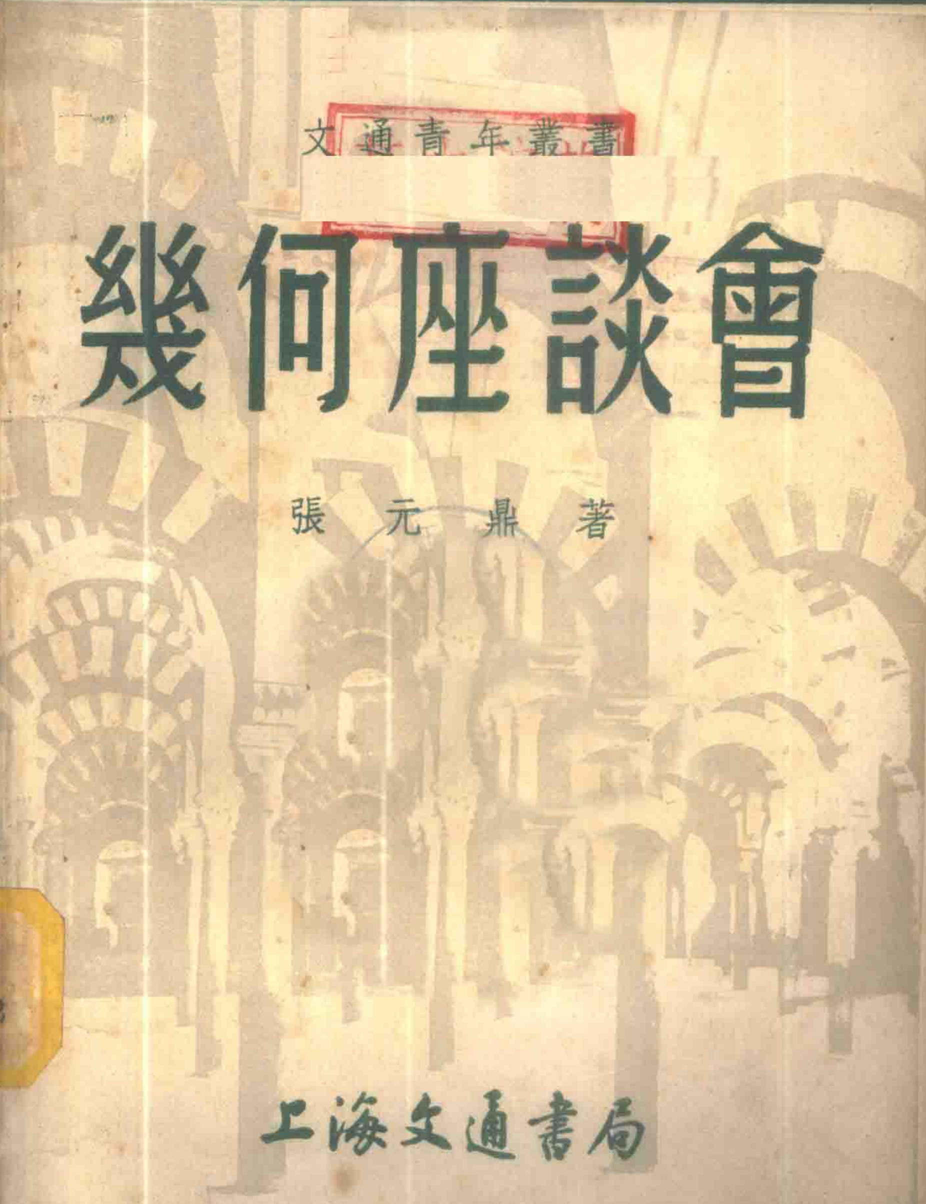
文通青年叢書

幾何座談會

張元鼎著



上海文通書局

本書內容提要

幾何是一門不易引起興趣的學科，本書用唯物觀點逐步論證，以引起讀者學習幾何的興趣。內容分爲三部：學習觀點、學習態度及學習方法，並重點提出共點線、共點圓、軌跡及作圖等方面。

