中等师范数学进修教材

代数与初等函数

下　册

北　京　出　版　社

中等师范数学进修教材
代数与初等函数
下　册
北京教育学院师范教研室编
*
北京出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印刷
*
1982年6月第1版　1982年6月第1次印刷
书号：K7071·793　定价：0.59元

说　明

为了满足当前小学教师数学进修的迫切需要，我们编写了这套教材，作为师范学校招收民办教师的教学用书，也可供希望通过进修达到目前中师数学水平的教师使用，或作为小学教师教学参考书。在选择教材内容时，我们参照了全国中师数学教学大纲(草案)及部分省、市制订的小学教师进修计划．全套数学教材包括《代数与初等函数》上、下册及《初等几何》等三个分册．在使用时，各地可根据本省、市进修计划的授课时数，将教材内容作适当删减．

本书是《代数与初等函数》下册．在编写过程中，考虑到小学教师当前的实际情况，我们把有些知识内容进行了相对集中，有些知识内容作了适当简化．全书系统地讲述了函数和它的图象、指数函数与对数函数、三角函数、数列和极限、排列组合和二项式定理、概率初步等基础知识．在编写时，我们比较注意使教材符合小学数学教学的实际需要，也注意了便于同志们自学．

参加这套教材编写工作的有湖南省师范教材编写组周华辅、夏炎炎，上海师范学校教材组王明欢、陈丽荫，北京教育学院师范教研室许华棋、张君达等同志．

由于我们的水平有限，编写时间又比较匆促，书中一定会有很多缺点和错误，请同志们在使用过程中提出宝贵意见．

北京教育学院师范教研室

一九八一年九月

目　录

第六章　函数和它的图象……………………………… 1
第一节　函数的有关概念…………………………… 1
6.1　常量与变量 …………………………………… 1
6.2　函数 …………………………………………… 2
6.3　函数关系的表示法 …………………………… 8
6.4　函数思想在小学数学中的渗透 ……………14
第二节　正比例函数与反比例函数………………18
6.5　正比例函数 …………………………………18
6.6　反比例函数 …………………………………23
第三节　一次函数…………………………………31
6.7　一次函数及其图象 …………………………31
6.8　二元一次方程组的图象解法 ………………37
第四节　二次函数…………………………………40
6.9　二次函数及其图象 …………………………40
6.10　二次函数的简单应用…………………………50
第五节　函数、方程、不等式之间的关系…………61
6.11　用函数观点定义方程和不等式………………61
6.12　方程与不等式的图象解法……………………62
第七章　指数函数与对数函数………………………71
第一节　指数函数…………………………………71
7.1　指数函数的图象和性质 ……………………71

7.2 单调函数 ……………………………………74
第二节 对数函数……………………………………79
7.3 反函数 ……………………………………79
7.4 对数函数 ……………………………………82
第八章 三角函数……………………………………89
第一节 任意角的三角函数……………………………………89
8.1 角的概念的推广 ……………………………………89
8.2 弧度制 ……………………………………92
8.3 任意角的三角函数 ……………………………………95
8.4 同角三角函数的基本关系式 …………… 100
8.5 诱导公式 …………………………… 104
8.6 已知三角函数值求角 ……………………… 110
第二节 三角函数的图象和性质…………………… 116
8.7 用单位圆中的线段表示三角函数值 …… 116
8.8 正弦函数和余弦函数的图象和性质 …… 118
8.9 正切函数和余切函数的图象和性质 …… 127
第三节 两角和与差的三角函数…………………… 132
8.10 两角和与差的三角函数…………………… 132
8.11 二倍角的正弦、余弦和正切…………… 138
8.12 半角的正弦、余弦和正切…………… 140
8.13 三角函数的积化和差与和差化积……… 145
第九章 数列和极限…………………………… 161
第一节 等差数列与等比数列…………………… 161
9.1 数列 …………………………………… 161
9.2 等差数列 …………………………… 163
9.3 等比数列 …………………………… 168

