罗增儒数学奥林匹克丛书

LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

新世纪版

高中数学奥林匹克

同步辅导 专题讲练 激发兴趣 拓展思维

二年级

罗增儒 主编

陕西师范大学出版社

责任编辑 朱永庚 / 封面设计 徐 明 / 责任校对 郭健娇

罗增儒 1945年生，广东惠州人，陕西师范大学教育考试研究所所长、教授，硕士生导师。获曾宪梓教师奖，享受国务院的政府特殊津贴。是中国数学奥林匹克首批高级教练，长期从事数学竞赛的命题、解题、辅导和理论研究工作。1984年以来，已为全国初中联赛、高中联赛、冬令营提供了10余道正式试题，多次聘为高、初中联赛命题组成员。1992年，曾受到中国数学奥委会与中国数学普委会的联合表彰；1993年，他所主持的“奥林匹克数学学科建设”研究课题获全国高校优秀教学成果国家级二等奖。主编的小学、中学、大学数学奥林匹克丛书受到广泛的欢迎。代表作有《数学竞赛导论》、《数学解题学引论》、《直觉探索方法》。

ISBN 7-5613-0664-4

9 787561 306642 >

ISBN 7-5613-0664-4/G·467

定价：7.50元

罗增儒数学奥林匹克丛书

高中数学奥林匹克

二年级

主　编　罗增儒
副主编　李元中
　　　　文　锐
　　　　魏暹荪

陕西师范大学出版社

图书代号:JF185300

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克.二年级/罗增儒主编.—西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN7-5613-0664-4

Ⅰ.高… Ⅱ.罗… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第15587号

责任编辑 朱永庚
封面设计 徐 明
责任校对 郭健娇
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
E-mail: nuph@pub.xaonline.com
经 销 新华书店
印 刷 西安政治学院印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 7.5
字 数 165千
版 次 2001年7月第1版
印 次 2001年7月第2次
定 价 7.50元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216-144610-44-815
读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。
电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864

让中学生更加聪明——写在前面

本书是在《高中数学奥林匹克系列教材》(1992 年出版)的基础上,根据高中数学教学新大纲和第二课堂发展新需要而修订重组的,内容已作了充实,结构也作了调整.但是,我们对数学竞赛的认识始终如一,编写的指导思想也坚定如初.所以,我们仍保留"让中学生更加聪明"作为本书的前言.

一、数学竞赛的认识

把数学竞赛看成"解难题的竞赛"是一种浅薄的误解,把数学竞赛培训看成"数学工作者的预科教育"是一种不恰当的愿望,我们对数学竞赛的基本看法是:

1. 较高层次的基础教育

数学竞赛活动在本质上是一种基础教育,但更强调素质的培养和能力的发展.如果说,日常教学已经从"一纲一本"的封闭中走了出来,开始踏上"一纲多本"的大道,那么数学竞赛所体现的教育,实质上已突进到"多纲多本"的前哨.从而为学有余力的学生提供了自由发展和充分表现的机会.种种情况表明,许多学生的数学功底是在第一课堂准备的,而思维潜能却常常在第二课堂才爆发出来.

2. 数学文化的生动普及

历史已经昭示,未来将进一步证实,高科技的本质是一种数学技术;扫除"数学盲"的任务必将代替扫除"文盲"的工作;数学不仅是一门科学、一项艺术,而且也是一种文化.因此,数学竞赛最深刻的历史

作用，不在于选拔出几个数学尖子，而在于普及了数学文化. 中学教材所提供的，基本上是历史的数学或数学的历史，而数学竞赛则可以渗透今天的数学或数学的今天. 许多体现现代思想和高等背景的"活数学"正是通过竞赛的桥梁传播到中学校园的. 虽然大量的选手将来并不以数学为职业，但他们从数学竞赛的文化熏陶中所获得的洞察力和创造机智，将受益终生.

3. 自由灵活的愉快教学

数学竞赛培训与日常教学相比，特点是有较多的自由度和较大的灵活性. 教师可以根据反馈随时调节信息的速度、强度和顺序. 每个学生不仅可以听，可以讨论，而且也可以写作小论文. 总之，这是一个开放的系统，十分有利于实施愉快的教与学.

所有这一切可以归结到一点，数学竞赛将使中学生更加聪明.

