

保 險 數 學

李志賢著

財政出版社

保 險 数 学

李 志 賢 著

財 政 出 版 社

1958年·北京

內 容 提 要

本書基本上以康辛著“苏联国家保險”所涉及的數學範圍作為中心，扼要地介紹了有關保險業務的应用數學以及保險業務的統計方法。

在人寿保險方面，自死亡表、利率開始，敘述了各種保險條件的純費率、毛費率、理論準備金及實際準備金的基本計算方法。

在或然率與統計理論方面，本書介紹了怎样从已知的損失率來估算賠款額，承保面與賠款額動蕩幅度的關係，離勢系数怎样能反映保險事業的財政穩定性以及再保險的是否需要，怎样來測驗業務實績中是否有显著偏差存在，業務指標消長趨勢的分析，以及怎样來確定適當的費率標準等問題。

此外，本書還列入了開平方、常用對數、級數、年金、二項式定理及統計圖示法等几章作為讀者循序漸進的階梯，讀者即使未讀“苏联国家保險”，也能從本書有系統地學習苏联在保險運算方面的先進經驗。

保 險 數 學

李 志 賢 著

*

財 政 出 版 社 出 版

(北京鼓樓趙府街40號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第097號

財政出版社印刷廠印刷 新華書店總經售

*

850×1168耗1/32·7 單印張·190千字

1958年3月 第1版

1958年3月北京第1次印刷

印數：1—1,000 定價：(10) 1.50元

統一書號：4066·63

緒 言

保險事業是企業的一種。保險公司在收取保險費後，如保險標的在保險期限內發生損失，由公司按保險契約的約定，負賠償之責。是以保險事業的成本核算，與其他企業有顯著的不同。

保險公司除制定保險契約的條款，研究開展業務的方式方法外，另一方面同樣重要的工作，則為制訂適當的費率標準，預計保費收入及可能支出的賠付金額。保險事故的發生，如以個別的承保標的言，固可謂事出偶然，但以公司總的承保標的言，則根據大數法則，自有其一定的規律性。因此保險公司運用數學理論，亦能有把握地預計其業務成本。

有關保險事業的數學書籍，以往在我國殊不多見。自蘇聯康辛同志所著的“蘇聯國家保險”一書經中國人民保險公司譯成中文本出版後，我們方始看到，蘇聯早已運用很多的數學理論作為研究各種保險問題的重要工具。這真是值得我們深入學習的先進經驗。

“蘇聯國家保險”所載的數學理論，主要是涉及人壽保險費率及準備金的計算，逐年損失率升降趨勢的測定，承保面與損失率動蕩幅度的關係，最高自留額的推算，以及公司財政穩定性的分析等幾個方面。這都是研究保險實績，預計保險成本，核定或修訂費率標準的重要指針。

康辛同志所示的數學理論，大都以代數學及統計學為基礎，但其中很有一部分的理論，則是為了保險上的需要，經在上述基礎上進一步研究運算的結果，如人壽保險費率及準備金的計算，公司財政穩定性的分析等，即為明顯的例子。這一部分的數學理論，亦可謂已脫離了普通數學的範疇而形成了保險方面的專門數學。

由于“苏联国家保險”沒有多余的篇幅將所引用的數學理論詳敘其來源或形成過程，同時這些理論又大都不見載于普通的數學書籍，故同志們在學習“苏联国家保險”時，對這些數理問題也許難予一一領會。因此我不揣愚昧，在业余之暇試寫了這一本書，希望它對研究保險學的同志們能給予一定的幫助。

根據“苏联国家保險”所示數學理論的範圍，本書的輪廓，以敘述人壽保險費率與準備金的計算，理論頻數分配及二元分配在保險統計上的運用作為中心。此外還扼要地列入了開平方，常用對數，年金，或然率，統計圖示法等幾章，作為讀者循序漸進的階梯。在每一章的末節，還插入一些有關的練習題，並將答案列入附錄。讀者在讀完每一章後，可借以測驗一下自己的領會程度。

