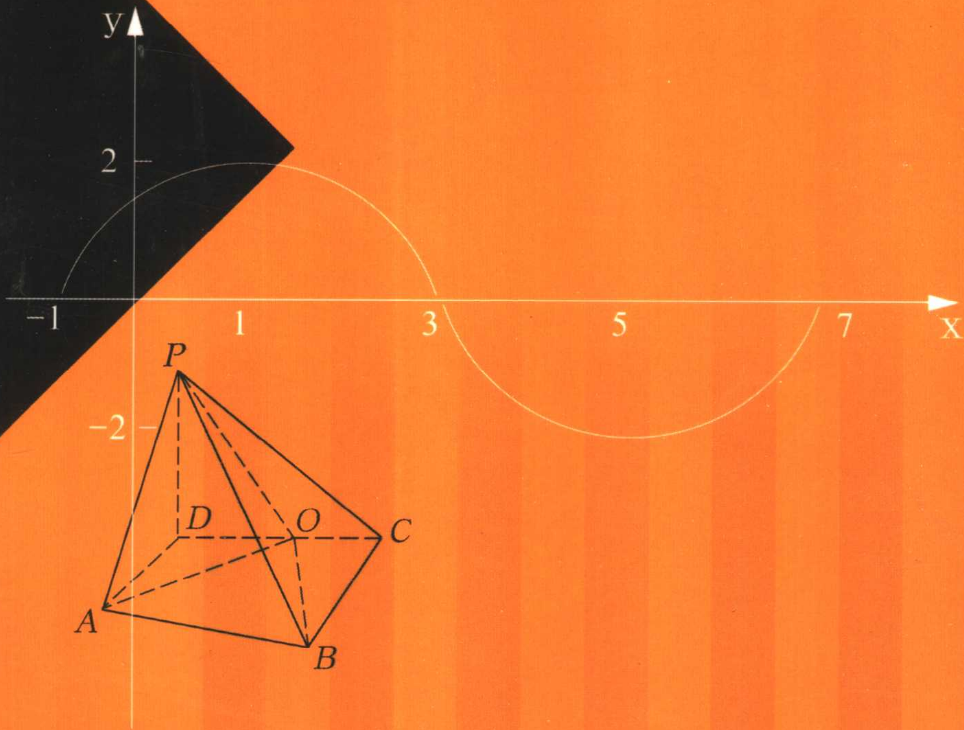
GAOKAO SHUXUE SHIZHAN XUNLIAN

高考
数学实战训练

名师推荐 名校使用

李正兴／著

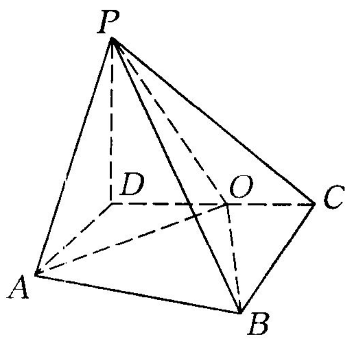


上海人民出版社

高考

数学实战训练

李正兴／著



上海人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考数学实战训练/李正兴著.
—上海：上海人民出版社，2003
ISBN 7－208－04550－X

Ⅰ.高... Ⅱ.李... Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 008627 号

责任编辑　吴书勇
封面装帧　甘晓培

高考数学实战训练
李正兴　著
世纪出版集团
上海人民出版社出版、发行
(200001　上海福建中路 193 号　www.ewen.cc)
新华书店上海发行所经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 28.5　插页 2　字数 782,000
2003 年 3 月第 1 版　2003 年 3 月第 1 次印刷
印数 1－8,000
ISBN 7－208－04550－X/G·854
定价 40.00 元

序

一年一度的高考牵动着成千上万个家庭，在进行高考复习过程中如何提高效率是一个热门的话题. 学生和家长渴望碰见名师，靠名师的点拨希望成绩突飞猛进. 名师难求，于是转向教辅书. 面对浩如烟海的高考辅导书、练习册，将何从选择？

李正兴先生的《高考数学实战训练》兼顾了高考一轮、二轮的复习需要，是作者十四个春秋在高三教学第一线的实战记录，是近三十年从事高中数学教学经验的总结.

