保險数学

李志賢著

財政出版社

保 險 数 学

李 志 賢 著

財 政 出 版 社

1958年·北京

內 容 提 要

本書基本上以康辛著"苏联国家保險"所涉及的数学范圍作为中心，扼要地介紹了有关保險业务的应用数学以及保險业务的統計方法。

在人寿保險方面，自死亡表、利率开始，敍述了各种保險条件的純費率、毛費率、理論准备金及实际准备金的基本計算方法。

在或然率与統計理論方面，本書介紹了怎样从已知的損失率来估算賠款額，承保面与賠款額动蕩幅度的关系，离势系数怎样能反映保險事业的財政稳定性以及再保險的是否需要，怎样来測驗业务实績中是否有显著偏差存在，业务指标消长趋势的分析，以及怎样来确定适当的費率标准等問題。

此外，本書还列入了开平方、常用对数、級数、年金、二項式定理及統計图示法等几章作为讀者循序漸进的阶梯，讀者即使未閱"苏联国家保險"，也能从本書有系統地学习苏联在保險运算方面的先进經驗。

保 險 数 学

李志賢 著

*

財 政 出 版 社 出 版

（北京鼓楼赵府街40号）

北京市書刊出版业营业許可証出字第097号

財政出版社印刷厂印刷　　新华書店总經售

*

850×1168耗1/32 • 7$\frac{1}{8}$印張 • 190千字

1958年3月　第1版

1958年3月北京第1次印刷

印数：1——1,000　定价：（10）1.50元

統一書号：4066·63

緒　言

保險事业是企业的一种。保險公司在收取保險費后，如保險标的在保險期限內发生損失，由公司按保險契約的約定，負賠償之責。是以保險事业的成本核算，与其他企业有显著的不同。

保險公司除制定保險契約的条款，研究开展业务的方式方法外，另一方面同样重要的工作，則为制訂适当的費率标准，預計保費收入及可能支出的賠付金額。保險事故的发生，如以个别的承保标的言，固可謂事出偶然，但以公司总的承保标的言，則根据大数法則，自有其一定的規律性。因此保險公司运用数学理論，亦能有把握地預計其业务成本。

有关保險事业的数学書籍，以往在我国殊不多見。自苏联康辛同志所著的"苏联国家保險"一書經中国人民保險公司譯成中文本出版后，我們方始看到，苏联早已运用很多的数学理論作为研究各种保險問題的重要工具。这真是值得我們深入学习的先进經驗。

"苏联国家保險"所載的数学理論，主要是涉及人寿保險費率及准备金的計算，逐年損失率升降趋势的測定，承保面与損失率动蕩幅度的关系，最高自留額的推算，以及公司財政稳定性的分析等几个方面。这都是研究保險实績，預計保險成本，核定或修訂費率标准的重要指針。

康辛同志所示的数学理論，大都以代数学及統計数学为基础，但其中很有一部分的理論，則是为了保險上的需要，經在上述基础上进一步研究运算的結果，如人寿保險費率及准备金的計算，公司財政稳定性的分析等，即为明显的例子。这一部分的数学理論，亦可謂已脫离了普通数学的范疇而形成了保險方面的专門数学。

由于“苏联国家保险”沒有多余的篇幅将所引用的数学理論詳叙其来源或形成过程，同时这些理論又大都不見載于普通的数学書籍，故同志們在学习“苏联国家保险”时，对这些数理問題也許难予一一領会。因此我不揣愚昧，在业余之暇試写了这一本書，希望它对研究保险学的同志們能給予一定的帮助。

根据“苏联国家保险”所示数学理論的范圍，本書的輪廓，以叙述人寿保险費率与准备金的計算，理論頻数分配及二元分配在保险統計上的运用作为中心。此外还扼要地列入了开平方，常用对数，年金，或然率，統計图示法等几章，作为讀者循序漸进的阶梯。在每一章的末节，还插入一些有关的練习題，并将答案列入附录。讀者在讀完每一章后，可借以測驗一下自己的領会程度。