在“苏联国家保險”中有一部分所引用的數學理論，如以 k 來決定或然率及計算最大限額等問題，與我個人的見解有些出入。本書對這些問題，在第十三章中或者運用不同的方法作了計算，或者在提法上稍稍作了修改。關於在論點上的參差之處，亦在該一章末后的附註中作了說明。我的管見恐亦未必正確，但我还“執經問難”地提了出来，以與康辛同志相商榷。

我雖想將有關的保險數學理論作淺顯的敘述，但是限于學力水平，書中錯誤之處一定是難免的，也許是很多的。尚請同志們不吝指正。

李志賢

目 录

第一 章 开平方	9
1. 平方构成的图解	9
2. 有关开平方的几点說明	10
3. 开平方法	12
4. 練習題	15
第二 章 幂数及常用对数	16
1. 幂数及其性質	16
2. 对数与逆对数	17
3. 常用对数及其效用	18
4. 首数与尾数	19
5. 对数的正負号	21
6. 对数表使用法	21
7. 練習題	25
第三 章 算术級數及几何級數	26
1. 算术級數	26
2. 几何級數	27
3. 总和符号 Σ	30
4. 練習題	33
第四 章 利息、貼現及年金	34
1. 单利	34
2. 貼現	34
3. 运輸險保額的計算	36
4. 复利	37
5. 年金	39
6. 練習題	43

第 五 章 人壽保險費率的計算	44
1. 死亡表	44
2. 生命期望值	45
3. 利率	46
4. 貸繳純保險費	47
5. 年度純保險費	56
6. 毛保險費	60
7. 練習題	63
第 六 章 人壽保險責任准备金的計算	65
1. 生存分紅年金與期末死亡保費	66
2. 換算數間和純保險費公式間的幾項關係	69
3. 准備金逐步計算法	71
4. 過去法	72
5. 未來法	76
6. 過去法的, V_x = 未來法的, V_x	78
7. 實際責任準備金	80
8. 練習題	91
第 七 章 排列、組合及二項式定理	93
1. 排列與組合的定義	93
2. 复合的原理	94
3. 排列的計算	95
4. 組合的計算	96
5. 幾組同类物品的排列	97
6. 二項式定理	98
7. 練習題	104
第 八 章 或然率	105
1. 或然率的定義	105

2. 或然率的加法定理	107
3. 或然率的乘法定理	109
4. 二項式定理在或然率理論上的运用	112
5. 期望值	115
6. 練習題	116
第九章 統計圖示法	118
1. 垂直座標	118
2. 變數與函數	120
3. 直線方程式	121
4. 座標的變換	123
5. 計數單位的變換	125
6. 練習題	126
第十章 頻數分配	127
1. 何謂頻數分配	127
2. 分組	128
3. 算術平均數	129
4. 頻數分配圖	131
5. 力矩	134
6. 力矩 m_1' 与平均數的關係	135
7. 力矩 m_2 与离勢的關係	136
8. 力矩 m_3 与偏態的關係	143
9. 力矩 m_4 与峰態的關係	144
10. 中心力矩的計算法	145
11. 練習題	148
第十一章 理論頻數分配	149
1. 實際頻數分配與理論頻數分配的可比性	149
2. 期望值	152

3. 常态分配	155
4. 二項分配	165
5. 子样的均方差与母体的均方差	173
6. 練習題	178
第十二章 二元分配	179
1. 最小平方法淺釋	179
2. 力矩	188
3. 响应曲綫	189
4. 标准誤与系联系数	192
5. 座标的变换及計數单位的变换	197
6. 練習題	201
第十三章 保險业务的統計分析	202
1. 賠款額的估計	202
2. 信限	204
3. 离勢系数 k	206
4. 不同保額的业务上的 k	209
5. k 与再保險	216
6. 財产保險純費率的計算	222
7. 財产保險的毛費率	230
8. 业务指标的消长趋势	231
9. 練習題	233
附录一 練習題答案	235
附录二 四位对数表	238
附录三 死亡表	242
附录四 人寿保險換算表	243
附录五 希腊字母表	244
附录六 主要参考書目	244