二、写作安排的特点

本着"让中学生更加聪明"的精神，我们依据自己长期从事各级数学竞赛辅导的经验，挑选了一批有较高训练价值的素材，让同学们通过课外的、自由活泼的学习，将朴素的数学兴趣上升为真诚的科学热忱，将潜在的数学功底优化为闪光的数学才华.

在编排上，我们按照"高中数学竞赛大纲"的内容，组织成 7 大知识块：平面几何、立体几何、解析几何、代数、数论基础、组合初步和奥林匹克方法，并细分为 46 个小专题，然后，按照各年级的知识水平分成 3 册，各册既相对独立又前后呼应，结构成一个有机的整体. 其整体性的特点主要有：

1. 立足高考　着眼竞赛

过去的许多竞赛辅导材料，一上来就立足于竞赛，师生曾有反映：吃不消. 我们在实践中也感到，应该在课堂学习与数学竞赛之间加一个"中途点". 因此，我们的教材设计原则是，分两步走，先从高处接近高考，再从低处接近竞赛. 就是说，以教材的加深加宽为基础，先进行高观点下的高考型的思维训练，然后再逐步加强竞赛的重点和

热点,到高三分册才将竞赛的内容推向高潮.这其中,自始至终强调数学方法的训练和策略意识的培养.有两方面的事实顺便提起.

(1)1997年全国高中数学联赛推出了一个改革意见,将原来的一试、二试分成两个层次的考试,一试定名为“全国高中数学联赛”,命题范围以现行高中数学教学大纲为准,试题难度大体相当于普通高考中档、高档的试题.二试才以现行高中数学竞赛大纲为准.

这个改革意见与我们当初的写作思想不谋而合.对于参加培训的学生来说,这也是一个万全之策,退可站稳高考脚跟,进可迈向竞赛高台.

(2)读者通告我们,《高中数学奥林匹克系列教材》自1992年出版以来,仅第一册就有好几道题目成为正式高考(或竞赛)题的背景与原型(参看原书P·18,P·70,P·106,P·115等处,其中不难对照出1996年的两道高考解答题),这种偶然的巧合,说明我们“立足高考,着眼竞赛”是认真的.

2. 同步安排　系统跟踪

我们把7大知识块分成46个小专题后,不是再按原知识点合并,而是与教学同步地分到各年级分册.比如“平面几何”这一知识块,我们一方面与立体几何互相渗透,另一方面又设“向量方法”、“平面几何的著名定理”、“几何中的运动”、“趣味平面图形”、“等周问题”等多个小专题渐次安排到高一、高二、高三分册.对于数学解题的重要方法,除在各讲各例中尽量体现外,还专门组织了“反证法”、“数学归纳法”、“构造法”、“解析法”、“抽屉原理”、“数学奥林匹克的技巧”(一)、(二)、(三)等众多专题,由少到多地穿插到三个年级.

3. 立体设计　螺旋提升

就是说,把各种因素、各种关系、各种要求都尽可能考虑进去,并从整体上协调起来,使得学生便于学习,教师便于辅导,既综合教育功能强又适应面广.

在编排上,高一分册以中学教材的加深加宽为主,高二分册加强

了高考的重点和竞赛的热点,高三分册突出竞赛、达到高中联赛第二试甚至接近冬令营的水平.

在每一专题的写作中,既注意知识点的数量、典型性和训练价值,又注意直接从中学课本中寻找生长点.例题的编排,通常都有较低的起点、较高的落点、较宽的跨度,教学中不必求齐求全.习题的配备,既注意到类型又注意到数量,既为学生准备较多的练习机会又为教师提供更大的选择余地.

在结构上,我们交叉安排,纵有7大知识块作经线,横有课本、高考、竞赛3个思维层次作纬线.代数,几何,数论,组合这4个数学竞赛的支柱都明显地在各年级中循环,其中也有从初中到高中的循环,但都不是简单重复,而是巩固深化、拾级登高的螺旋上升.

三、新旧教材的交接

新的高中教学大纲已经颁布,新教材正在一些省市试用,我们这本书是按新教材体系安排的,但在例题、习题的配备上考虑到新旧教材并存的需要.各地在使用本书时可根据自己的实际调整前后次序和增删例题、习题.比如,立体几何内容,原来安排在高一,现已移到高二下学期,而在高一增添了向量;相应的,数列和不等式也移到了高一,这对使用旧教材的地方就显得不方便了.但是总体上来说,仍不失其同步性.