李正兴先生是一位优秀的中学数学高级教师、学科带头人. 他对每年的高考复习的整个过程都作通盘考虑，注重纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合. 他对每一节复习课如何引入，如何展开，知识层面上如何发散，如何抓住学生的注意力，如何激发学生的兴趣，课后如何精选习题巩固练习，如何进行检测反馈，都作出独巨匠心的安排. 他的每堂复习课如同导演一出舞台剧，序幕、情节展示、高潮，一环紧扣一环，引领学生走向成功. 他所教区重点中学高三毕业班 2002 年高考均分超市重点中学均分达 10 分，这个班级一年内有 11 人在上海市及全国数学竞赛中获等第奖，就是最好的明证.

本书凝聚了李正兴先生长年以来在教育岗位上所花的心血. 若用本书复习，如同得到名师点拨，必定效果显著.

我从事中学数学教育和在师大数学系任教达数十年，是李正兴先生大学时同窗好友，1989 年起又担任美国《数学评论》评论员，评论过世界各国的众多专家的数学著作和论文，我乐意推荐这本书. 我深信，无论对高中数学教师的数学教学还是广大考生的高考复习，这本书和作者年初出版的另一本《高中数学解题策略》都是很有价值的.

上海师范大学数学系教授

施永兵

2002 年 10 月 26 日

前　言

从事高中数学教学已近三十年了,前前后后教了十四届高中毕业班,积累的教案及资料倒也不少.常有已毕业多年的学生来看我,回顾高三总复习的情景,讲到其他班级同学向我所教班级同学借抄听课笔记之事,最后常常归结到一句:老师,您应当出书了.于是在2002年初,由上海人民出版社出版了我写的《高中数学解题策略》一书,初版在三个月内就销售一空,常有读者打电话去出版社讲书买不到,最近又重印了.

实际上高考数学总复习一般需经两轮,已出版的《高中数学解题策略》适宜于第二轮复习之用.为此,我又把第一轮复习中自己写的教案、编的一些练习卷加以提炼、修改,撰写了这本《高考数学实战训练》.对于那些练习卷,想当年,每教一届进行一次修改,保留传统好题,去掉陈旧繁杂的习题,增加一些新颖、体现能力要求的习题,使之日趋完善.这些练习卷确是经过教学过程的不断考验,深受历届高三学生的欢迎,效果也相当不错.也就是说,这本书可供高考数学第一轮复习时参考,两本配合起来是一套完整的高考复习用书,写本书时对此也作了通盘考虑,尽量做到例题、练习题不重复,内容互补,且更实用.

本书按高中数学知识板块分为如下八章:

第一章　函数

第二章　不等式

第三章　三角函数

第四章　数列、极限、数学归纳法

第五章　复数

第六章　排列组合、二项式定理、概率、统计

第七章　立体几何、向量初步

第八章　解析几何

每一章从四个方面展开:

一、本章综述与复习方法点击.对本章内容作提纲挈领的介绍,按照教学大纲,一一罗列复习目标,点击重点、难点,并从数学思想上进行提炼,引导学生掌握正确的复习方法.

二、典型例题解析.对本章的典型例题分类讲解,每个小课题大致剖析3—5题,基本上都给出了策略点击或评析,有多种解法的也尽量提供给读者.大数学家希尔伯特说:“尽管数学知识千差万别,我们仍然清楚地意识到:作为整体的数学中,使用着相同的逻辑工具,存在着概念的亲缘关系,同时在它的不同部分之间,也有大量相似之处.”所以通过典型例题的分析,促使学生抓住概念,夯实基础,启迪思维,找到规律性的内涵,掌握解题通法,进一步探求巧妙解法,实际上这是第一轮复习中的“双基铺垫”,适应高考需要的重要环节.

三、能力型问题研究.在当前全面推进素质教育的形势下,教育部对高考命题的改革提出

了新的要求，“要更加注重能力和素质的考查；命题的范围要遵循大纲，又不拘泥于教学大纲，要增加应用型和能力型的试题设计”. 针对这一要求，本书逐章对切合高考改革方向、体现能力要求的题型进行剖析，建构学科内综合及学科间交叉的网络思维模型，以提高学生探索和解决综合题、开放题、新情景题、新信息题和应用问题的能力，完成知识向能力的成功过渡.

四、单元训练与检测. 本书给出了三十套单元练习卷，这些试卷的编写紧扣教学大纲，兼顾上海市新教材和全国教材，精选典型习题，体现能力要求，可供学生训练以检测复习效果之用.