序

“幾何最使我頭痛，無聊，枯燥。由初中而高中，學了又學，總引不起興趣。”這是一些同學方面的聲音。“我最怕教幾何，吃力不討好，學生一般成績差，又要貫徹思想教育，尤其難搞。”這是一些老師方面常有的說法。

怎樣改變這個情況呢？關鍵所在，是逐漸於數學教學中確立唯物觀點，正確進行思想教育。這方面，固然需要教師們的共同努力，也需要有供同學們參考研究的課外讀物。

這一本小冊子，就是基於這個目的而寫出的。約分三部：學習觀點、學習態度及學習方法。此外還着重提出共點線、共點圓、軌跡及作圖等方面。

體裁是座談方式。其所以採用這個體裁，是為了生動些，易於引起讀者興趣。作者本人還未學得好，在數學中進行思想教育，又是新的東西，錯誤一定很多的。尚希數學老師們、讀者們多多指正。

張元鼎 一九五二年一月十六日

目　　錄

幾何座談會

一　從勞動談起

何：（何先生簡稱何，以下仿此）同學們！我很高興地來參加這個座談會。大家要求通過這個會來討論我們的新課程幾何學。希望多了解一些有關這一新課程的基本特點及學習方法。尤其重要的，是想建立一些有關幾何學的正確觀點，藉使我們今後教得更好，學得更好，這是完全必要的。我將盡我的力量幫助同學，把這個會開好，並堅持下去。

丁：先從什麼是幾何學這一問題談起吧！學幾何學的目的是什麼？牠是怎樣發生與發展的呢？（很活潑愛講話的小丁第一個站起來說。）

何：請坐下，可以隨便些，不必因我是先生，而感到拘束。那麼，好了，什麼是幾何學呢？課本上雖也談到，但很不夠，還必須搞清楚。

乙：幾何學是研究圖形性質的科學，是數學的一部門，書上是這麼說的。要詳細討論，必然要牽及到研究幾何的目的性問題，特別是牠本身發生與發展的問題。我建議聯系起

來談。

戊：我看，這個問題，還是從圖形着想，圖形是不是一個獨立的東西？

乙：怎會是獨立的？形狀是附屬於物體的，難道圓會脫離一個鐵圈子而單獨存在嗎？但離開了鐵圈子，在我的概念裏，卻又有一個圓存在着，我能說出半徑、直徑等一大套東西，並且認識其他圓形的東西如面盆、飯碗等也具有相同的性質。這其間眞有點矛盾。

何：這是抽象性與現實性的矛盾。正如算術和代數一樣，數量是附屬於物體的，但又離開物體自成一個體系。這個問題，可放在稍後一點研究。現在我要問，幾何究竟是怎樣發生的？

丁：勞動創造世界，勞動創造人類，我想幾何學也不能例外。幾何這名詞的意思就是測地學，這裏面就包含着勞動。尼羅河大洪水後，土地的重行丈量，便是例證。

甲：說得很對，不單是幾何學，整個數學都是勞動所創造的。人類通過勞動，認識了世界，改變了世界。在認識和改變的過程中，首先接觸的是客觀事物的形狀及分量。測量地面，處理了土地，也同時處理和認識了形狀的性質。把這些性質系統整理之後，經過多次研究，就成爲系統的幾何學了。這大概就是幾何發展的過程。

丙：哎呀！照這麽說，聰明人創造數學是鬼話了，一些大數學家都沒有什麽貢獻了？

戊：我看，確是徹頭徹尾騙人的鬼話，幾何學絕非什麼聰明人所可以憑空臆造的。但我們並不否認一些大數學家在這方面的貢獻，因爲他們曾在研究過程中，掌握住形狀發展的規律，構成系統，促使幾何學向前發展的。

