中级自学科学技术丛书

行列式浅说

高揚芝編著

江苏人民出版社

· 內 容 提 要 ·

本書采用排列法講述行列式的基本理論及其应用。主要內容有行列式的定义、性質、展开法，以及行列式在初等代数的应用等。可供高中文化程度的干部、工人、农民閱讀。

科学技术丛书

行 列 式 淺 說

高揚芝編著

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号
江 苏 人 民 出 版 社 出 版
南 京 湖 南 路 十 一 号
新华书店江苏分店发行　江苏新华印刷厂印刷

开本 787×1092 粍1/32　印張 3 1/8　字数 67,000
一九五八年五月第一版
一九五八年五月南京第一次印刷
印数 1—9,000

統一书号： 13100·41
定　　价：(8)三角二分

前　　言

行列式是研究数学的重要工具之一。例如，多元一次方程組的解、三維空間中多个平面組或多个点組的相关位置、n維空間的投影変換、綫性微分方程組等，用行列式来計算是很便利的。給行列式下定义的方法很多，一般的都是用行列式展开式，并利用奇偶排列或奇偶置換来确定展开式中每項的符号。也有用輔助多項式 $V_n(x_1, x_2, \cdots x_n), n=1,2,3,\cdots$ 来确定展开式中每項的符号的講法。此外还有用归納法引出一般行列式的概念。排列法是研究行列式最原始的方法，也是較自然的方法。初学者在掌握了排列法以后，如果要学习置換法是无大困难的。本书采用排列法講述，并在第一章扼要地介紹与行列式的理論有关的排列及組合。为了便于講述一次方程組的解，在第五章扼要地介紹矩陣的概念。为了使讀者对行列式有較全面的認識，在第八章介紹行列式的乘法公式、联式及逆式等。

高　揚　芝　1958年4月

毛主席语录

一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识到实践这样多次的反复，才能够完成。这就是马克思主义的认识论，就是辩证唯物论的认识论。

用心寻找当地群众中的先进经验，加以总结，使之推广。

要把一个落后的农业的中国改变成为一个先进的工业化的中国，我们面前的工作是很艰苦的，我们的经验是很不够的。因此，必须善于学习。

目　　录

第一章　排列与組合的簡单介紹

§1. 排列与組合的定义

排列　設m, n是正整数，且$m \geq n$。我們現在从m个不同的物体中每次取出n个，并依种种不同的次序排成一列，所有可能作成的不同的列数，叫做m个不同的物体取n个作排列。排列数用記号A_m^n表示。

組合　由m个不同的物体中，每次取n个，作为一組，各組之間至少有一个物体与別組不相同，不考虑各組中所含物体的次序。这样，所有可能作成的不同的組数，叫做m个不同的物体取n个作組合。組合数用記号C_m^n表示。

例如有五个人賽跑，有三种不同的奖品发給前三名，問有多少不同的发奖結果。在这問題里奖品有三等，用不同的次序給奖就有不同的結果，所以是5个人中取3个人作排列。

又如有5个候选人，将有三人被选为委員，問有多少不同的选举結果。在这問題里三名委員并无名次区別，故三人当选与次序无关，所以是5个人中取3个人作組合。

研究排列及組合时所說各个不同的物体，叫做元素。常用字母$a, b, c, \cdots\cdots$；或数字$1, 2, 3, \cdots\cdots$表示。

§2. 基本定理

定理　若作第一件事有m个不同的方法，作完第一件事

以后再作第二件事有n个不同的方法，則依次作完兩件事共有mn个不同的方法。

例如从甲地至乙地有 a, b, c, d 四条路，由乙地到丙地有 e, f, g 三条路，則依次由甲地通过乙地到丙地，共有 $ae, af, ag, be, bf, bg, ce, cf, cg, de, df, dg$ 12 个方法，也就是 3×4 个方法。如下图所示：

$$\text{甲地}\quad \begin{array}{c}\xrightarrow{a}\\ \xrightarrow{b}\\ \xrightarrow{c}\\ \xrightarrow{d}\end{array}\quad \text{乙地}\quad \begin{array}{c}\xrightarrow{e}\\ \xrightarrow{f}\\ \xrightarrow{g}\end{array}\quad \text{丙地}$$

一般的情况証法与此相同，就是作第一件事有 m 个方法，作第二件事有 n 个方法，两件事各取一个方法結合起来就可連續作完两件事。第一件事的每一个方法都可与第二件事的每一个方法相結合，所以有 mn 个方法。

