的要求而制定的约束为性能约束。如设计变量的取值必须满足刚度、强度或运动性能的限制条件等。某些设计变量的取值范围就是边界约束，如销轴长度 L 不得小于给定值。

从另一方面讲，约束条件又可分为不等式约束和等式约束两种，其函数表达式为：

$$g_i(X) \geqslant 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

$$h_j(X) = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,p \qquad p < n$$

如销轴的扭转剪应力必须小于许用值，即 $\tau_{\max} = \dfrac{T}{0.2d^3} \leqslant [\tau]$，代入已知数值并整理得：

$$g_2(X) = x_1^3 - 6.25 \geqslant 0$$

这是一个不等式约束，也是一个性能约束。

如若要求齿轮副优化问题中的两啮合齿轮具有等弯曲强度，则可建立等式约束

$$h(X) = \frac{[\sigma]_{F_1}}{\sigma_{F_1}} - \frac{[\sigma]_{F_2}}{\sigma_{F_2}} = 0$$

式中 σ_{F_1} 和 σ_{F_2} 都是设计变量的函数。

带有设计约束的优化问题，称为约束优化问题，反之，则称为无约束优化问题。在机械设计中，绝大多数属约束优化问题。

在约束优化问题中，每一个不等式约束的极限条件 $g_i(X)=0$，在 n 维空间内形成一个 n 维“曲”面，称为约束曲面。这个曲面把空间分成两部分。一部分是 $g_i(X)>0$，另一部分是 $g_i(X)<0$。各约束曲面在 n 维空间内构成了一个区域 D，在 D 内任意点都满足 $g_i(X)\geqslant 0$ 的条件，称 D 为可行域，记作 $D=\{X \mid g_i(X)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n\}$。在可行域以外的区域称为非可行域。图 1-4 所示为二维问题的可行域。可行域内的点都是可行设计点，也称内点。内点所对应的设计方案都是可行方案。可行域外的点称为外点，因为它不能满足某些约束条件，所以外点对应的设计方案为非可行方案，即不能采用。当设计点处于某一不等式约束边界上时，称边界设计点。边界设计点属可行设计点，它是一个为该项约束所允许的极限设计方案。

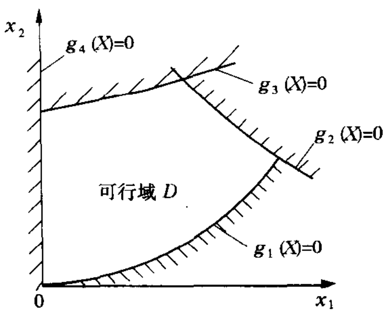

图 1-4 二维问题的可行域

三、目标函数

前已述及，一个机械设计问题，往往有许多可行设计方案。最优化的任务，就是要找出其中的最优方案。为找出最优方案，首先要确定设计所追求的目标。在机械设计中所追求的目标可以是质量最小(如上节第一个问题)，也可以是外形尺寸最小(如上节第二个问题)等。我们把选定的设计变量作为自变量，以所要追求的目标作为因变量，所建立的函数式就是目标函数。一般记为

$$F(X) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

为了方便算法的统一和后面的叙述，把优化问题归结为求目标函数极小值问题。即

$$F(X^*) = \min F(X) \quad X \in D \subset R^n$$

式中，$F(X^*)$ 为最优值。

对于某些追求目标函数极大值的问题，可把它转化为求其负值极小的问题。

在一个最优化设计问题中，若只有一个目标函数，则称为单目标函数的优化问题，如上节第一个问题只要求销轴的质量最小，它就是一个单目标函数的优化问题。若在某一设计中要求同时兼顾多个设计目标，这就构成了多目标函数的优化问题。如在上节第三个问题中，除要求输出角能最佳实现给定的输出角外，还要求具有最佳的传动角，则该问题就成为具有两个目标函数的优化问题了。

四、数学模型的表达式

设机械优化设计中有 n 个待优选的参数，即设计变量为 $X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$，要求在设计约束 $g_i(X)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m; h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p \quad p<n$ 条件下，寻找一个最优点 X^*，使目标函数 $F(X)$ 达到最小值，即 $F(X^*)=\min F(X)$，上述问题可表达为

如下数学模型：

$$
\left.\begin{aligned}
&\min F(X)\\
&X \in D \subset R^n\\
&D: g_i(X) \geqslant 0 \quad i = 1,2,\cdots,m\\
&\quad\ h_j(X) = 0 \quad j = 1,2,\cdots,p \quad p < n
\end{aligned}\right\} \tag{1-1}
$$

上述优化问题按其 $F(X)$ 与 $g_i(X)$、$h_j(X)$ 函数性质的不同分为若干类：当 $F(X)$ 和 $g_i(X)$、$h_j(X)$ 都是设计变量的线性函数时称为线性规划问题；当 $F(X)$ 或 $g_i(X)$、$h_j(X)$ 中有设计变量的非线性函数时，称为非线性规划问题。当 $m=p=0$，即约束不存在时，称为无约束规划问题。在机械优化设计中，绝大多数是有约束的非线性规划问题。