当今倡导创新教育，这无疑是正确的；但是高中阶段的数学学习，其主要功能是为了进入高校能更好地学习高等数学，更有利于今后的发展. 数学是多种学科的基础，即使是文科许多专业如经济、金融、管理等等对数学的要求也越来越高，数学具有很强的灵活性和指导价值. 中学阶段的学习毕竟只是打基础，学的仅是十九世纪之前的数学. 只有夯实基础才谈得上创新，而数学上的创新往往需要多年的积累，并不是在题型上翻翻花样就是创新. 所以高三总复习还是要放在夯实学生的数学基础上，做到这一点不靠灌输，更杜绝“作秀”，而要放在教会学生解决问题的方法上，放在引导学生提出问题、善于提炼重点，抓住关键，进行由此及彼的思考上. 当你弄懂了一道例题，理清了一些数学概念，掌握了若干数学方法，从而能解决一批习题，达到了“举一反三”的境界的时候，你的复习就成功了！

最近国际数学家大会在我国召开，这是我国数学界的盛事，也是对我国数学发展水平的肯定，然而我国仍然与菲尔茨奖无缘，说明了我国年轻的数学家距菲尔茨奖的要求或多或少还有一定距离. 从而引发了这样一个话题，参加国际数学“奥赛”，中国获得的金牌总数常常高居榜首，是数学“奥赛”第一大国，然而这些金牌得主大多厌恶数学，不愿继续从事数学研究，也无人在数学研究上获得佳绩，问题在于数学学习兴趣的丧失. 中国数学家田刚说：“只要有兴趣，数学就会变得迥然不同，才会感受到数学无穷的魅力. ”数学本身是一门“活的科学”、“美的科学”，所以教师只有把数学教“活”，把数学的美展示给学生，才会激发起学生学习数学的兴趣，学生在学习数学的过程中体会到了数学的美，才会产生学好数学的巨大动力. 确实，数学解题过程中到处存在逻辑之美、节奏之美、数学思想之美. 每当碰上一道难题，苦苦思索之后终于找到了解决它的方法，内心将是何等欢快，这难道不正是南宋词人辛弃疾所描写的“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处”的美妙意境吗？

高三数学复习归结到最后是怎样解一份高考试卷，但是我们还可以把这一阶段看作学习高等数学的准备，研究其他学科的前奏，因为数学已融合在学科的群山之中，这样你就掌握了复习好数学的主动权，你的复习效果将会更明显. 宋代理学家朱熹有一首“观书有感”的诗写得很精彩，“半亩方塘一鉴开，天光云彩共徘徊。问渠哪得清如许，为有源头活水来. ”讲的就是把书读活的道理. 明确了高三复习的目标，掌握了正确的复习方法，你才会感到充实，才会有豁然开朗的感觉，祝你成功！

上海人民出版社苏贻鸣、吴书勇两位先生对本书的出版做了大量工作，周玉刚先生审阅了全稿，提出了许多宝贵意见，我的老同学施永兵教授为本书写了序，在此向他们表示衷心感谢.

限于本人水平，疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正.

李正兴

2002. 8. 26

目　录

第一章　函　数

一、本章综述与复习方法点击

（一）本章综述

函数是高中数学的重要内容之一，它提供了研究两个变量之间相互依存、相互制约规律的一般理论和基本方法．这些知识又是解决许多数学问题，包括实际问题的工具．由此建立起来的函数思想是高中数学中有着广泛应用的最基本的数学思想．学会运用函数的思想方法解决有关问题既是历来数学高考中重点考查的内容，也是提高学生数学素养的一个重要方面．

高中阶段函数这块内容，主要包括四大部分．第一部分是集合与命题的概念，是函数学习的基础部分；第二部分是函数的一般理论，即函数的三大要素（定义域、值域、对应法则）、四大性质（奇偶性、单调性、周期性、最值）；第三部分是几类常见函数（二次函数、幂函数、指数函数、对数函数），研究它们的图象及其性质；第四部分是函数的思想方法和函数型应用题的解法．

