21世纪高等学校教材

线性代数

王 斌 孙志和 主编

国防工业出版社
http://www.ndip.com.cn

21世纪高等学校教材

线性代数

主编 王斌 孙志和

副主编 李志敏 隋思涟 戚云松

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王斌,孙志和主编.—北京:国防工业出版社,2002.9
ISBN 7-118-02899-1

Ⅰ.线... Ⅱ.①王... ②孙... Ⅲ.线性代数
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048069 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
北京奥隆印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 8⅛ 212 千字
2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷
印数:1—5000 册 定价:12.00 元

前　言

数学是源于实际又指导实际的一种思维创造.这种理性思维的培养,对大学生素质的提高、分析问题能力的加强、创新意识的启迪都是至关重要的.线性代数是一门基础数学课程.它的基本概念、理论和方法,具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性.通过对线性代数的学习,不仅使非数学专业的学生掌握现代数学工具,还能对学生素质的培养起到重要作用.

本书介绍线性代数的一些基本知识,可作为高等院校工科专业及专升本相关专业的教材和教学参考书.与同类书相比,本书具有以下特点:

1. 主要内容除根据高等工科院校“线性代数”课程教学基本要求进行编写外,还参照了全国“硕士研究生统一入学考试教学大纲”,对部分内容进行了补充、调整.对超出基本要求的部分加“*”号以便于读者取舍.

2. 针对目前数学教学改革的形势以及数学建模、数学实验等课程的发展状况,适当增加了与本课程有关的数值计算及 MATLAB 方面的内容.

3. 适当增加了例题与习题的数量,将每章的习题分为 A、B 两部分,并附有答案.

4. 增加了应用方面的内容.

青岛建筑工程学院安世仁教授详细审阅了原稿,并提出了许

多改进的意见，谨在此表示衷心地感谢！在本书的出版过程中，得到了许多同志的大力帮助，在此深表谢意！在本书的编写过程中，参考了一些国内同类教材，在此不一一列举，谨表谢意！

限于编者的水平，错误和疏漏在所难免，希望读者随时提出宝贵意见，以便进一步修改.

编　者

2002 年 5 月

目　录

第一章　n 阶行列式

在初等数学中可通过解二元、三元线性方程组引出二阶、三阶行列式的定义．对于 n 元线性方程组，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题．为此，下面介绍全排列等预备知识，然后引出 n 阶行列式的概念．

§1.1　全排列及其逆序数

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个不同元素排成一列，称为一个 n 阶全排列（简称 n 阶排列）．

例如，1 2 3 4 及 2 4 3 1 都是 4 阶排列，2 5 1 3 4 是一个 5 阶排列．

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示．显然 $P_n = n!$．

例如，由 1,2,3 这 3 个元素组成的 3 阶排列，$P_3 = 3! = 6$ 种，其排列为　123，132，213，231，312，321

在一个 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有某个较大的数 p_t 排在较小的数 p_s 前面，则称 p_t 与 p_s 构成一个逆序．一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数．

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列．

例如，排列 2431 中，2 在 1 前面，4 在 1 前面，3 在 1 前面，4 在 3 前面，逆序数为 4，所以，2431 为偶排列．

一般地，计算排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 逆序的方法：设 p_1 与 $p_2\cdots p_n$ 构

成的逆序数为 t_1 个，p_2 与 $p_3\cdots p_n$ 构成的逆序数为 t_2 个，……，p_{n-1} 与 p_n 构成的逆序数为 t_{n-1} 个（t_{n-1} 为 1 或 0），则 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$$

§1.2 对　　换

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个元素 i_s 与 i_t 对调，得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证：先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1\cdots a_l$；$b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1　奇排列调成自然排列的对换次数为奇数，偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

证：由定理 1 知对换的次数就是排列的奇偶性的变化次数，而自然排列是偶排列（逆序数为 0），因此知推论成立.

推论2　n 个元素($n>1$)$1,2,\cdots,n$ 共有$n!$个 n 阶排列，其中奇偶排列各占一半.

证明留给读者.

§1.3　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-1}$$

容易看出:

(1) (1-1) 式右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，(1-1) 式右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(称行标) 排成标准排列 123，而第二个下标(称列标) 排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 三个数的排列. 这样的排列共有 6 种，对应(1-1) 式右端共有 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 t 为 $p_1p_2p_3$ 排列的逆序数，$\sum$ 表示对1,2,3三个数的所有排列取和.

仿此，我们可以把行列式推广到一般情形.

定义 1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$；得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1-2}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如(1-2)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\Delta(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的. 当 $n=1$ 时，$|a|=a$，注意不要与绝对值的记号相混淆.