推論　若第一件事有 m 个方法，第二件事有 n 个方法，第三件事有p个方法，……則連續完成这些事共有 $m\cdot n\cdot p\cdot$……个方法。

§3．排列数的公式

設由 a, b, c, d, e 五个元素中，每次取三个作排列。

如果第一次取定了 a，則第二次将取 b 或 c、d、e；

如果第一次取定了 b，則第二次将取 a 或 c、d、e；

如果第一次取定了 c，則第二次将取 a 或 b、d、e；

如果第一次取定了 d，則第二次将取 a 或 b、c、e；

如果第一次取定了 e，則第二次将取 a 或 b、c、d。

故由 5 个元素中每次取两个作排列，共有 $ab, ac, ad, ae,$

$ba, bc, bd, be, ca, cb, cd, ce, da, db, dc, de, ea, eb, ec, ed$ 20个排列，就是 5×4 个不同的排列。

再假定ab已取定，第三次将取c或d、e；

如果ac已取定，第三次将取b或d、e；

…………………………………；

如果ed已取定，第三次将取a或b、c。

故由5个元素中每次取3个作排列，共有$5\times4\times3=60$个不同的排列。

一般的由m个不同的元素中每次取n个作排列，共有

$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$个排列。

若$n=m$，則得：

$$\begin{aligned}A_m^m&=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-m+1)\\&=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1\\&=m!。\end{aligned}$$

記号$m!$叫做**自然数m的阶乘**。

事实上第一次从m个不同的元素中取出一个元素，共有m个取法；第二次从第一次取剩下的$m-1$个不同的元素中取出一个元素，共有$m-1$个取法；第三次从第二次取剩下的$m-2$个不同的元素中取出一个元素共有$m-2$个取法；最后第n次从第$n-1$次所剩下的$m-(n-1)$个不同的元素中取出一个，共有$m-(n-1)$就是$m-n+1$个取法。总計从m个不同的元素中取n个元素作成不同的排列，共有$A_m^n=$
$=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$个。

§4. 組合数的公式

由§1所述組合的定义，我們知道从m个不同的元素中每

次取出 n 个作为一組，不考虑元素的次序(就是两組所含的元素相同，仅元素的次序不同，就把它們看作是一个組)。如果将某組中所含的 n 个不同的元素作排列，显然有 $n!$ 个不同的排列，但在組合中这 $n!$ 个排列仅看作是一个組合。所以从 m 个不同的元素中每次取出 n 个作排列，所有的排列数等于相应的組合数的 $n!$ 倍。也就是

$$A_m^n = n!\ C_m^n\ 。$$

故
$$C_m^n = \frac{A_m^n}{n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}。$$

又因

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!(m-n)(m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!}\ 。\qquad (1)$$

如果(1)式中的 n 代以 $m-n$，則得：

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(m-m+n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}\ 。\qquad (2)$$

比較(1)及(2)，得

$$C_m^n = C_m^{m-n}\ 。$$

例如在 97 个物体中取出 95 个作組合，得組合数：

$$C_{97}^{95} = C_{97}^{2} = \frac{97\times 96}{1\times 2} = 4,656\ 。$$

第二章　行列式的起源及定义

§5. 解二元一次方程組，二階行列式

設有方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2。 & (2) \end{cases}$$

(1)式乘以 b_2，得

$$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2。\qquad (3)$$

(2)式乘以 b_1，得

$$a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1。\qquad (4)$$

(3)−(4)，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1。$$

假設 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，用 $a_1b_2-a_2b_1$ 除上式，得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}。$$

用类似的方法，可求得

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}。$$

如果分母

$$a_1b_2-a_2b_1,\qquad (5)$$

用

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\qquad (6)$$

来表示，则(6)式中 a_1, b_1, a_2, b_2 的位置，恰如它們在方程組(1)、(2)中的位置。其次我們考察(6)与(5)的关系，可以看出左上斜对角綫上的两个数 a_1 及 b_2 的乘积，減去右上斜对角綫上的两个数 b_1 及 a_2 的乘积，就是(5)式。(6)式叫做**二阶行列式**。a_1, b_1, a_2, b_2 叫做行列式(6)的元素，$a_1b_2-a_2b_1$ 叫做行列式(6)的展开式。显然可知行列式(6)就是 a_1, a_2, b_1, b_2 的多項式。当 a_1, a_2, b_1, b_2 有确定数值时，行列式亦有确定数値。