（二）复习目标

（1）理解集合、空集、子集、真子集、交集、并集、补集、集合相等等概念，并能进行集合的交、并、补运算．

（2）理解命题的四种形式及其相互关系，理解推出关系及命题证明的意义，理解充分条件、必要条件与充要条件的含义，并能用来判别一些简单的数学问题的充分性与必要性．

（3）理解函数的概念，掌握代数函数定义域、值域的求法，理解函数的对应法则，会求两个函数的和函数与积函数．

（4）理解函数的单调性、奇偶性的概念，能判断一些简单函数的单调性、奇偶性，并能利用函数的这些性质解一些数学综合题．

（5）理解函数的最大值和最小值的概念，能熟练求出一些简单函数的最大值或最小值．

（6）能求出实际问题中两个变量间的函数关系，利用函数解决实际应用问题．

（7）知道幂函数的概念及一些常见的幂函数的图象与性质．

（8）理解指数、对数的意义，会熟练地将指数式与对数式互化，掌握积、商、幂的对数运算性质，理解常用对数的意义，掌握对数换底公式．

（9）理解反函数的概念，会求已知函数的反函数，掌握函数与它的反函数在定义域、值域以及图象上的关系．

（10）理解指数函数与对数函数的概念及联系，掌握它们的图象及其性质，并能作简单的应用．

（11）掌握简单的指数方程和对数方程的解法．

(12) 掌握基本函数的图象变换，能运用数形结合的思想方法解题，能利用函数的性质处理一些综合题.

(三) 方法点击

函数的复习要重点解决好如下四个问题.

(1) 要准确、深刻理解函数的有关概念

在函数概念的三要素中，定义域和对应法则是最基本的，值域由定义域和对应法则所确定. 在研究函数值域时，既要重视对应法则的作用，又要特别注意定义域对值域的制约作用.

函数的性态研究主要是指函数的奇偶性、单调性、周期性和最值，这些函数性质的定义是函数研究中重要的基础知识，它们是判定或证明数学问题的根据，其中核心为单调性的研究，反函数的概念以及互为反函数的两图象之间的关系是函数概念中的又一重点.

(2) 要充分理解函数与其他数学板块的内在联系，把握"转化"、"化归"的思想方法

变量数学首先是通过函数来研究的，利用函数思想可以从较高的角度处理方程、不等式、数列、曲线与方程等方面的问题，使动与静、变量与常量生动地统一起来了. 函数思想实际上是辩证思维的一种特殊表现形式，掌握了它会使解题能力迅速提高.

(3) 重视数形结合，掌握以形助数的思想方法

数形结合的思想方法实质是将抽象的数学语言和直观图形结合起来，通过以形助数可以发挥直观对抽象的支柱作用，在函数研究中，利用函数图象的几何特征与函数性质的数量特征的紧密结合，可以更有效地揭示各类函数的性质，从而使问题获得快捷明了的解法.

(4) 认识函数思想的实质，重视问题的解决，提高"数学建模"能力

函数是用来描述客观世界中量的依存关系，根据实际问题求函数表达式，是应用函数知识解决实际问题的基础，在设定或选定自变量去寻求等量关系并求出函数表达式后，还要注意函数定义域常受到实际问题本身的制约. 复习时要强化应用意识，提高"数学建模"解决实际问题的能力.

二、典型例题解析

(一) 集合的概念与运算

例 1 设集合 $A=\{1, 3, a\}$, $B=\{1, a^2-a+1\}$，求 $A\cup B$.

策略点击 两个集合的并集就是把两个集合中的元素"放在一起"，去掉重复元素所组成的集合. 因此，求并集的关键是看所给的集合中是否有重复元素，特别是集合中的元素含有字母参数时，要注意讨论，以保证集合中元素的互异性.

解 由集合元素的互异性知，在集合 A 中 $a\neq 1$ 且 $a\neq 3$.

在集合 B 中，$a^2-a+1\neq 1$，即 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$.

(1) 若 $a^2-a+1=3$，即 $a=-1$ 或 $a=2$，

则当 $a=-1$ 时，$A\cup B=\{1, 3, -1\}$；当 $a=2$ 时，$A\cup B=\{1, 3, 2\}$；

(2) 若 $a^2-a+1=a$，即 $a=1$，则不符合集合中元素的互异性，舍去；

(3) 若 $a\neq -1$、$a\neq 2$、$a\neq 0$、$a\neq 1$ 且 $a\neq 3$，

则 $A\cup B=\{1, 3, a, a^2-a+1\}$.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+3a-5=0\}$. 若

$A \cap B = B$，求实数 a 的值.

策略点击 空集是一切集合的子集，在解有关子集问题时应防止漏解.

解 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$，

由 $x^2 - ax + 3a - 5 = 0$，知 $\Delta = a^2 - 4(3a - 5) = a^2 - 12a + 20 = (a - 2)(a - 10)$.