第二节　数列的极限…………………………………… 176
9.4　数列的极限 ………………………………… 176
9.5　无穷等比数列各项的和 ………………… 183
9.6　化循环小数为分数 ……………………… 186
第十章　排列、组合和二项式定理…………………… 195
第一节　排列…………………………………………… 195
10.1　加法原理和乘法原理……………………… 195
10.2　选排列………………………………………… 198
10.3　全排列………………………………………… 203
第二节　组合…………………………………………… 208
10.4　组合…………………………………………… 208
10.5　组合数的性质……………………………… 211
第三节　二项式定理………………………………… 215
10.6　数学归纳法………………………………… 215
10.7　二项式定理………………………………… 219
10.8　二项展开式的性质………………………… 223
第四节　概率初步…………………………………… 226
10.9　随机事件及其概率………………………… 226
10.10　等可能事件的概率 …………………… 229
10.11　互斥事件有一个发生的概率 ………… 231
10.12　相互独立事件同时发生的概率 ……… 234

第六章　函数和它的图象

第一节　函数的有关概念

函数是数学里的一个重要概念，是近代数学研究的主要对象，它是研究和解决各种实际问题的有力工具．小学数学教学中之所以要渗透函数思想，主要在于：可以扩大学生的知识面；加深对小学数学知识的理解；为进一步学习数学和现代科学技术打好基础；有助于培养学生的思维能力和对学生进行辩证唯物主义观点的教育．本章结合小学数学教学的要求，介绍函数的初步知识，如函数，定义域，正、反比例函数，一次函数与二次函数，函数、方程、不等式之间的关系；加深和扩充与小学教材有联系的内容，以及为这些教材奠定理论基础的部分．

6.1　常量与变量

在日常生活、生产实践和科学技术的研究中，常常会遇到各种量．量是一切事物都具有的物质属性．例如，速度、电压、密度等是物理量；原子价、原子量、溶解度等是化学量；长度、面积、体积等是几何量．各种不同的量都具有一个共同性质，即每一个量都可以用取定的同类量作为度量单位，去量它的大小．量得的结果，就得到一个抽象的数，这个数就是被度量的量与它的度量单位的比值，我们把这个比值叫做这个量的数值，或者叫做量数．

我们研究量时，可以发现，在研究过程中有些量保持不变(即保持常值)，这种量称为常量．另外还有些量，时而变大，时而变小(即可取不同的值)，这种量称为变量．变量通常用字母x、y、z等表示，常量通常用字母a、b、c等表示．

例 1 把均匀的圆形金属板加热，它的直径D和面积A就要逐渐扩大，所以它们是变量，而它的周长与直径的比，始终保持同一数值(π)，所以它是常量．

例 2 自由落体运动计算公式$h=\frac{1}{2}gt^2$．这里h表示下降的距离，t表示下降的时间，g是重力加速度．g在运动中保持不变，是常量；h和t在运动中不断变化，是变量．

变量与常量的区分是相对的，是对某一运动过程而言的．情况变了，常量可能转化为变量，变量也可能转化为常量．例如，在研究物体作匀速运动时，速度是常量，时间和路程都是变量；如果在路程一定时，研究速度和时间的关系中，路程转化为常量，速度转化为变量．在例2中，重力加速度g是常量，但在发射人造卫星时，就要考虑重力加速度的差别，这时g就转化为变量了．

6.2 函数

1．函数的定义

我们继续考察上面的两个例子．

在例1中，反映了圆面积A和直径D这两个变量之间的相依关系．当直径D在变化过程中取某一个确定的值时，面积A就按照一定的法则有一个确定的值和它对应．

在例2中，等式$h=\frac{1}{2}gt^2$反映了下降的距离与时间这

两个变量之间的相依关系．当下降的时间 t 在变化过程中取某一个确定的值时，下降的距离 h 就按照 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 的法则有一个确定的值和它对应．如当 $t=5$(秒)时，$h=\frac{1}{2}\times 9.8\times 5=24.5$(米)．

这两个例子，反映了不同事物在变化过程中量与量之间的关系，虽然它们的具体内容和表现形式不相同，但就本质来看有下述共同特征：

(1) 在每一个问题的研究过程中，我们都考察着两个变量．

(2) 在这两个变量间，存在着某一个使它们互相联系、互相影响的法则．

(3) 由于这个法则的存在，当其中一个变量每取定某一个数值时，另一个变量就在这个法则的支配下有唯一确定的数值与它对应．

对于变量间的关系的这些特征进行抽象和概括，便引进了函数的概念．

在有两个变量 x 和 y 的变化过程中，如果对于变量 x 在它的变化范围内的每一个值，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的值与它对应，那么称变量 y 是变量 x 的**函数**．变量 x 叫做**自变量**，变量 y 叫做**因变量**．