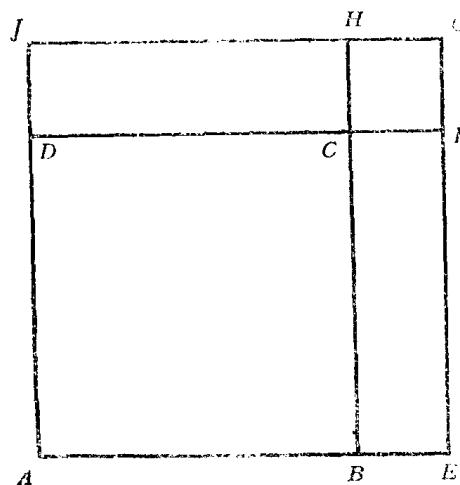
第一章 开平方

在統計分析及其他計算中，我們時需求取一个数值的平方根。
本章将数值的开平方法，作扼要的介紹。

I—I 平方构成的图解

平方的构成，有着一定的規律，請讀者參閱圖一。

图一 平方图



图中 $ABCD$ 为一正方形，每一边之长=10，
 $BEFC$ 与 $DCHJ$ 为两个相等的矩形，其面积各为 10×3 ，
 $FGHC$ 为一正方形，每一边之长=3，
 $AEGJ$ 为一正方形，每一边之长=13，其面积= $ABCD$

$$+ BEFC + DCHJ + FGHC$$

$$\text{是以 } 13^2 = (10+3)^2 = 10^2 + 2(1 \times 10 \times 3) + 3^2 = 10^2 + (2 \times 10 + 3) \cdot 3$$

$$\text{同样地, 我们可证明 } 78^2 = 70^2 + 2 \times 7 \times 10 \times 8 + 8^2 = 70^2 + (2 \times 7 \times 10 + 8) \cdot 8$$

I—2 有关开平方的几点說明

(1) 开方的符号

开方的符号,一般系用根号 $\sqrt{\quad}$ 来表示。开二次方时,根号作 $\sqrt{\quad}$,开三次方时作 $\sqrt[3]{\quad}$,余类推。倘根号中未注数字时,则亦为开平方的根号。

例如 $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt[3]{64} = 4$

又对 n 的平方根,亦可用 $n^{\frac{1}{2}}$ 来表示。这一記写法,将在II—1中作說明。

(2) 一个数值,有两个平方根

每一个数值,有两个平方根。这两个平方根的絕對数是完全相同的,但一个方根为正数,另一个方根为负数。

例如 $\sqrt{36}$ 的两个平方根为 $+6$ 与 -6 ,这是因为 $(+6) \times (+6) = 36$,而 $(-6) \times (-6)$ 亦等于 36 。故在数学上于平方根前慣常用 \pm 号来表示,例如 $\sqrt{36} = \pm 6$ 。但在一般情形下,我們仅取正数的平方根。

(3) 不尽根

有些数值的平方根,是能完全开尽的,例如, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{12.25} = 3.5$ 。試将 3.5 自乘一下,其积数是与 12.25 完全相等的。

但是很多数值的平方根,是不能够开尽的,这样的平方根,称为不尽根。例如我們要計算 2 的平方根时,我們就不能求出一个平

方根，当其自乘时恰恰等于2。对这一算题我們如用开方法即能求出：

$$\begin{aligned}1.4^2 &= 1.96, \\1.41^2 &= 1.9881 \\1.414^2 &= 1.999396 \\(1.414\cdots)^2 &= 1.99999\cdots\end{aligned}$$

我們看到上述各平方数愈来愈接近于2，因此 $1.414\cdots$ 虽为一个不尽根，即可視為2的平方根。

(4) 方根数位的确定

一个数值，有时含有几个数位，例如在1235中，5系在“个”位上，3系在“十”位上，2系在“百”位上，1系在“千”位上，共計有四个数位。

我們知道1的平方根为1，100的平方根为10，是以一个数值n，倘小于100而大于1时，则其平方根系小于10而大于1。如用数学符号来表示，

則当 $100 > n \geq 1$ 时， $10 > \sqrt{n} \geq 1$ 。

同理，当 $10,000 > n \geq 100$ 时，则 $100 > \sqrt{n} \geq 10$ 。

以上証明如n有一个或两个整数数位时， \sqrt{n} 有一个整数数位，如n有三个或四个整数数位时， \sqrt{n} 有两个整数数位。因此我們只須将一个平方数，自其“个”位起每隔两个数位用逗号划成分段，平方数中整数部分所有的分段数，即等于平方根中整数的数位，例如平方数为9,876,579，在分段后为9,87,65,79，其中共有四个分段，故其平方根应有四个整数数位。