乙：我不完全同意。我們應該這樣說：幾何學的發展是決定於社會經濟制度的。生產力向前發展，對形狀性質的認識與處理，就逐步有所提高，幾何學的內容就越更豐富。所謂一些大數學家，就是在這樣發展過程中多出了一些力，多研究了一些東西，多在主觀方面努力了一些。離開了一定的社會經濟制度，數學家是不可能創造與發展幾何學的。這就說明了爲什麼要到十七、八世紀才有解析幾何學及微積分的發明。這就說明了中國較長期的封建社會，限制了在數學方面的進步。

丙：話雖如此，是不是每一個學習幾何的人都要去親自測地或做其他類似的勞動，才能學好幾何呢？

甲：學任何東西，必須聯系實際，也就是要從實際出發。雖不必每一個學習幾何的都要測地，但動動手，做做或看看模型，多觀察周圍事物的形狀，並透過這些形狀多研究一下牠們內在的關連，還是必要的。我的體驗學習就是勞動。

戊：並且，幾何學就是勞動積累的經驗。學習這些經驗，掌握這方面的理論，來處理我們現在有關形狀的問題，並在實踐中更把牠向前發展，這就是我們學習幾何的目的，不知對不對？

何：通過實踐而發見眞理，又通過實踐而證實眞理和發展眞理。從感性認識而能動地發展到理性認識，又從理性認識而能動地指導實踐。循環往覆，逐步提高，向前發展，任何科學都是這樣的。今天討論的最大收穫，就在這裏。

二 再談到矛盾

丙：從上次討論中，我明確了勞動創造了幾何，也明確了社會制度與任何科學發展的關係。特別是實踐、認識、再實踐、再認識這一循環往覆向高級發展的形式，使我明確了主客觀的相互關係。對我個人說來，這幫助實在太大了。但幾何學是研究事物形狀性質的科學，牠只研究形狀的性質，並不研究形狀所在的物體的本身，這不是又違背了聯系實際的學習方法了嗎？

戊：我也在常想這一個問題。並且，翻翻課本，在這裏面，除去較少數的具體事例外，從公理、定義等以至於各種定理，自成一個完整的體系，毫未涉及事物的本身，也好像不須要涉及事物的本身，這道理眞弄不明白。

乙：先生不是說過？這是抽象性與現實性的矛盾啊！也正是因爲這個矛盾，幾何才得到發展的啊！

丁：好了！你在搬弄“矛盾統一律”的教條了！我想，事情不會那麼簡單的，須得仔細研究一下。

甲：提到公理，我又想起一連串問題了。就是：公理是從那兒來的？能不能證明？假使不能證明，則所謂一部論理謹

嚴、處處有據的幾何學，基礎就不鞏固，豈不又是極其難解的道理嗎？

丙：還是集中一點來談我提出的問題吧！怎樣才是聯系實際？再具體一點說，就是爲什麽幾何學只研究形狀，而不涉及事物的本體？

乙：人的認識，首先要通過實踐。在我們面前擺着一塊黑板，這黑板是佔有空間的，因此牠有大小、長短和厚薄，這些反映到我們的腦子裏，就有了形狀觀念，就構成了一種幾何圖形。這是感性認識的階段，也是最基本的階段。進一步研究，又知道牠的長闊不等、四個角都相等、兩個對角線也相等種種性質，不僅如此，一本書、一張書桌等凡是具有類似黑板這形狀的事物，也具有這些相同的性質。於是就在我們思想上構成"長方形"的概念。長方形這形狀，在此時好像離開了黑板了。這是理性認識的階段，是捨去事物本身抽出形狀的階段，是發展的階段。並以此爲基礎來處理一切長方形，甚至可以推想到正方形就是長闊相等的長方形，是長方形的特例。這樣下去，就形成幾何學的抽象性了。這樣解釋，不知是否妥當？