作为前言的最后,谨向帮助、支持本书出版的有关人士表示由衷的感谢,也向关心本书将提出批评指正意见的读者提前表示欢迎与谢意.

罗增儒

2001年4月

目　录

(习题的详细解答请参见罗增儒主编的《高中数学奥林匹克题解》)

第一讲 平面几何的著名定理

除了初中几何课本已经介绍的重要定理之外，平面几何还有许多著名的定理，今择其应用较广的几个介绍如下.

一、梅内劳斯定理

一直线截△ABC 的边 BC，CA，AB 或其延长线于 D，E，F，求证

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \qquad ①$$

【说明 1】 不过顶点的直线与三角形 3 边的关系有两种情况：(1)若直线与三角形的一边交于内点，则必与第二边交于内点，与第三边交于外点(延长线上的点)，(2)直线与三角形的三边均交于外点，因而本题的图形有 2 个.

【说明 2】 结论的结构是，三角形三边上 6 条被截线段的比，首尾相连，组成一个比值为 1 的等式.

$$\frac{\text{端点到截点}}{\text{截点到端点}}\cdot\frac{\text{端点到截点}}{\text{截点到端点}}\cdot\frac{\text{端点到截点}}{\text{截点到端点}}=1.$$

【说明 3】 这个结论反映了形与数的结合，是几何位置的定量描述："三点共线"量化为比值等于"1"，反过来，①式成立时，可证"D，E，F 共线"(逆定理也成立). 这里的"1"，如果考虑到线段的方向，应

为“-1”.

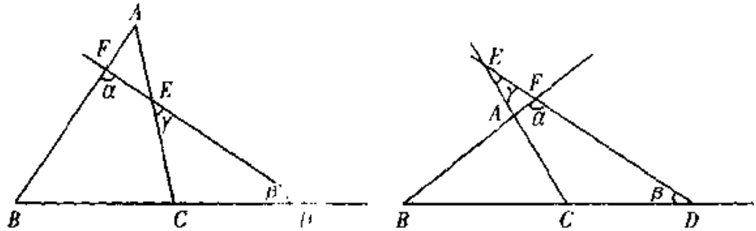

图 2-1-1

【说明 4】 此题 证明的基本想法是，将 6 条线段的比转化为 3 条线段 a,b,c 的连环比，能使分子分母相约 $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$. 为此，可有多种作平行线的方法. 下面，提供一个不作辅助线的三角证法.

【证明】 如图 2-1-1，在 $\triangle FBD$，$\triangle CDE$，$\triangle AEF$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{BD}{BF}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\frac{CE}{CD}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

$$\frac{AF}{AE}=\frac{\sin\gamma}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

相乘即得.

一般地，设 D,E,F 为 $\triangle ABC$ 三边(或其延长线)上三点，且 $\frac{AF}{FB}=\lambda_1,\frac{BD}{DC}=\lambda_2,\frac{CE}{EA}=\lambda_3$，则有

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},$$

从而 $$S_{\triangle DEF}=0\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1.$$

二、塞瓦定理

设 O 是 $\triangle ABC$ 内任意一点，AO,BO,CO 分别交对边于 D,E,F，则

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

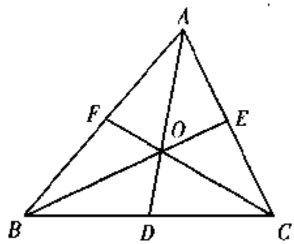

图2-1-2

【证明1】 (用梅内劳斯定理)

$\triangle ADC$ 被直线 BOE 所截,有

$$\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AE}{EC}=1.$$

$\triangle ABD$ 被直线 COF 所截,有

$$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DO}{OA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

相除即得.

【证明2】 (面积证法)

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COD}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ADC}-S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}.$$

同理 $$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}},$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}},$$

相乘即得.

【证明3】 (物质重心)在 A,B,C 处各放一重物,让其质量分别为 m_A,m_B,m_C,使其重心正好在 O 处,则 D,E,F 分别为 BC, CA, AB 的重心,有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{m_C}{m_B},\frac{CE}{EA}=\frac{m_A}{m_C},\frac{AF}{FB}=\frac{m_B}{m_A},$$

相乘即得,

逆定理 在$\triangle ABC$三边(所在直线)BC,CA,AB上各取一点D,E,F,若有

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$

则 AD,BE,CE 平行或共点.