在“苏联国家保险”中有一部分所引用的数学理論，如以 h 来决定或然率及計算最大限額等問題，与我个人的見解有些出入。本書对这些問題，在第十三章中或者运用不同的方法作了計算，或者在提法上稍稍作了修改。关于在論点上的参差之处，亦在該一章末后的附注中作了說明。我的管見恐亦未必正确，但我还“执經問难”地提了出来，以与康辛同志相商榷。

我虽想将有关的保险数学理論作淺显的叙述，但是限于学力水平，書中錯誤之处一定是难免的，也許是很多的。尚請同志們不吝指正。

李志賢

目　　录

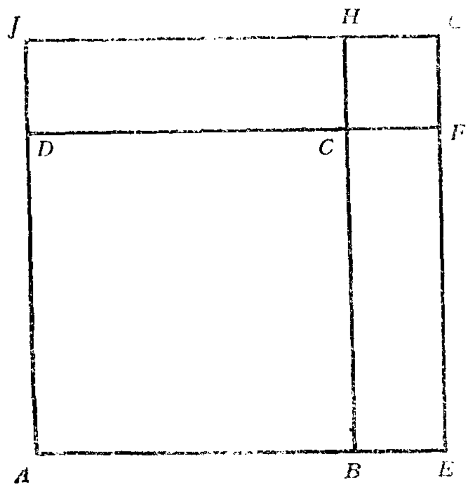
第一章　开平方

在統計分析及其他計算中，我們时需求取一个数值的平方根。本章将数值的开平方法，作扼要的介紹。

Ⅰ—１　平方构成的图解

平方的构成，有着一定的規律，請讀者参閱图一。

图一　平方图



图中$ABCD$为一正方形，每一边之长＝10，

$BEFC$与$DCHJ$为两个相等的矩形，其面积各为10×3，

$FGHC$为一正方形，每一边之长＝3，

$AEGJ$为一正方形，每一边之长＝13，其面积＝$ABCD$

$+BEFC+DCHJ+FGHC$

是以$13^2=(10+3)^2=10^2+2(1\times10\times3)+3^2=10^2+(2\times10+3)3$

同样地，我們可証明 $78^2=70^2+2\times7\times10\times8+8^2=70^2+(2\times7\times10+8)8$

I—2 有关开平方的几点說明

（1）开方的符号

开方的符号，一般系用根号$\sqrt{\quad}$来表示。开二次方时，根号作$\sqrt[2]{\quad}$，开三次方时作$\sqrt[3]{\quad}$，余类推。倘根号中未注数字时，则亦为开平方的根号。

例如 $\sqrt{25}=5$, $\sqrt[3]{64}=4$

又对n的平方根，亦可用$n^{\frac{1}{2}}$来表示。这一記写法，将在II—1中作說明。

（2）一个数値，有两个平方根

每一个数値，有两个平方根。这两个平方根的絶对数是完全相同的，但一个方根为正数，另一个方根为負数。

例如 $\sqrt{36}$的两个平方根为$+6$与-6，这是因为$(+6)\times(+6)=36$，而$(-6)\times(-6)$亦等于36。故在数学上于平方根前惯常用$\pm$号来表示，例如$\sqrt{36}=\pm6$。但在一般情形下，我們仅取正数的平方根。