(1) 当 $2 < a < 10$ 时，$\Delta < 0$，$B = \varnothing \subseteq A$；

(2) 当 $a \leqslant 2$ 或 $a \geqslant 10$ 时，$\Delta \geqslant 0$，$B \neq \varnothing$.

若 $x = 1$，由 $1 - a + 3a - 5 = 0$，即 $a = 2$，此时

$$B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{1\} \subseteq A;$$

若 $x = 2$，由 $4 - 2a + 3a - 5 = 0$，即 $a = 1$，此时

$$B = \{2, -1\} \not\subseteq A.$$

综上，当 $2 \leqslant a < 10$ 时，均有 $A \cap B = B$.

例 3 已知集合 $M = \{x, xy, \lg xy\}$，$N = \{0, |x|, y\}$，并且 $M = N$，求 x、y 的值.

策略点击 由 $M = N$ 知，M 中的三个元素应与 N 中的三个元素分别对应相等，但由集合元素的无序性，确定哪个元素与哪个元素对应相等就是需要讨论的问题了. 又由于同一个集合中的元素是互异的，这点又可以帮助我们确定这种对应关系.

解 由 $M = N$ 知 M 中必有一个元素是 0，且只能是 $\lg xy = 0$，即 $xy = 1$. 由 $xy = 1$，$M = N$ 知 N 中必有一个元素是 1.

(1) 如果 $y = 1$，则由 $xy = 1$ 有 $x = 1$，此时在 M 中有 $x = xy = 1$，这与元素的互异性相矛盾，故 $y \neq 1$；

(2) 如果 $|x| = 1$，则 $x = \pm 1$，而 $x = 1$ 时与(1)中情况相同，故 $x \neq 1$. 当 $x = -1$ 时，由 $xy = 1$，有 $y = -1$，此时 $M = \{-1, 1, 0\}$，$N = \{0, 1, -1\}$.

$\therefore \quad x = -1,\ y = -1.$

例 4 已知集合 $A = \{y \mid y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$，$B = \left\{y \,\middle|\, y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 3\right\}$. 若 $A \cap B = \varnothing$，求实数 a 的取值范围.

策略点击 集合 A 是一元二次不等式的解集，集合 B 是在自变量取值限定的条件下二次函数的值域组成的集合，由 $A \cap B = \varnothing$，对两集合进行讨论，这是一道典型的基础题.

解 $\because \quad a^2 + 1 > a$，$\therefore \quad A = \{y \mid y > a^2 + 1$ 或 $y < a\}$.

又由 $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$ 知

$y_{\min} = f(1) = 2$，$y_{\max} = f(3) = 4$，$\quad \therefore \quad B = \{y \mid 2 \leqslant y \leqslant 4\}$.

若 $A \cap B = \varnothing$，则 $\begin{cases} a \leqslant 2, \\ a^2 + 1 \geqslant 4. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \leqslant 2, \\ a \geqslant \sqrt{3} \text{ 或 } a \leqslant -\sqrt{3}. \end{cases}$

$\therefore \quad a \leqslant -\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 2$.

例 5 已知集合 $S = \{(x, y) \mid x = m,\ y = -3m + 2,\ m \in \mathbf{N}\}$，$T = \{(x, y) \mid x = n,\ y = a(n^2 - n + 1),\ n \in \mathbf{N},\ a \in \mathbf{Z}$，且 $a \neq 0\}$，且 $S \cap T \neq \varnothing$，求 a 的值.

策略点击 由 $S \cap T \neq \varnothing$ 的意义知，本题的实质是求非零整数 a，使得方程组 $\begin{cases} y = -3x + 2, \\ y = a(x^2 - x + 1) \end{cases}$ 有 x

是正整数的解.

解 由 $S\cap T\neq\varnothing$,可得方程组 $\begin{cases}y=-3x+2,\\y=a(x^2-x+1)\end{cases}$ 有 x 是正整数的解,

消去 y,得 $$ax^2-(a-3)x+a-2=0. \tag{①}$$

设 x_1、x_2 是这个方程的两个正整数解,则

$$\begin{cases}\Delta=(a-3)^2-4a(a-2)\geqslant 0,\\x_1+x_2=\dfrac{a-3}{2}=1-\dfrac{3}{a}>1,\\x_1x_2=\dfrac{a-2}{a}=1-\dfrac{2}{a}\geqslant 1.\end{cases}$$

解不等式组,得 $\begin{cases}-2<\dfrac{1-2\sqrt{7}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}<3,\\a<0.\end{cases}$

$\because\ a\in\mathbf{Z},\quad\therefore\ a=-1.$

把它代入方程①,得 $x_1=1,\ x_2=3.$

故 a 的值为 -1.