【证明】 AD 与 BE 或是平行或是相交

(1)若 $AD/\!/BE$(图 2－1－3),则

$$\frac{BC}{BD}=\frac{EC}{EA},$$

代入已知式,可推出

$$\frac{AF}{FB}=\frac{DC}{CB}.$$

有 $AD/\!/CF$,从而 $AD/\!/BE/\!/CF$.

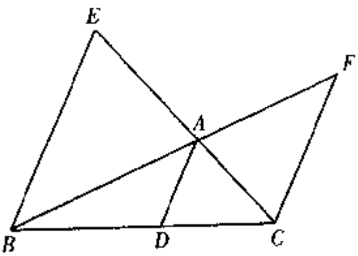

图 2－1－3

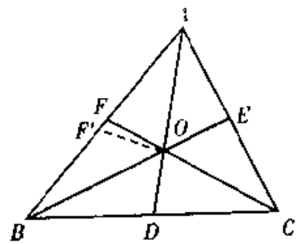

图 2－1－4

(2)若 AD 与 BE 相交于 O(图 2－1－4),则连 CO 交 AB 于 F',由塞瓦定理,有

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1,$$

与已知式相比较,得

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB},$$

合比 $$\frac{AF'}{AB}=\frac{AF}{AB},$$

有 $$AF'=AF,$$

得 F' 与 F 重合.

三、三角形的重心、内心、垂心、外心.

1. 三角形的3条中线共点(重心).

由塞瓦定理的逆定理即得.

2. 三角形的3条角平分线共点(内心).

将角平分线定理代入塞瓦定理的逆定理即得.

3. 三角形的3条高线共点(垂心).

【证明】 先证锐角三角形时成立,如图2-1-5由Rt$\triangle ABD \backsim$ Rt$\triangle BCF$知

$$\frac{BD}{BF}=\frac{AB}{BC}.$$

同理 $\frac{CE}{DC}=\frac{BC}{AC}, \frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}$,

得 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{BF}\cdot\frac{CE}{DC}\cdot\frac{AF}{AE}=1.$

由塞瓦定理的逆定理知3条高线AD, BE, CF共点.

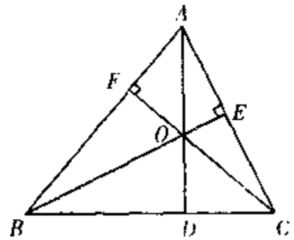

图2-1-5

再证钝角三角形. 如图2-1-6,设高BE, CF延长交于G,则$\triangle GBC$为锐角三角形,它的3条高线CE, BF, GD共点. 因为CE, BF已共点A,所以CE, BF, GD也共点A,也就是$\triangle ABC$的3条高线DA, BE, CF相交于一点G,

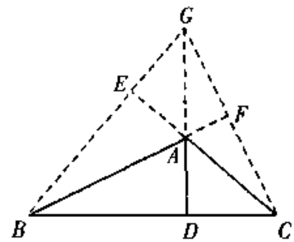

图2-1-6

最后,直角三角形显然成立,因而,对任意三角形都有3条高线共点.

4. 三角形3边上的垂直平分线相交于一点(外心).

【证明】 对于$\triangle ABC$,作其中位线三角形DEF,由$\triangle DEF$的3条高线共点得,$\triangle ABC$的3条垂直平分线共点(也可以先证外心定理,再证垂心定

理).

四、斯特瓦尔特定理

在$\triangle ABC$中,D是BC上一点,且$\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n}$,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,则

$$AD^2=\frac{mb^2+nc^2}{m+n}-\frac{mna^2}{(m+n)^2}.$$

【证明】 如图2-1-7,在$\triangle ABD$与$\triangle ABC$中,用余弦定理,

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B,$$
$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B.$$

消去$\cos B$,得

$$\begin{aligned}AD^2&=\frac{AC^2\cdot BD+AB^2\cdot DC}{BC}-BD\cdot DC\\&=\frac{mb^2+nc^2}{m+n}-\frac{mna^2}{(m+n)^2}.\end{aligned}$$

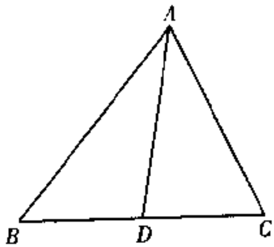

图2-1-7

推论1 三角形的中线长为

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

推论2 三角形的角平分线长为

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

其中$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

推论3 三角形的高线长为

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

五、西姆松定理

过三角形外接圆上任意一点作3边的垂线,则3垂足共线(称为西姆松线).