既然在平方数中每多两个数位其平方根仅多一个数位，因此在开方时，每次在求得平方根中的一位数字后必須将平方数中的两个数位同时带下，其計算法見下一节。

I - 3 平率方法

為使讀者易于領會起見，茲舉例并作必要的說明如下
〔例一〕試求 $85,849$ 的平方根。

$$\begin{array}{r} 8,58,49 \text{ (293)} \\ 4 \\ \hline 4\ 58 \\ 3 \times 10 \times 2 = 40 \\ + \ 9 \\ \hline 49) 4\ 41 \\ \quad 17\ 49 \\ 29 \times 10 \times 2 = 580 \\ + \ 3 \\ \hline 583) 17\ 49 \end{array}$$

計算法說明：

- 一、將平方數分段後得 $8,58,49$ 。
- 二、在第一分段8中，求出其最大的整數平方根，得2。
- 三、將2的平方4，寫在8的下面，照減後同時將平方數中其次一個分段58帶下，得458。
- 四、此時即要推算平方根中的第二位數字。按已求得的第一位數字，實際上系站在第二位數字的“十”位上（例如第一位數字為2，第二位為9，並起來為29，這裡的2，如對9而言，系站在“十”位上），是以必須先將第一位數字乘10，再乘以2，其積數為40。
- 五、此後為試除階段。以40與458相較，估計在458中，約有40的多少倍呢？我們看到有11倍以上，但是試除數實際上還是要大於40的，故458與實際試除數相較，不致會超過10倍的。今假定其為9倍，即以40加上9後，得49，作為試除數，再以此試除數乘以 $9 = 441$ 。它是稍小於458，這說明此一試除數是適當的。故平方根的第二位數為9。讀者請注意在以上試除中，我們的推算過程，即等於 $(2 \times 10 \times 2 + 9) \times 9$ ，其原理請參閱I - 1。

六、自458中照减441，得17，同时将平方数中其次一个分段49带下，得1749。

七、将已得的平方根数字29乘以10，再乘以2，得580，1749約为580的3倍，故假定試除数为580+3=583，再以3乘之，得1749。此数恰与算式中余数1749相等，故平方根的第三位数字为3。又85,849在开方时恰恰开尽，其平方根为293。

〔例二〕开平方簡法

在上述开方法中，有不少步驟是可以簡化的。茲仍以求85,849的平方根为例，我們可作計算如下：

$$\begin{array}{r} 8,58,49 \text{ (293)} \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad 4 \\ 49) \overline{) 58} \\ \quad \quad \quad 4 \quad 4 \\ 583) \overline{) 17 \quad 49} \\ \quad \quad \quad 17 \quad 49 \end{array}$$

計算法說明：

一、在求得平方根的第一位数字2后，将2自乘，自8中照减，并将平方数中其次一个分段58带下，得458。

二、在試除阶段

(一) 将已求得的平方根数乘以2，其积数为4。

(二) 在458中，将末一位的8暫时不計，得45。

(三) 45約为4的11倍，但平方根的第二位数不可能超过10，今假定其为9。

(四) 在4的后面添上一个9字，得49，就将这49作为試除数，同时在平方根中已求得的2字之后，寫上一个9。

(五) 将49与9相乘，得441。

三、自458中照减441，得17，再将其次一个分段49带下，得1749。

四、将29乘2，得58。在1749中将末一位9暫时不計，得174。174約为58的3倍，即在58后添上一个3字，得583，作为試除数。在平方根中已得的29之后寫上一个3。