例如：极小化销轴质量的优化问题，经整理可以完整地表达为：

$$
\begin{aligned}
&\min F(X) = 6.126 \times 10^{-6} x_1^2 x_2\\
&X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}} = [d, L]^{\mathrm{T}}\\
&X \in D \subset R^2\\
&D: g_1(X) = x_1^3 - 833.3 x_2 \geqslant 0\\
&\quad\ g_2(X) = x_1^3 - 6\,250 \geqslant 0\\
&\quad\ g_3(X) = x_1^4 - 3.4 x_2^3 \geqslant 0\\
&\quad\ g_4(X) = x_2 - 80 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

这是一个具有两个设计变量、四个设计约束的非线性规划问题。

直齿圆柱齿轮副的优化设计问题经简化整理可表达为：

$$
\begin{aligned}
&\min F(X) = \frac{\pi}{4}[(x_1 x_2)^2 x_3 + (i x_1 x_2)^2 x_3]\\
&X = [m, Z_1, b]^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}\\
&X \in D \subset R^3\\
&D: g_1(X) = \frac{579.051\,6 x_2^2 - 436.002 x_2 - 110\,526}{x_1^2 x_2 x_3} + 169 \geqslant 0\\
&\quad\ g_2(X) = \frac{14.110\,33 x_2^2 - 856.464 x_2 - 184\,689.6}{x_1^2 x_2 x_3} + 115 \geqslant 0\\
&\quad\ g_3(X) = x_2 - 17 \geqslant 0\\
&\quad\ g_4(X) = -407\,963\sqrt{\frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3}} + 620 \geqslant 0\\
&\quad\ g_5(X) = 1.2 - \frac{x_3}{x_1 x_2} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

这是一个具有三个设计变量，五个设计约束的非线性规划问题。

第三节　优化问题的几何描述

用几何图形来解释非线性规划的最优化问题,可以清楚地表达出设计变量、约束条件与目标函数以及要求的最优方案之间的关系。

设有 n 个设计变量和目标函数构成一个 $n+1$ 维的坐标系。第 1 个到第 n 个坐标轴分别代表设计变量 x_1 至 x_n,而第 $n+1$ 个坐标轴代表目标函数 $F(X)$。如前述,每一个不等式约束在 n 维空间内形成一个 n 维曲面,各约束曲面在 n 维空间内构成了一个可行域 D。在可行域内每一点代表一个可行设计方案,它相应有一定的目标函数值。所有目标函数值在 $n+1$ 维坐标系内构成一个 $n+1$ 维的"曲面"。约束优化问题,就是要寻找此"曲面"上函数值为最小的点以及与该点相对应的 n 个设计变量,即在可行域内找出最优点 X^* 及其对应的目标函数最优值。

下面以 $n=2$ 的情况加以几何说明。

【例 1-1】 求二维约束非线性规划问题的最优解。其中

$$\begin{aligned}
&\min F(X) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 \\
&X \in D \subset R^2 \\
&D: g_1(X) = x_1 \geqslant 0 \\
&\quad\ \ g_2(X) = x_2 \geqslant 0 \\
&\quad\ \ g_3(X) = -x_1^2 - x_2^2 + 4 \geqslant 0
\end{aligned}$$

解:如图 1-5 所示:坐标轴 $0x_1$ 和 $0x_2$ 分别代表设计变量 x_1 和 x_2 的值,代表目标函数 $F(X)$ 值的第三个坐标轴在图中没有画出。现在我们令目标函数 $F(X)$ 的值等于一系列常数 $c_1,c_2,c_3,\cdots$,对应这些常数的设计点集合在 $x_1 0 x_2$ 坐标平面上形成了一族曲线,如图中虚线所示。每一条曲线上的各点都具有相等的目标函数值,称它们为目标函数的等值线。显然,本例中 $F(X)$ 的等值线族的方程是:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 = c_i$$

或

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = c_i$$

即该曲线族在 $x_1 0 x_2$ 平面上是以点(2,2)为圆心、以 $\sqrt{c_i}$ 为半径的一族同心圆,它是椭圆族的一个特例。

每个不等式约束方程在 $x_1 0 x_2$ 平面上为一条线,它们围成一个封闭区域,该区域内部和边界即可行域 D(不可行一侧画有阴影线)。优化问题就是要在可行域 D 内找出使目标函数值为最小的点 X^*。该问题的最优点是在不等式约束方程 $g_3(X)$ 曲线与目标函数等值线相切的切点 A,最优解为

$$X^* = [x_1^*, x_2^*]^{\mathrm{T}} = [1.414\,2, 1.414\,2]^{\mathrm{T}}$$

$$F(X^*) = 0.686\,3$$

当某个约束在最优点的值正好等于零时,则称此约束为适时约束或起作用约束,本例 $g_3(X)$ 就是一个适时约束。