反之,若一点到三角形3边所在直线的垂足共线,则该点在三角

形的外接圆上.

【证明】 如图 2-1-8,连 DE, DF,由 $PD\perp BC$, $PE\perp AC$, $PF\perp AB$ 知,点 P,B,F,D 及 P,D,C,E 分别共圆

$$\angle PDF+\angle PBF=180^\circ, \quad ①$$

$$\angle PDE=\angle PCE. \quad ②$$

又由 P,A,B,C 共圆,得

$$\angle PCE=\angle PBF. \quad ③$$

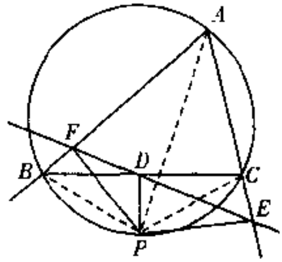

图 2-1-8

由①,②,③得

$$\angle PDF+\angle PDE=180^\circ, \quad ④$$

从而 E,D,F 共线.

反之,由①,②,④可得③式成立,于是 P,A,B,C 共圆,即 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

六、托勒密定理

若四边形的两对边的乘积之和等于它的对角线的乘积,则该四边形内接于一圆,反之亦真.

【证明】 (用西姆松定理)如图 2-1-9,四边形 $ABCD$ 内接于圆,过 D 作$\triangle ABC$ 各边 BC,CA,AB 的垂线,垂足分别是 A_1,B_1,C_1. 因为 A,C_1,B_1,D 四点共圆,且 AD 是直径,所以在$\triangle AB_1C_1$ 中用正弦定理,有

$$B_1C_1=AD\sin\angle BAC=AD\cdot\frac{BC}{2R};$$

同理

$$C_1A_1=BD\cdot\frac{AC}{2R},$$

$$A_1B_1=CD\cdot\frac{AB}{2R},$$

由西姆松定理知, A_1, B_1, C_1 三点共线, 故 $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$,即

$$CD\cdot\frac{AB}{2R}+AD\cdot\frac{BC}{2R}=BD\cdot\frac{AC}{2R},$$

即 $\quad AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$

反之，若 D 不在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，由西姆松定理知，A_1,B_1,C_1 不共线，得

$$A_1B_1+B_1C_1>A_1C_1,$$

从而 $\quad AB\cdot CD+BC\cdot AD>AC\cdot BD.$

与已知矛盾(上式也是一个重要不等式).

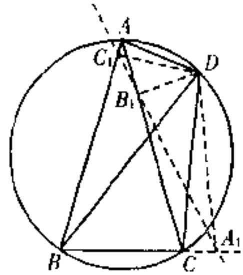

图 2－1－9

七、厄尔多斯——摩德尔定理

设 P 是 $\triangle ABC$ 内或周界上任一点，P 到 3 边距离分别为 x,y,z，则

$$PA+PB+PC\geqslant 2(x+y+z).$$

等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 P 是 $\triangle ABC$ 的中心.

【证明】 如图 2－1－10，过 P 作直线 MN 交 AB 于 M，交 AC 于 N，使 $\angle AMN=\angle ACB$，有

$$\triangle AMN\backsim\triangle ACB,$$

得 $\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{b}{a},\dfrac{AN}{MN}=\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{c}{a}.$

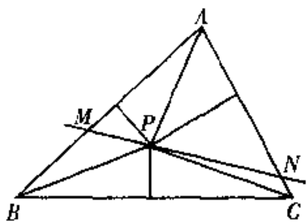

图 2－1－10

又 $\quad \dfrac{1}{2}MN\cdot AP\geqslant S_{\triangle AMN}$

$=S_{\triangle AMP}+S_{\triangle ANP}$

$=\dfrac{1}{2}AM\cdot z+\dfrac{1}{2}AN\cdot y,$

得 $\quad PA\geqslant z\cdot\dfrac{AM}{MN}+y\cdot\dfrac{AN}{MN}=z\cdot\dfrac{b}{a}+y\cdot\dfrac{c}{a},$ ①

同理 $\quad PB\geqslant x\cdot\dfrac{c}{b}+z\cdot\dfrac{a}{b},$ ②