例 6 设函数 $f(x)=x^2+bx+c$, $A=\{x\mid f(x)=x\}$, $B=\{x\mid f(x-1)=x+1\}$. 若 $A=\{2\}$,求集合 B.

策略点击 全面分析理解条件 $A=\{2\}$ 的意义是解决本题的关键,它不仅提供了 $x=2$ 是方程的解,而且提供了一元二次方程 $f(x)=x$ 有等根的重要信息,解题时善于捕捉这种隐含的信息是一种重要的能力.

解 由 $f(x)=x$,得 $$x^2+(b-1)x+c=0. \tag{①}$$

$\because\ A=\{2\},\quad\therefore$ 方程 ① 为 $(x-2)^2=0.$

即 $$x^2-4x+4=0. \tag{②}$$

比较①、②,得 $\begin{cases}b=-3,\\c=4.\end{cases}$ $\therefore\ f(x)=x^2-3x+4.$

由 $f(x-1)=x+1$,得 $(x-1)^2-3(x-1)+4=x+1.$

化简,得 $x^2-6x+7=0.$

解方程,得 $x=3\pm\sqrt{2}.$

$\therefore\ B=\{3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2}\}.$

例 7 已知函数 $F(x)=kx^2-2\sqrt{4+2m-m^2}\,x$, $G(x)=-\sqrt{1-(x-k)^2}$, m、$k\in\mathbf{R}$,

(1) 求同时满足下列两个条件的所有实数对 (m,k);

甲:$F(x)$ 取得最大值时的 x 值与 $G(x)$ 取得最小值时的 x 值相同,

乙:k 为整数.

(2) 把满足上述条件甲的实数对 (m,k) 的集合记为 A,设 $B=\{(m,k)\mid(m-1)^2+k^2\leqslant r^2,\ r>0\}$,求使 $A\subseteq B$ 的 r 的取值范围.

策略点击 (1) $A\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$,都有 $x\in B$;

(2) 解本题时需仔细观察集合 A、B 中等式与不等式的特点,运用构造和换元的思想方法,这种题型对学生的创造性思维素质的培养具有很好的促进作用.

解 (1) $F(x)$取得最大值时,必有$\begin{cases} k<0, \\ x=\dfrac{\sqrt{4+2m-m^2}}{k}, \end{cases}$ $G(x)$ 取得最小值时 $x=k$.

由题意,得 $\dfrac{\sqrt{4+2m-m^2}}{k}=k$.

即 $$k^2=\sqrt{4+2m-m^2}. \quad ①$$

$\because$ $\sqrt{4+2m-m^2}=\sqrt{5-(m-1)^2}\leqslant\sqrt{5}$, $\therefore$ $k^2\leqslant\sqrt{5}$.

又因为 k 是整数, $k<0$, $\therefore$ $k=-1$.

代入①,得 $m=3$ 或 $m=-1$,

故满足题设条件的实数对为$(3, -1)$和$(-1, -1)$;

(2) 由(1)知 $A=\{(m, k)\mid k^2=\sqrt{4+2m-m^2}, k<0\}$,

通过观察集合 A、B,构造

$$f(m)=(m-1)^2+k^2=\sqrt{5-(m-1)^2}+(m-1)^2.$$

为了化无理为有理,不妨采用三角换元.

令 $m-1=\sqrt{5}\cos\theta$, $0<\theta<\pi$, 则

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sqrt{5}\sin\theta+5\cos^2\theta=-5\sin^2\theta+\sqrt{5}\sin\theta+5 \\ &= -5\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2+\frac{21}{4}\leqslant\frac{21}{4}. \end{aligned}$$

$\because$ $A\subseteq B$,必须且只须 $r^2\geqslant\dfrac{21}{4}$,所以正数 $r\geqslant\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

(二) 命题与充要条件

例 1 命题甲:数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列;命题乙:数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=an^2+bn$ $(n\in\mathbf{N})$,(a、b 为常数,$a\neq0$). 判断这两个命题是否等价,并说明理由.