（3）不尽根

有些数値的平方根，是能完全开尽的，例如，$\sqrt{16}=4$，$\sqrt{12.25}=3.5$。試将3.5自乘一下，其积数是与12.25完全相等的。

但是很多数値的平方根，是不能够开尽的，这样的平方根，称为不尽根。例如我們要計算2的平方根时，我們就不能求出一个平

方根，当其自乘时恰恰等于2。对这一算題我們如用开方法即能求出：

$$1.4^2=1.96,$$

$$1.41^2=1.9881$$

$$1.414^2=1.999396$$

$$(1.414\cdots\cdots)^2=1.99999\cdots\cdots$$

我們看到上述各平方数愈来愈接近于2，因此1.414……虽为一个不尽根，即可視为2的平方根。

（4）方根数位的确定

一个数值，有时含有几个数位，例如在1235中，5系在“个”位上，3系在“十”位上，2系在“百”位上，1系在“千”位上，共計有四个数位。

我們知道1的平方根为1，100的平方根为10，是以一个数值n，倘小于100而大于1时，則其平方根系小于10而大于1。如用数学符号来表示，

則当$100>n\geqslant 1$时，$10>\sqrt{n}\geqslant 1$。

同理，当$10,000>n\geqslant 100$时，則$100>\sqrt{n}\geqslant 10$。

以上証明如n有一个或两个整数数位时，$\sqrt{n}$有一个整数数位，如n有三个或四个整数数位时，$\sqrt{n}$有两个整数数位。因此我們只须将一个平方数，自其“个”位起每隔两个数位用逗号划成分段，平方数中整数部分所有的分段数，即等于平方根中整数的数位，例如平方数为9,876,579，在分段后为9,87,65,79，其中共有四个分段，故其平方根应有四个整数数位。

既然在平方数中每多两个数位其平方根仅多一个数位，因此在开方时，每次在求得平方根中的一位数字后必須将平方数中的两个数位同时带下，其計算法見下一节。

I－3 开平方法

为使讀者易于領会起見，兹举例并作必要的說明如下

〔例一〕試求85,849的平方根。

```
                    8,58,49 (293
                    4
                    4 58
    2×10×2=40
            + 9
             49 )   4 41
                      17 49
    29×10×2=580
              + 3
              583 ) 17 49
```

計算法說明：

一、将平方数分段后得8,58,49。

二、在第一分段8中，求出其最大的整数平方根，得2。

三、将2的平方4，写在8的下面，照减后同时将平方数中其次一个分段58带下，得458。

四、此时即要推算平方根中的第二位数字。按已求得的第一位数字，实际上系站在第二位数字的“十”位上（例如第一位数字为2，第二位为9，并起来为29，这里的2，如对9而言，系站在“十”位上），是以必須先将第一位数字乘10，再乘以2，其积数为40。

五、此后为試除阶段。以40与458相較，估計在458中，約有40的多少倍呢？我們看到有11倍以上，但是試除数实际上还是要大于40的，故458与实际試除数相較，不致会超过10倍的。今假定其为9倍，即以40加上9后，得49，作为試除数，再以此試除数乘以9＝441。它是稍小于458，这說明此一試除数是适当的。故平方根的第二位数为9。讀者請注意在以上試除中，我們的推算过程，即等于(2×10×2+9)×9，其原理請参閱I－1。

六、自458中照减441，得17，同时将平方数中其次一个分段49带下，得1749。

七、将已得的平方根数字29乘以10，再乘以2，得580，1749約为580的3倍，故假定試除数为580＋3＝583，再以3乘之，得1749。此数恰与算式中余数1749相等，故平方根的第三位数字为3。又85,849在开方时恰恰开尽，其平方根为293。

〔例二〕开平方簡法

在上述开方方法中，有不少步驟是可以簡化的。兹仍以求85,849的平方根为例，我們可作計算如下：

```
       8,58,49（293
       4
  49）4 58
      4 41
 583）  17 49
        17 49
```

計算法說明：

一、在求得平方根的第一位数字2后，将2自乘，自8中照减，并将平方数中其次一个分段58带下，得458。

二、在試除阶段

（一）将已求得的平方根数乘以2，其积数为4。

（二）在458中，将末一位的8暫时不計，得45。

（三）45約为4的11倍，但平方根的第二位数不可能超过10，今假定其为9。

（四）在4的后面添上一个9字，得49，就将这49作为試除数，同时在平方根中已求得的2字之后，写上一个9。

（五）将49与9相乘，得441。

三、自458中照减441，得17，再将其次一个分段49带下，得1749。

四、将29乘2，得58。在1749中将末一位9暫时不計，得174。174約为58的3倍，即在58后添上一个3字，得583，作为試除数。在平方根中已得的29之后写上一个3。