变量 y 和变量 x 之间的这种关系叫做**函数关系**．

根据定义，上面两个例子中的那些变量间的关系就是：

圆面积 A 是直径 D 的函数；

下降的距离 h 是下降的时间 t 的函数．

其中 D、t 都是自变量，A、h 都是因变量．

2. 函数的记号

在研究两个变量 x 和 y 的函数关系时，"y 是 x 的函数"这句话，通常用记号

$$y=f(x)$$

来表示. 在这个记号中，括号里的字母 x 表示自变量，字母 y 表示因变量，即 x 的函数. 括号外面的字母 f（函数 function 一词的第一个字母）不是代表量，更不是表示 f 与 x 相乘，而是表示变量 y 和 x 之间的对应法则. 如例 1 中，圆面积 y 是直径 x 的函数，可记为

$$y=f(x),$$

这时字母 f 表示这样一种确定的对应法则：将 $\frac{\pi}{4}$ 乘以 x^2 就得到对应的值 y.

记号 $f(x)$ 表示的是自变量 x 的函数，可简单读作"函数 f（爱福）x". 而 y 也表示 x 的函数，所以，$f(x)$ 和 y 是一回事情，用等号联结它们：$y=f(x)$. 这个等式可以简单读作"y 等于 f（爱福）x".

关于函数的记号，应该注意以下两点：

(1) $y=f(x)$ 只是抽象地指出 y 是 x 的函数这一事实，至于把变量 y 和 x 联系起来的对应法则 f 究竟是什么，必须由所讨论的问题来决定.

(2) 应用字母来表示对应法则，也可以用 f 以外的其他字母. 例如"y 是 x 的函数"这句话，也可以用 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等记号来表示. 特别是当我们同时研究几个不同的对应法则所确定的函数时，为了避免混淆，就需要用不同的字母来表示不同的对应法则. 例如，正方形的周长 P 和面积

S 都是它的边长 a 的函数，但是它们的对应法则是不同的.我们知道

$$P=4a,$$
$$S=a^2.$$

当同时研究这两个函数关系时，如果用记号 $P=f(a)$ 表示前一个函数关系，那么在表示后一个函数关系时，就不宜再用字母 f，而必须改用其他的字母，如用 $S=F(a)$ 来表示.

3．函数的定义域

由函数的定义，可以知道，构成函数关系的最本质的东西就是对应法则．但是，自变量及其函数之间的对应法则，只有在一定条件下才能成立．这个条件就是自变量的取值范围.

例如，用长 20 cm 的铁丝围成边长的厘米数为整数的正方形，有几种围法？

解这个问题的时候，设围成的正方形边长为 x cm，那么周长 $y=4x$．依题意 $0<4x\leqslant 20$，就是 $0<x\leqslant 5$．又依题意 x 必须是整数，所以有 5 种围法．这时围成的正方形的边长可取 1 cm，2 cm，3 cm，4 cm，5 cm.

因此，这里自变量 x 可取的数值只有 5 个.

自变量的可取值的范围，叫做函数的定义域.

函数的定义域，一般由变量 x 与 y 的实际意义和问题的性质决定，对于用数学式子 $y=f(x)$ 表示的函数，如果没有特别说明，函数的定义域应该认为是使 $f(x)$ 有意义的一切实数的全体.

如在例 1 中，自变量应取 $D>0$ 的一切实数；在例 2 中，

自变量 t 的取值范围是 $t\geqslant0$ 的一切实数. 这些都是根据具体问题的实际意义决定的.

例 3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{25-x^2}$;　　(2) $y=\sqrt{x^2-25}$.

解 (1) 函数的定义域为 $-5\leqslant x\leqslant5$.

(2) 函数的定义域为 $x\geqslant5$ 或 $x\leqslant-5$.

这是由 $f(x)$ 本身的意义决定的.