五、 583×3 ，得1749。

讀者在能掌握此項簡化計算法後，即會感到开平方并不是一件困难的事情。

〔例三〕求400.853的平方根至四位小數。

对帶有小數的平方數，我們自小數點起先向左將整數部分每兩位划成分段，再向右將小數部分亦每兩位划成分段。倘小數部分中的末一分段僅有一個數位時，我們必需在這一數位後補上一個0，使其仍成為含有兩個數位的分段。因此我們有：

$$\begin{array}{r} 4,00.85,30 (20.0213) \\ 4 \\ \hline 40) \quad 00 \\ \quad \quad 00 \\ \hline 400) \quad 85 \\ \quad \quad 00 \\ \hline 4002) \quad 85 \ 30 \\ \quad \quad 80 \ 0+ \\ \hline 40041) \quad 5 \ 25 \ 00 \\ \quad \quad 4 \ 00 \ 41 \\ \hline 400423) \quad 1 \ 25 \ 59 \ 00 \\ \quad \quad 1 \ 20 \ 12 \ 69 \\ \hline \quad \quad \quad 5 \ 46 \ 31 \end{array}$$

計算法說明：

- 一、在第一个試除阶段中，0为4的0倍，故平方根的第二位数为0。
- 二、在将85带下时，須注意这已是属于平方数的小数部分，故此时試除所得的平方根数，亦属于小数部分。
- 三、在第二个試除阶段中，8为40的0倍，故平方根的第三位为0。
- 四、在第三个試除阶段，853約为400的2倍。
- 五、在以后各阶段中，于做了减法之后，必須每次于余数的后面加上两个0，这是因为平方数中的小数部分在形式上虽已全部带下，我們可視為其后尚有无穷数的0，这样亦并不影响平方数的数值。

〔例四〕試求0.00064之平方根至四位小數。

在这里平方数中沒有整数，故我們自小數點向右，將每两个數位划成一个分段。

$$\begin{array}{r}
 0.00,06,40 (0.02529 \\
 \underline{00} \\
 6 \\
 \underline{4} \\
 45) \quad \underline{2\ 40} \\
 \quad \quad 2\ 25 \\
 502) \quad \underline{15\ 00} \\
 \quad \quad 10\ 04 \\
 5049) \quad \underline{4\ 96\ 00} \\
 \quad \quad 4\ 54\ 41 \\
 \hline
 \quad \quad 41\ 59
 \end{array}$$

故答数为0.0253。

I—4 練習題

(1) 試求5,499,025的平方根。

(2) 試求3.14159265的平方根至四位小數。

(3) 推算 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ 至四位小數。

(提示：可只求 $\sqrt{15}$ ，以省去小數乘小數的麻煩)

(4) 推算 $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{5}{\sqrt{7}}$ 至三位小數

(提示：先將分子分母，各乘以 $\sqrt{21}$ ，以簡化除法)

第二章 幂数及常用对数

常用对数，是简化乘除法及开方的重要工具，其理论与幂数有密切的关系。本章特将幂数与常用对数的性质及其运用方法，作简短的说明。

II-1 幂数及其性质

$a \times a \times a \times a \times a$ 可简写为 a^5 ，在这里 a 称为底数，5 称为 a 的幂数。

$$(1) a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^{3+2} = a^5,$$

$$\text{又 } a^m \times a^n = a^{m+n},$$

是以当底数相同时，其乘法的运算，只须将其幂数相加。

读者请注意 $a \times a^2 = a \times a \times a = a^3$ ，是以 $a = a^1$

$$(2) a^5 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 = a^{5-3},$$

$$\text{又 } a^m \div a^n = a^{m-n},$$

是以当底数相同时，其除法的运算，只须将其幂数相减。

$$(3) (a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5 = a^{15} = a^{5 \times 3},$$

又 $(a^m)^n = a^{m+m+\dots}$ 这里的幂数中共有 n 个 m ， $= mn$ ，故 $(a^m)^n = a^{mn}$ 。

是以在求一个数量的乘方时，只须将其幂数与乘方的次数相乘。

$$(4) a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a,$$

但 $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ ，故 $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ，

同理， $a^{\frac{1}{n}}$ 的 n 次乘方 $= a$