

2003 年MBA联考同步辅导系列丛书



2003年MBA联考同步辅导教材

综合能力考试

数学分册



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

 时代教育

 Harvest Edu

史荣昌等 编著
王式安 尤承业 主审

2003 年 MBA 联考同步辅导教材

综合能力考试

数学分册

王式安、史荣昌、严守权
赵达夫、郑家俊、樊正复

编著

王式安、尤承业

主审



机械工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2003 年 MBA 联考同步辅导教材. 综合能力考试. 数学
分册/王式安编著. —北京: 机械工业出版社,
2002. 7

ISBN 7-111-10749-7

I. 2… II. 王… III. 高等数学—研究生—入学考
试—自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 054928 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 郑文斌 檀庆华 封面设计: 鞠 杨

责任印制: 路 琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·21 印张·504 千字

定价: 38.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677-2527
封面无防伪标均为盗版

策划者前言

这是一套针对 MBA 选拔性考试的必备丛书。

在出版由全国工商管理硕士教育指导委员会组编的统编教材的基础上，机械工业出版社会同北京大学、清华大学、中国人民大学、北京理工大学、西安交通大学、北方交通大学、北京科技大学等几所高校的 MBA 考前辅导名师和资深命题专家，策划了这套 2003 年 MBA 联考系列丛书：《2003 年 MBA 联考同步辅导教材》、《2003 年 MBA 联考模拟试卷》、《MBA 联考英语高分突破》等共 12 本，并将陆续面世。这是为了帮助有志于攻读工商管理硕士学位的广大考生进一步全面、系统地复习有关课程内容，依据最新 MBA 联考大纲和最新 MBA 联考命题方向和趋势而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理，应试针对性极强的 MBA 联考系列丛书。

一、体系明晰、内容精练

《2003 年 MBA 联考同步辅导教材》中包括《英语分册》、《管理分册》、《综合能力考试数学分册》、《综合能力考试 逻辑分册》和《综合能力考试 写作分册》。该体系紧密结合最新大纲和指定用书，精讲精练，题型丰富，数量充足，解析精辟，应试针对性极强。该体系书写体例为：“知识网络图”+“知识要点”+“典型例题”+“习题”。数学分册严格遵循最新考试形式（充分性判断、问题求解）精心制作，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。管理分册附有周毕文教授讲课的光盘，是一本不可多得的管理类辅导书的精品。

《MBA 联考英语高分突破》系列丛书包括《听力分册》、《阅读理解分册》、《商务词汇与动词词组分册》和《词汇实战宝典分册》。这种编写体系的实用性强，使考生易于针对英语弱项，专门训练，以突破英语难关。《听力分册》附有磁带，《阅读理解分册》附有详细注释和长难句分析，《词汇实战宝典分册》附有典型例句、常用搭配、易混淆词，《商务词汇与动词词组分册》更是妙不可言，您不妨去书店找上一本，仔细翻翻。

“2003 年 MBA 联考模拟试卷”包括《英语分册》（配有听力磁带）、《管理分册》、《综合能力考试分册（数学、逻辑推理与写作）》。这套模拟试卷的体系是严格按照最新大纲和最新考卷形式精心设计的，提供全真模拟感觉，是众多作者多年教学、辅导、命题研究的结晶与升华，为您顺利突破 MBA 联考保驾护航。

以上这三套丛书必将帮你顺利解开 2003 年 MBA 联考的成功密码，您要抓牢它。

二、编者队伍阵容强大

这三套丛书的主编、主审和相关作者皆为北京大学、清华大学、中国人民大学、西安交通大学、北京理工大学、北方交通大学、北京科技大学等多年从事教学、辅导工作和有资深命题经验的知名教授和辅导专家。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校和历年 MBA 入学考试中有着举足轻重的影响。

机工版 2003 年 MBA 系列辅导丛书能得以顺利出版和发行,非常感谢 1985~2001 年研究生入学考试资深命题专家王式安教授,清华大学公共英语教学辅导委员会委员侯成源教授,原全国工商管理硕士辅导委员会委员李培煊教授,以及所有主审、主编和作者。

机工版的这三套 MBA 系列辅导丛书是众多辅导名师与专家的结晶,必将成为 MBA 辅导教材的精品。

希望经过我们半年的努力和 20 多位 MBA 辅导专家的倾情之作能够帮助你。

策划人:王 赢

编 者 的 话

数学一直是 MBA 联考中的“重中之重”，对于能否考取你“钟情”的学校将起到关键的作用。历年来，如果只看教材，许多考生面对考试仍会“心有余悸”。如何给数学以充分的准备？我们倾力推出这本《2003 年 MBA 联考同步辅导教材综合能力考试 数学分册》。