五、583乘3，得1749。

讀者在能掌握此項簡化計算法后，即会感到开平方并不是一件困难的事情。

〔例三〕求400.853的平方根至四位小数。

对带有小数的平方数，我們自小数点起先向左将整数部分每两位划成分段，再向右将小数部分亦每两位划成分段。倘小数部分中的末一分段仅有一个数位时，我們必需在这一数位后补上一个0，使其仍成为含有两个数位的分段。因此我們有：

```
        4,00.85,30 (20.0213
        4
   40)   00
         00
    400)   85
           00
    4002)   85 30
            80 04
    40041)   5 26 00
             4 00 41
    400423)  1 25 59 00
             1 20 12 69
                5 46 31
```

計算法說明：

一、在第一个試除阶段中，0为4的0倍，故平方根的第二位数为0。

二、在将85带下时，須注意这已是屬于平方数的小数部分，故此时試除所得的平方根数，亦屬于小数部分。

三、在第二个試除阶段中，8为40的0倍，故平方根的第三位为0。

四、在第三个試除阶段，853約为400的2倍。

五、在以后各阶段中，于做了减法之后，必須每次于余数的后面加上两个0，这是因为平方数中的小数部分在形式上虽已全部带下，我們可視为其后尚有无穷数的0，这样亦并不影响平方数的数值。

〔例四〕試求0.00064之平方根至四位小数。

在这里平方数中沒有整数，故我們自小数点向右，将每两个数位划成一个分段。

```
0.00,06,40 (0.02529
 00
 ---------
      6
      4
45)   2 40
      2 25
502)   15 00
       10 04
5049)   4 96 00
        4 54 41
        ---------
           41 59
```

故答数为0.0253。

Ⅰ—4 練习題

（1）試求5,499,025的平方根。

（2）試求3.14159265的平方根至四位小数。

（3）推算$\sqrt{3}\times\sqrt{5}$至四位小数。

（提示：可只求$\sqrt{15}$，以省去小数乘小数的麻煩）

（4）推算$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{5}{\sqrt{7}}$至三位小数

（提示：先将分子分母，各乘以$\sqrt{21}$，以簡化除法）

第二章　羃数及常用对数

常用对数，是簡化乘除法及开方的重要工具，其理論与羃数有密切的关系。本章特将羃数与常用对数的性質及其运用方法，作簡短的說明。

II—1　羃数及其性質

$a\times a\times a\times a\times a$可簡写为$a^5$，在这里$a$称为底数，5 称为$a$的羃数。

（1）$a^3\times a^2=(a\times a\times a)\quad(a\times a)=a^{3+2}=a^5$，

又$a^m\times a^n=a^{m+n}$，

是以当底数相同时，其乘法的运算，只須将其羃数相加。

讀者請注意$a\times a^2=a\times a\times a=a^3$，是以$a=a^1$

（2）$a^5\div a^3=\dfrac{a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a}=a\times a=a^2=a^{5-3}$，

又$a^m\div a^n=a^{m-n}$，

是以当底数相同时，其除法的运算，只須将其羃数相减。

（3）$(a^5)^3=a^5\times a^5\times a^5=a^{15}=a^{5\times 3}$，

又$(a^m)^n=a^{m+m+\cdots\cdots}$　这里的羃数中共有n个m，$=mn$，故$(a^m)^n=a^{mn}$。

是以在求一个数量的乘方时，只須将其羃数与乘方的次数相乘。

（4）$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$，

但$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$，故$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$，

同理，$a^{\frac{1}{n}}$的n次乘方$=a$