何：出發於現實，歸宿於現實，根本問題還是由於有那一塊黑板，由於牠具有那兩根對角線及由此等等產生的各種性質。形狀這東西，當我們的認識還只是在感性階段時，是與事物的本體即現實密切結合着的。一旦發展到理性階段，就時時欲離開現實而又不得不通過現實以證實這些

理性的認識。這就是幾何學抽象性與現實性矛盾的實際情況。牠們的矛盾統一於我們的實踐，更通過這實踐再發生新的矛盾而向前發展。

丙：請舉一個實例。

何：好！就以剛才所講的長方形做例子吧！當我們用黑板證實了長方形確有四個等角、兩根等長的對角線以後，在某種實際生活勞動的情況下，我們接觸到另一些東西，如樓梯、斜方地磚、方斗（量米用）的側面等等東西的形狀，這些形狀都有四邊，和長方形的邊數相等，也有四個角，但彼此不相等。於是我們把這些形狀從各個事物抽出來，在我們思想上構成一個四邊形或四角形的概念。這時，樓梯等等被丟在一邊了，我們的研究遂又一次地離開事物了。但當我們再進一步研究這些四邊形究有那些相同或不同之處的時候，勢又不得不把這些事物反覆檢查，發見四邊形的四個角，有完全不相等的，有完全相等的，有兩兩相等的，而其總和卻又都等於360°。於是又構成了新的概念，又離開了事物的本體。幾何學就是這樣發展的。學習幾何學完全不照顧現實事物是不可能的。在推理過程中，在還沒有達到一個結論時，拘泥於死死地聯系實際，釘住事物，也不是完全必要的。

甲：我明白了。形狀是事物的形式，這形式是被事物本身許多性質所規定了的。處理事物的本身，也同時處理了事物的形狀。譬如說，用刀把黑板按對角線一切，就變成兩個三

角形，四邊形就不存在了。反之，按對角線替一個長方形木框釘上一根木條，就會隨形狀的變化而增加了該木框的堅固耐用。這就是說，處理了事物的形狀，也同時處理了事物的本身。如何通過幾何學的學習，根據各種形狀的性質，設法處理事物，使其能爲我用，這就是我們學習幾何學的目的。

何：對，完全對！這就是正確地聯系實際。明確了這一點，則所謂公理是怎樣產生的、能否證明等等的問題，就容易解決了。

三　所謂自明之理——公理

甲：上次討論中，我曾提及公理的能否證明問題，這是一個須得解決的基本問題。

丁：公理是自明之理，不須證明也無法證明。好在這些公理已經等於常識，無人懷疑了。如兩點中間直線最短這一公理，還有人不承認嗎？

乙：狗子都承認。喚牠吃肉骨頭，總是循着直線跑來的。

甲：不，不，我再說得明確一點，就是公理究竟從那兒來的？

戊：發生於實踐。第一次不就談過？整個數學是勞動所創造的，數學上的公理當亦不能例外。

丙：所謂自明之理，意思就在這裏了。因爲公理是大家從實踐中所體驗出來的一般眞理，實踐本身就代替了證明。因之，這證明是經過很多人億萬次的反覆實踐的。牠證明了

兩線中間直線最短，牠證明了通過線外一點，只可作一線平行於此線等公理。

甲：話雖如此，不證就已能自明，證明一下，豈不更好？這樣來解決，終覺不太滿意。

乙：我以為至少在幾何範圍以內是無法證明的。因為數學，是研究事物的分量或形狀，並把分量和形狀所在的物體捨棄在一邊的。因此，這些公理就成為一些抽象東西、比較固定的東西、不太完整的東西了。如我們在茶杯上任選兩點，連此兩點的線就不是最短，而且根本不是直線。

丁：這已經越出平面幾何的範圍了。把兩點連成一根透過茶杯的理想的直線，仍是最短的。

乙：是呀！我並不是不知道這樣做，而是說一碰到實際，公理也有時不那樣容易自明的。

戊：乙的話啓發我想起了一條公理——全量大於分量，這在數學範圍以內，是誰也不反對的。但加熱於已沸之水，其溫度則始終保持為攝氏 100°，此時，全量大於分量這條公理在這一事實前面破產了。這不是很有趣的例子嗎？