同理，$c_1b_2-c_2b_1$ 及 $a_1c_2-a_2c_1$ 也可分别用行列式

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

来表示。那末上述方程組的解是：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}。$$

用行列式表示方程組的解，最便利的地方是 x 与 y 值的分母是行列式，它的元素就是方程組(1)及(2)中 x 与 y 的系数，而且保持它們原有的位置。x 值的分子，是以方程組(1)及(2)的常数項 c_1 及 c_2，代替分母上行列式中 x 的系数 a_1 及 a_2。y 值的分子，是以方程組的常数項 c_1 及 c_2，代替分母上行列式中 y 的系数 b_1 及 b_2。这种記法可以很快的求出方程組的解。

習　題　I

1. 展开行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix}。$$

2. 展开并証明以下行列式:

(a) $$\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}=\sin(x-y)。$$

(b) $$\begin{vmatrix} \log x & \log y \\ n & m \end{vmatrix}=\log\frac{x^m}{y^n}。$$

3. 解以下方程組:

(a) $$\begin{cases} 2x+3y=22, \\ x-2y=4。\end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=0。\end{cases}$$

4. 用行列式表示方程 $ax^2+bx+c=0$ 有等根的条件。

5. 展开并証明以下等式:

(a) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}。$$

(b) $$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 \\ a_2 & mb_2 \end{vmatrix}=m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}。$$

(c) $$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}=0。$$

(d) $$\begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1 \\ a_2+mb_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}。$$

§6. 解三元一次方程組，三階行列式

設有方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1)\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (2)\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3。 & (3)\end{cases}$$

假設 $c_1\neq 0, c_2\neq 0, c_3\neq 0$。为了消去 z，我們用 c_2 乘(1)式，用 c_1 乘(2)式，得

$$a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z=d_1c_2, \quad (4)$$

$$a_2c_1x+b_2c_1y+c_2c_1z=d_2c_1。 \quad (5)$$

(4)−(5)，得

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1。 \quad (6)$$

再用 c_3 乘(1)式，用 c_1 乘(3)式，得

$$a_1c_3x+b_1c_3y+c_1c_3z=d_1c_3, \quad (7)$$

$$a_3c_1x+b_3c_1y+c_3c_1z=d_3c_1。 \quad (8)$$

(7)−(8)，得

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1。 \quad (9)$$

为了从(6)及(9)消去 y，用 $(b_1c_3-b_3c_1)$ 乘(6)式，用 $(b_1c_2-b_2c_1)$ 乘(9)式，得

$$(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)y$$
$$=(d_1c_2-d_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1), \quad (10)$$

$$(a_1c_3-a_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)y$$
$$=(d_1c_3-d_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)。 \quad (11)$$

(10)−(11)，得

$$[(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)-(a_1c_3-a_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)]x$$
$$=(d_1c_2-d_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)-(d_1c_3-d_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)。$$

整理上式，并用 c_1 除上式两边，得

$$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)x$$
$$=(d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3-d_1b_3c_2)。$$

假設上式中 x 的系数不是0，则

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1-d_2b_1c_3-d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2}。$$

用类似的方法，可以求得：

$$y=\frac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1-a_2d_1c_3-a_1d_3c_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2}。$$

$$z=\frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1-a_2b_1d_3-a_1b_3d_2}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2}。$$

如果上式的分母用

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

来表示，則（12）式叫做**三阶行列式**。它的展开式就是它所代表的分母。觀察分母中各項，可以得出三阶行列式的展开法。

先將原行列式的元素照原位置写出，再在它的右边添上行列式的前两列，如下所示：

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

沿左上斜平行綫的三个元素的乘积如 $a_1b_2c_3$，$b_1c_2a_3$，$c_1a_2b_3$，各給以正号；沿右上斜平行綫的三个元素的乘积如 $a_3b_2c_1$，$b_3c_2a_1$，$c_3a_2b_1$，各給以負号；它們的代数和就是行列式(12)

的展开式。用行列式記x,y,z的值，各为

$$x=\frac{\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}。$$

这里提出一个問題：四个未知量的一次方程組的解可否用四阶行列式的商来表示？四阶行列式的展开式是怎样的？实际上四阶行列式不能用§5、§6中所述的方法展开，必須根据§5、§6的結果，推出一般行列式的定义和它的展开法。

習　題　II

1. 求以下行列式的値：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}。$$

2. 展开幷証明：

$$\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 0 & \cos x & \sin y\\ 0 & \sin x & \cos y\end{vmatrix}=\cos(x+y)。$$

3. 展开以下行列式：

(a) $\begin{vmatrix}0 & n & m\\ -n & 0 & n\\ -m & -l & 0\end{vmatrix}$。　(b) $\begin{vmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{vmatrix}$。

4. 展开幷証明以下等式：