下面我们来讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任意项

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序

数,对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

这时,这一项的值不变,而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换.设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r,则 r 为奇数;设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1,t_1 与 t 奇偶性改变,则 $r+t_1$ 的奇偶性与 t 的奇偶性相同,即

$$(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$$

于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

这就表明,对换乘积中的两元素的次序,行标排列与列标排列同时作了相应的对换,则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性.经一次对换是如此,经多次对换当然还是如此.于是,经若干次对换,使:

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$(逆序数为 t)变为自然排列(逆序数为 0);

行标排列相应的从自然排列变为某个新的排列,设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$,其逆序数为 s,则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

由此可得

定理 2 *n 阶行列式也可定义为*

$$\boldsymbol{D}=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证:按行列式定义有

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

记
$$\boldsymbol{D}_1=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

按上面讨论知:对于 $\boldsymbol{D}$ 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,总有且仅有 $\boldsymbol{D}_1$ 中的某一项 $(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等;反之,

对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1_{q1}} a_{2_{q2}} \cdots a_{n_{qn}}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D = D_1$.

推论 3 n 阶行列式也可以定义为

$$D_1 = \sum (-1)^{r+t_1} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$$

其中 r, t_1 分别为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 和列标排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

例 1 证明对角行列式(其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

证:第一式是显然的，下面证明第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i, n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中 t 为排列 $n(n-1) \cdots 2\ 1$ 的逆序数，故

$$t = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列

式.

例 2 证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证:由于当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,故 D 中可能不为0的元素 a_{ip_i},其下标应有 $p_i\leqslant i$,即 $p_1\leqslant 1,p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 3 设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_k & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\Delta(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},D_2=\Delta(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明:$D=D_1D_2$.

证:记 $D=\Delta(d_{ij})$,其中

$$d_{ij}=a_{ij},(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\ \cdots,k)$$

$$d_{k+i,k+j}=b_{ij},(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\ \cdots,n)$$

考察 D 的一般项

$$(-1)^l d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$$

由于当 $i \leqslant k, j > k$ 时, $d_{ij} = 0$, 因此 $r_1, \cdots, r_k$ 只有在 $1, \cdots, k$ 中选取时, 该项才可能不为零. 而当 $r_1, \cdots, r_k$ 在 $1, \cdots, k$ 中选取时, $r_{k+1}, \cdots, r_{k+n}$ 只能在 $k+1, \cdots, k+n$ 中选取. 于是 $\boldsymbol{D}$ 中可能不为零的项可以记作

$$(-1)^l a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} \cdots b_{nq_n}$$

这里, $p_i = r_i, q_i = r_{k+i} - k$, 而 l 为排列 $p_1 \cdots p_k (k+q_1) \cdots (k+q_n)$ 的逆序数. 以 t, s 分别表示排列 $p_1 \cdots p_k$ 及 $q_1 \cdots q_n$ 的逆序数, 应有 $l = t + s$. 于是

$$\boldsymbol{D} = \sum_{p_1 \cdots p_k} \sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^{t+s} a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} \cdots b_{nq_n} =$$

$$\left(\sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} \right) \left(\sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^s b_{1q_1} \cdots b_{nq_n} \right) = \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_2$$

根据行列式的定义, 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

为什么?此问题请读者思考.

§1.4 行列式的性质

由定义计算行列式较麻烦, 计算量较大, 尤其是当行列式的阶数较高时. 本节介绍行列式的性质, 利用其性质可以简化行列式的计算.

记

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \boldsymbol{D}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 $\boldsymbol{D}^T$称为行列式$\boldsymbol{D}$ 的转置行列式，$\boldsymbol{D}^T$也可记为$\boldsymbol{D}'$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证:由定义

$$\boldsymbol{D}^T = \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

而由定理 2,有

$$\boldsymbol{D} = \sum(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

故

$$\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{D}$$

由此性质可知,行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证:设行列式

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $\boldsymbol{D} = \Delta(a_{ij})$ 交换 i,j 两行得到的,即当 $k \neq i,j$ 时,$b_{kp} = a_{kp}$;当 $k = i$ 时, $b_{ip} = a_{jp}$, $b_{jp} = a_{ip}$. 于是

$$\boldsymbol{D}_1 = \sum(-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} =$$
$$\sum(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} =$$
$$\sum(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n},$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列,t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为t_1,则$(-1)^t = -(-1)^{t_1}$;故

$$\boldsymbol{D}_1 = -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 交换 i,j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论4 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

证:把这两行(列)互换,有 $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}$,故 $\boldsymbol{D}=0$.

性质3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论5 行列式中某一行(或列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $\boldsymbol{D}$ 等于下列两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

例如:以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上(记作 r_i+kr_j),有