函数的定义域通常是某一范围的全体实数. 为了讲述和记法方便, 一般用区间表明.

4. 函数的值和值域

在函数 $y=f(x)$ 中, 当自变量 x 在定义域内取值为 a 时, 函数 y 的对应值用 $f(a)$ 表示. $f(a)$ 叫做函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的函数值. 例如

设 $y=f(x)$ 表示函数

$$y=3x^2+2x-1,$$

那么 $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$ 就是 $3x^2+2x-1$ 分别在 $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$ 时的值. 即

$$f(1)=3\times1^2+2\times1-1=4;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}-1=\frac{3}{4};$$

$$f(-1)=3\times(-1)^2+2\times(-1)-1=0.$$

如果函数 $f(x)$ 是一个数学式子, 那么要求 $x=a$ 时的函数值 $f(a)$, 只需把这个式子里的 x 代之以 a 再进行计算.

例 4 设 $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$，求 $f(0), f(-1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(a), f(a+1)$。

解 $$f(0)=\frac{2\times 0+1}{0-2}=-\frac{1}{2};$$

$$f(-1)=\frac{2\times(-1)+1}{(-1)-2}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3};$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2}=\frac{2}{-\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3};$$

$$f(a)=\frac{2a+1}{a-2};$$

$$f(a+1)=\frac{2(a+1)+1}{(a+1)-2}=\frac{2a+3}{a-1}.$$

例 5 设 $f(x)=x^3+x$，求证 $f(-a)=-f(a)$。

证明 $\because$ $f(-a)=(-a)^3+(-a)=-(a^3+a)$，

又 $f(a)=a^3+a$，

$\therefore$ $f(-a)=-f(a)$。

对于一个函数来说，我们通常把定义域中一切实数所对应的函数值的全体称为函数的值域．函数的值域，一般可由自变量可取的值和给定的对应法则来确定．

5．函数概念的推广

在前面的函数定义中，关于函数的概念涉及到两个集合，即函数的定义域和值域，以及这两个集合的元素之间的对应关系，而这两个集合都是由一些实数组成的，对应关系是从定义域到值域的单值对应（映射）．现在，我们可以把函数概

念作进一步推广.

一般地，设有集合M、N(不一定是数集)，如果从集M到集N存在一个单值对应(映射)，我们就说在集合M上定义了一个函数，集M叫做函数的定义域．集M中所有的元素在N中的象所组成的集合，叫做函数的值域.

例如，设M是所有二元一次方程的集合，N是平面上所有的直线组成的集合，我们可以建立一个法则f，使M中每一个二元一次方程，在N中有唯一一条直线与之对应，根据函数的定义，我们就在集合M上定义了一个函数．它的定义域是所有二元一次方程的集合，值域是平面上所有的直线组成的集合.

如果集合M和集合N都是数集，就是我们在前面给出的函数的定义.

6.3　函数关系的表示法

对于变量间的函数关系的表示，最常用的有解析法、列表法和图象法，掌握这些函数关系的表示法，可以更好地了解变量间的函数关系.

1．解析法

两个变量间的函数关系，有时可以用一个含有这两个变量和各种运算的等式来表示，这种表示方法，叫做解析法.

前面提到的 $h=\frac{1}{2}gt^2$；$A=\pi r^2$；$y=\sqrt{x^2-25}$等等，就是用解析法表示函数关系的.

用解析法表示的函数 $y=f(x)$中，等号右边的 $f(x)$通常叫做函数的解析式.

解析法是表示函数关系的基本方法，它具有简单明瞭、

便于用数学方法来研究的优点.

2. 列表法

变量间的函数关系，不一定都能用解析法表示出来.

例 6 某日水位记录表：水位警戒线记作零，向上为正，向下为负。

时间 t(时)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
水位 h(米)	-0.6	-0.2	0	0.6	0.8	1	0.7	0.2	-0.2

上表表示了一天内时间 t 与水位 h 间的函数关系，这种表示函数关系的方法，叫做列表法.

这种方法容易找到自变量与函数的对应值. 但是，有局限性，因为列出的自变量与函数的对应值是有限的.