本书所选编的典型例题和习题都是 2003 年 MBA 联考数学要求的两种新题型（条件充分性判断题和问题求解）（都是 5 选 1 的单项选择题）。

本书每章内容基本上都分为四个部分：

1. 知识网络图 本图给出了概念和知识点之间的逻辑关系，从而展示出一个清晰的知识点的框架。

2. 知识要点 精要描述主要内容、重要考点和复习注意事项。

3. 知识点评述 阐明知识点之间的逻辑关系，使知识点之间有相应链接。这部分内容都是作者根据多年 MBA 辅导教学经验和体会来写的，定会使你受益非浅。

4. 典型例题详解 典型例题围绕考点，按问题去划分。另外，不同章节的相关考点集中在一起，使本书形成一个严密的体系。

我们的精心策划与编写，只为你在数学复习中，打下深厚基础，从而使你在考试中取得骄人成绩。相信你与我们的愿望都一定会实现。

编 者

目 录

策划者前言

编者的话

第一章 绝对值 比和比例 平均值	(1)
第一节 充分条件	(1)
一、基本内容简介	(1)
二、典型例题详解	(2)
第二节 绝对值	(4)
一、基本内容简介	(4)
二、典型例题详解	(5)
第三节 比和比例	(9)
一、基本内容简介	(9)
二、典型例题详解	(13)
第四节 平均值	(18)
一、基本内容简介	(18)
二、典型例题详解	(19)
第五节 习题及参考答案	(21)
第二章 代数式运算、方程与不等式	(24)
第一节 整式的运算	(24)
一、基本内容简介	(24)
二、典型例题详解	(27)
第二节 分式的运算	(35)
一、基本内容简介	(35)
二、典型例题详解	(37)
第三节 方程与方程组	(39)
一、基本内容简介	(39)
二、典型例题详解	(41)
第四节 不等式与不等式组	(49)
一、基本内容简介	(49)
二、典型例题详解	(51)

第五节 习题及参考答案	(59)
第三章 数列	(64)
一、基本内容简介	(64)
二、典型例题详解	(66)
习题及参考答案	(77)
第四章 常见的几何图形	(82)
第一节 常见简单平面图形	(82)
一、基本内容简介	(82)
二、典型例题详解	(84)
第二节 空间几何体	(88)
一、基本内容简介	(88)
二、典型例题详解	(89)
第三节 习题及参考答案	(92)
第五章 函数 极限 连续	(96)
一、基本内容简介	(96)
二、典型例题详解	(101)
习题及参考答案	(116)
第六章 一元函数微分学	(120)
一、基本内容简介	(120)
二、典型例题详解	(125)
习题及参考答案	(142)
第七章 一元函数积分学	(146)
一、基本内容简介	(146)
二、典型例题详解	(149)
习题与参考答案	(166)
第八章 多元函数微分学	(170)
一、基本内容简介	(170)
二、典型例题详解	(174)
习题及参考答案	(186)
第九章 行列式	(191)
一、基本内容简介	(191)
二、典型例题详解	(194)
习题及参考答案	(209)
第十章 矩阵	(212)
一、基本内容简介	(212)
二、典型例题详解	(217)
习题及参考答案	(229)

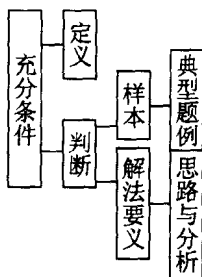
第十一章 向量及线性方程组	(235)
一、基本内容简介	(235)
二、典型例题详解	(240)
习题及参考答案	(255)
第十二章 矩阵的特征值与特征向量	(263)
一、基本内容简介	(263)
二、典型例题详解	(264)
习题及参考答案	(271)
第十三章 随机事件及其概率	(275)
一、基本内容简介	(275)
二、典型例题详解	(283)
第十四章 随机变量	(292)
一、基本内容简介	(292)
二、典型例题详解	(302)
习题及参考答案	(321)

第一章 绝对值 比和比例 平均值

第一节 充分条件

一、基本内容简介

(一) 知识网络图



(二) 知识要点

1. 定义 对两个命题 A 和 B 而言,若由命题 A 成立,肯定可以推出命题 B 也成立(即 $A \Rightarrow B$ 为真命题),则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件.

2. 条件与结论 两个数学命题中,通常会有“条件”与“结论”之分,若由“条件命题”的成立,肯定可以推出“结论命题”也成立,则称“条件”充分.若由“条件命题”不一定能推出(或不能推出)“结论命题”成立,则称“条件”不充分.

例如:不等式 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立.

- (1) $1 < x < 3$ (2) $x > 7$ (3) $x = 5$ (4) $x < 6$
(5) $-1 < x < 6$

此例中,题干“ $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立”,这个命题是“结论”,下面分别给出了 5 个命题都是不同的“条件”.现在我们可以把它们按充分与否分为两类:

条件(1)、(3)、(5) 充分.

条件(2)、(4) 不充分.

(三) 知识点评述

1. 充分条件的判断 从给定的条件出发去分析,在此条件下,结论是否一定成立,若是,则条件充分;若否,则条件不充分.我们在做充分性判断的试题时,不可从“结论”入手去求解!

那样只能得出“条件”对“结论”的“必要性”，而与充分性判断相背离. 如：在上例中，由结论命题： $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立，可解得 $-1 < x < 6$. 这只证明条件(5) 是必要的. 事实上，条件(5) 是结论 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立的充分必要条件，才“歪打正着”被你找到了一个充分条件.