丁：可是我們有能力來辨別這些。那條定理基本上在數學範圍以內還是對的。

何：好了！這正說明了公理在數學範圍以內，雖為自明，但聯系了事物發展變化來研究，則公理實有不夠完整的地方。因為世界上事物是千變萬化的，事物本身根本不是固定不變的東西，而公理則是比較固定的、靜止的。以之反映

千變萬化的事物，當然只能表現其一部分或變化中一個過程了。這就是公理的局限性和不完全性。

甲：究竟牠是怎樣發生的？究竟能不能證明呢？是不是眞理呢？

丙：旣不能全部表現出事物的情况發展，就不是眞理，至少也不能算是完全的眞理。

戊：發生於人類的實踐總無可懷疑的，我堅持先前的意見。

丁：能證明而又不能證明，是爲公理，這也許又是所謂矛盾吧？

乙：我給搞得昏頭昏腦的，請老師總結一下吧！

何：我來概括的說一下。公理的來源，有兩種說法。有人說，公理是人類的智慧生來就有着的，正因爲生來就有，所以就用不着證明了，人人明白，卽所謂自明之理了。你們看，對不對？

甲：這成什麼話？這是太神祕了！一生下來，就裝有許多公理在頭腦子裏，並且能大體適合於外界事物的情况，這眞荒謬，與聰明人創造數學同樣的荒謬。

何：第二種說法則較爲可靠。有人說，公理是由人類的生活事實中抽引出來的，也就是如戊所說，是由人類實踐中得來的。只不過這些概念在實際生活中都顯而易見，是不必經過研究，而爲每個人在日常生活中無意間已經做到了的。兩點中間直線最短就是極明的例子。正因爲這樣，所以就成爲數學範圍內自明之理，也正因爲這樣，所以就被

曲解爲與生俱來，陷入觀念論的泥沼了。我們說，公理在數學範圍內是自明而不能證明的，聯系了事物的實際變化情况，則又不是完全的眞理而有其有限性、不完全性。所以在數學範圍以外，又是可以證明的。倒不是什麼矛盾不矛盾的問題。以爲牠是完全的眞理，是不對的，以爲牠完全不是眞理，也是不對的。

戊：照這樣說，在幾何學裏一切基於公理而得的一切定理，都是不完全的了？

何：在幾何範圍內，都是完全的。這正說明了我們研究數學，必須聯系實際。恩格斯說："數學上的所謂公理是數學需要來作爲其出發點的少數思想規定。數學是數量的科學，牠從數量這個概念開始。牠用殘缺不全的方式對這個概念下了定義，然後再把未包含在定義中的數量底其他基本規定從外邊當作公理引入了進來，在這裏，這些規定顯現爲沒有證明過的東西，也就很自然地顯現爲數學上不能證明的東西。數量的分析總是使這一切公理規定爲數量底必要的規定。斯賓塞說得很對：我們所認爲的這些公理底自明性是世代相傳繼承下來的。只要這些公理不是純粹的同語反覆，那末牠們是可以辯證地證明的。"我就用恩氏的話，作爲我說話的結束。

四 內在的關連

甲：幾何學研究的對象是事物的形狀，和代數及算術一樣的

有抽象性。惟其抽象，故能脫離事物，自己構成一個體系。又惟其必須聯系事物，所以事物發展變化了，形狀就不得不隨之以發展變化。因之幾何本身，也有牠的一系列的發展。也就是說，形狀自有其內在的關連。明白這些關連，也是必要的，請諸位討論一下。