3. 图象法

在小学数学中，折线统计图就是用图象来表示函数关系的例子. 只不过折线统计图中自变量的变化范围一般都是离散的自然数罢了. 图 6-1 是一张反映某市无线电一厂、二厂工业产值增长情况的折线统计图，它表示产值是年份的函数. 对于统计范围内的不同的年份，我们可以由图找到产值的对应值.

对于一般的函数，怎样用图象来表示它对自变量的关系呢？我们先介绍平面上的直角坐标系.

(1) 平面上的直角坐标系

如图 6-2 原点重合且互相垂直的两条数轴合在一起叫做平面上的直角坐标系，简称坐标系.

$X'X$ 叫做横轴(或 x 轴)，$Y'Y$ 叫做纵轴(或 y 轴).

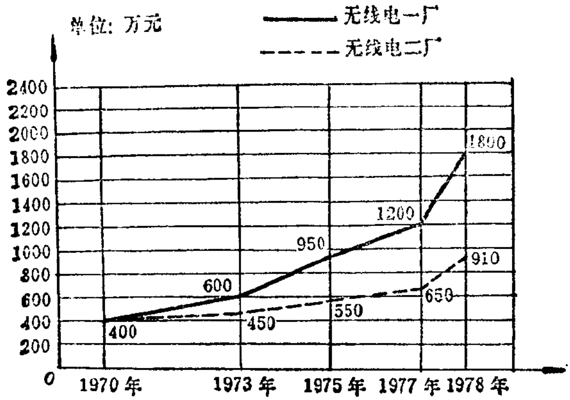

图 6-1 某市无线电一厂、二厂工业产值增长情况统计图

坐标系将平面分成四个部分，即平面 XOY、YOX'、$X'OY'$、$Y'OX$，分别叫做第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限。

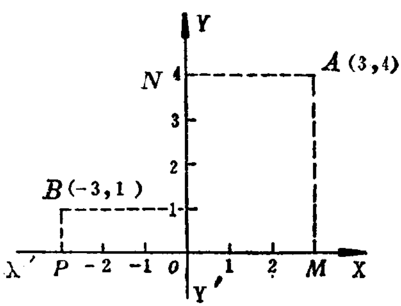

图 6-2

有了坐标系，就可以把排好了顺序的一对实数(x,y)用坐标系里唯一的点表示出来。

例如，点 $A(3,\ 4)$，可以在 x 轴上找到表示 3 的点 M，在 y 轴上找到表示 4 的点 N，过 M、N 分别作 x 轴和 y 轴的垂线相交于 A，A 就表示了 $(3,\ 4)$ 的点，记作 $A(3,\ 4)$。3 叫做 A 点的横坐标，4 叫做 A 点的纵坐标，横坐标记在前面，纵坐标记在后面，3 和 4 合起来，叫做 A 点的坐标。

反过来，在坐标系内一点 B，可用一对实数来表示。

方法是：过 B 分别作 x、y 轴的垂线，交 x、y 轴于 P、Q 两点，在 x、y 轴上表示这两点的数，就是 B 点的坐标。如图 6-2 中点 B 的坐标是 $B(-3,\ 1)$。

(2) 图象法

由于一对实数可用坐标系内的一个点表示出来，所以，用这样的方法可以表示变量间的函数关系。

例如，在例 6 中的水位记录表，可用横轴表示时间 t，用纵轴表示水位 h，每个时间和水位的一组实数就可以用坐

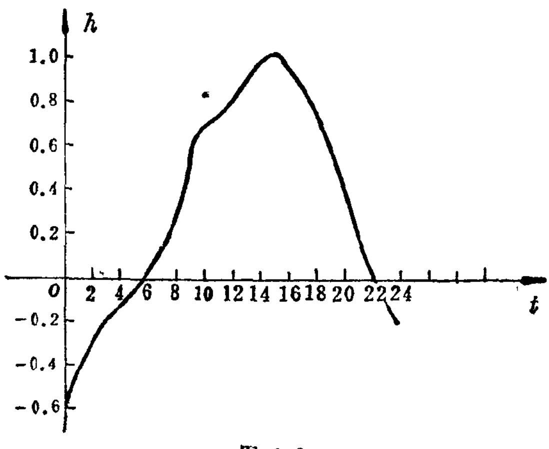

图 6-3