策略点击 要证明命题 A 与命题 B 等价,既要从 A 推出 B,又要从 B 推出 A,两个方面都要进行论证.

解 等价.

因为数列$\{a_n\}$是等差数列,设它的公差为 d,首项为 a_1,则 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

$\because$ $d\neq0$, a_1 和 d 是确定的常数, $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$,其中 $a=\dfrac{d}{2}$,故 S_n 是一个关于 n 的二次函数,且常数项为 0;

反之,若数列前 n 项和 $S_n=an^2+bn$, $n\in\mathbf{N}$, $a\neq0$.

$n=1$ 时, $a_1=a+b$;

$n\geqslant2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+bn-a(n-1)^2-b(n-1)=2an-a+b$,

$\therefore$ $a_n=\begin{cases} a+b, & \text{当 } n=1 \text{ 时}; \\ 2an-a+b, & \text{当 } n\geqslant2 \text{ 且 } n\in\mathbf{N} \text{ 时}. \end{cases}$

$\therefore$ $a_n=2an-a+b$, $n\in\mathbf{N}$.

$$a_{n+1}-a_n=2a(n+1)-a+b-2an+a-b=2a\neq 0\ (n\in \mathbf{N}).$$

所以数列$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列.

例 2 已知函数 $f(x)=(a^2-1)x^2+(a-1)x+3$,分别写出 $f(x)>0\ (x\in \mathbf{R})$ 的一个充分不必要条件及充要条件.

策略点击 本例第一问的答案是开放的,这就告诉我们思考问题必须全面周到.

解 “$\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta<0.\end{cases}$”即“$a\in\left(-\infty,-\frac{13}{11}\right)\cup(1,+\infty)$”是“$f(x)>0\ (x\in \mathbf{R})$”的一个充分不必要条件,这是因为“$\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta<0\end{cases}$”表示 $f(x)$的图象是开口向上,且在 x 轴上方的抛物线,故有 $f(x)>0\ (x\in \mathbf{R})$. 但当 $a=1$ 时也有 $f(3)=3>0\ (x\in \mathbf{R})$(本题答案不唯一,如“$a=1$”也是“$f(x)>0\ (x\in \mathbf{R})$”的一个充分不必要条件).

由上述讨论可知“$\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$或 $a=1$”,即“$a\in\left(-\infty,-\frac{13}{11}\right)\cup[1,+\infty)$”是“$f(x)>0\ (x\in \mathbf{R})$”的充要条件.

例 3 已知命题甲:$3^{-|x|}-\frac{1}{3}>0$;命题乙:$0.1^{\lg x^2}>1$,那么乙是甲的(   ).

(A) 充分非必要条件　　　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　　　(D) 既非充分条件,也非必要条件

策略点击 这里应把两命题都进行等价变换,使之取得较简单形式后再作判断,等价变换是一种手段,化简使之易于判断才是目的.

解 $3^{-|x|}-\frac{1}{3}>0\Leftrightarrow 3^{-|x|}>3^{-1}\Leftrightarrow -|x|>-1\Leftrightarrow |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$;

$$0.1^{\lg x^2}>1\Leftrightarrow \lg x^2<0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ -1<x<1.\end{cases}$$

于是容易得本题应选(A).

(三) 函数与反函数

例 1 根据条件,分别求出 $f(x)$的表达式,

(1) 已知 $f(3x+1)=4x+3$,求 $f(x)$;

(2) 已知 $f(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$,求 $f(x)$;

(3) 已知 $f(x)$是一次函数,且 $f(1)=1$,$f[f(2)]=2f^{-1}(4)$,求 $f(x)$.

策略点击 由已知条件,求 $f(x)$的解析式的方法通常有换元法、参数法、配凑法、待定系数法以及方程组求解法,都是一种变元代换的方法,在变元代换过程中,都要注意变元取值范围的变化.

解 (1) **解法一(换元法)** 令 $3x+1=t$,则 $x=\frac{1}{3}(t-1)$.

$\therefore\ f(t)=\frac{4}{3}(t-1)+3=\frac{4}{3}t+\frac{5}{3}$,　$\therefore\ f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$;

解法二(参数法) 令$\begin{cases}x=3t+1,\\ y=4t+3,\end{cases}$消去参数 t,

得　$y=4\cdot\frac{x-1}{3}+3$,即 $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$;