丙：形狀雖多，但基本是由點、線、面、體所組織成功的。兩線相交處爲點，兩面相交處爲線，兩體相交處爲面。但什麼點只有位置、線無寬、面無厚，就令人難懂了。

何：對的，這些似乎很難懂，若我們換一個說法和看法，便大不相同了。

乙：換一個什麼看法呢？（乙和丁同聲的問。）

何：運動的看法，把客觀的東西看成不運動的死體，總是講不明白的，我們說，構成形狀的要素是點、線、面、體，點又是線面體的基礎。點沒有大小，是抽象的，又有位置，所以又是現實的。牠是正負方向線的起點，是正的又同時是負的。在一根線上任取一點，都可以當牠作起點，因之又是變動的。點的本身就具有這麼多的矛盾的性質，所以牠發展而爲線、面、體了。譬如，點向右發展而爲正線，向左發展而爲負線。點恰恰爲正負線的界限。點運動成線，線運動成面，面運動成體。一般幾何教本，都談到體停止，其實體仍是要運動的，更徹底地說，形狀旣附屬於事物，事物運動，形亦隨之而動。點運動成線，是一發展，線運動成面，又一發展，面運動成體而具有三度（卽長、闊、厚），好

像是停止了，但若以此體爲點再下去，又是點、線、面、體了。可以說是四度、五度、六度，一直循環而進步下去的。

戊：我覺這說法，不夠具體，並且也沒有解決什麼線無寬、面無厚等等問題。

甲：好，我們來想想例子。

丁：假如我們把點燃的香頭，在黑夜裏作急速的晃動，不是看見一根火線嗎？

丙：當飛機飛起時，那螺旋槳不是急轉成一塊圓板的樣子嗎？

乙：那麼用力將銅元在桌上一扭，可以表示面運動成體了。

何：哈哈！好極了，好極了，這都是極適當的例子，雖然燃着的香頭不能代表理想的點，螺旋槳不能代表線，銅元不能代表一個面，但我們要具體舉例，也只好這樣了。可是點只有位置、沒有大小，還是有毛病的，應該換一個說法。

甲：什麼說法呢？

何：用極限的說法，我們說，點是極小極小的體，小到幾乎沒有長、闊、厚可言，所以幾何學上的點，是小到極限的〔體〕，祇有"位置"，同時又沒有"長、闊、厚"。

乙：在物理學所說分子、原子以及電子，就可以說是點了。

戊：那麼有長度，而寬窄、厚薄都小到了極限的形狀是線，有長短和寬窄而厚薄小到了極限的是面，該是應有的結論了。

何：是的，換了極限說法，這問題不就解決了嗎？所以宇宙間

一切物體都是有形狀的，有長短、寬窄和厚薄這三度，體是三度都顯見的形狀。面是把厚薄縮到極限了，線是把寬窄、厚薄縮到極限了，點把三樣都縮到極限了。同時我們也不能說面是絕對沒有厚，線絕對沒有闊和厚，點絕對沒有長、闊與厚。

丙：這不是又有些矛盾了嗎？

何：是的，事物本身是矛盾的發展，形狀當亦隨之矛盾地發展了。不僅如此，當把一個體的厚度縮小時，比如就一塊黑板說，牠是越變越薄了，只是在牠的量的方面有些變化，但畢竟還是一塊黑板，也就是說還是一個體。但若縮小到非常之薄時，就要起質的變化了。也就是說要失去黑板的作用而不成其爲體，變成一個面了。面之逐漸變質爲線，線之逐漸變質爲點，也很容易用實例來說明，這中間包含着量變和質變的道理。這就是形狀內在的關連，亦即點、線、面、體的關連。

五　從聽課上下工夫

乙：通過前幾次討論，我們學習幾何的觀點，已經基本上正確地確立了。可是我們的學習態度還必須端正起來，才不致吃力不討好。就拿聽課來說吧！有些同學以爲只要注意聽例題。有的以爲只要死記定理。有的以爲一切決定於先生的講授，自己在聽課時不須要多動腦筋。有的以爲多聽少聽都無所謂，要緊在於自己的複習。有的強調小組互