2. 充分性判断的标准化试题 本讲义中，所有充分性判断题的 A、B、C、D、E 五个选项所规定的含义，均以下列呈述为准，即：

- A. 条件(1) 充分，但条件(2) 不充分；
- B. 条件(2) 充分，但条件(1) 不充分；
- C. 条件(1) 和(2) 单独都不充分，但条件(1) 和(2) 联合起来充分；
- D. 条件(1) 充分，条件(2) 也充分；
- E. 条件(1) 和(2) 单独都不充分，条件(1) 和(2) 联合起来也不充分.

上述 5 个选项，把条件(1) 和(2) 以及两条件联立起来(的充分性) 的所有情况都包括了，但其中“联合”不是数学名词，没有准确的定义，改为“联立”与原题意比较贴切. 比如：不等式 $x(6x + 5) < 4$ 成立

$$(1) x > -1 \qquad (2) x < \frac{1}{3}$$

从条件(1) 不难看出 x 的取值无上限， $x(6x + 5)$ 的值当 $x \rightarrow +\infty$ 时必有 $x(6x + 5) \rightarrow +\infty$ ，原不等式不可能恒成立.

从条件(2)，可取 $x = -2$ 代入不等式：

左边 $= -2(-12 + 5) = 14 >$ 右边，原式不能成立.

从 $x(6x + 5)$ 也可看出当 x 取足够小的负值时， $x(6x + 5)$ 为正值且无上限.

所以条件(1) 和(2) 都不充分，但条件(1) 和(2) 联立起来(即 $\begin{cases} x > -1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$)

时，原不等式成立，即联合起来充分. 因为 $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 这个区间，是原不等式解集 $X = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 的一个子集，肯定可以使不等式成立. 因此，此题的答案是(C).

二、典型例题详解

条件充分性判断题

【例 1】 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 80 项之和：

$$S_{80} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{80}$$

可求出

$$(1) a_3 + a_7 + a_{74} + a_{78} = 100$$

$$(2) a_4 + a_{11} + a_{69} + a_{76} = 96$$

解 从(1) 和等差数列的性质有：

$$a_1 + a_{80} = a_3 + a_{78} = a_7 + a_{74} = 50$$

$$S_{80} = \frac{a_1 + a_{80}}{2} \cdot 80 = 2000$$

条件(1)充分.

同理由条件(2),只能求出 S_{79} 而得不到 S_{80} ,所以条件(2)不充分.

应选 A.

【例 2】 已知不等式 $|\log_2(x-1)| \leq 3$ 成立,

(1) $x > 1$;

(2) $2 \leq x \leq 9$.

解 $y = \log_2(x-1)$ 为增函数,其定义域为 $x > 1$. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有 $y \rightarrow +\infty$. 不满足原不等式,所以条件(1)不充分.

再看条件(2),当 $2 \leq x \leq 9$ 时 $\log_2(x-1) \geq 0$ 恒成立,又因 $y = \log_2(x-1)$ 为增函数, $x = 9$ 时 $y_{\max} = 3$; $x = 2$ 时 $y_{\min} = 0$,所以条件(2)充分.

应选 B.

【例 3】 若等式 $|x - \lg y| = x + \lg y$ 成立,其中 x 和 $\lg y$ 都是实数,且 $y \geq 1$

(1) $y = 1$ 且 $x \geq 0$;

(2) $\sqrt{x}(y-1) = 0$.

解 条件(1)代入等式:

$$\text{左边} = \text{右边} = 0$$

等式成立,条件(1)充分.

条件(2): $\sqrt{x}(y-1) = 0$ 成立,必有 $x \geq 0$ 这一隐含条件,条件(2)即

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y > 1 \end{cases}$$

无论哪一种情况原等式都成立,条件(2)也充分.

应选 D.

【例 4】 $\{a_n\}$ 为等差数列,前 n 项之和为 S_n ,若 S_{60} 的值可以求得:

(1) $a_5 + a_{44} = 100 - 3k$;

(2) $a_{17} + a_{56} = 3k + 100$ ($k \in \mathbf{R}$).

解 由于 $k \in \mathbf{R}$ 是一个任意实数,所以条件(1)和(2)都不充分.但条件(1)和(2)联合起来即:

$$\begin{cases} a_5 + a_{44} = 100 - 3k & (1) \\ a_{17} + a_{56} = 3k + 100 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$a_5 + a_{17} + a_{44} + a_{56} = 200$$

根据等差数列的性质:

$$a_1 + a_{60} = a_5 + a_{56} = a_{17} + a_{44} = 100$$

$$S_{60} = \frac{a_1 + a_{60}}{2} \times 60 = 3000$$

条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分.

应选 C.

【例 5】 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^n$ 有常数项.

(1) $n = 12$;

(2) $n = 20$.

解 因为位于分子的指数为 $\frac{1}{3}$,位于分母的指数为 $\frac{2}{5}$,这两个分数的比值为 $\frac{5}{6}$. 当且仅当

n 为 11 的整倍数时, 展开式才存在常数项, 所以条件(1) 和(2) 都不充分. 且它们不可能联合(即联合起来也不充分).

应选 E.

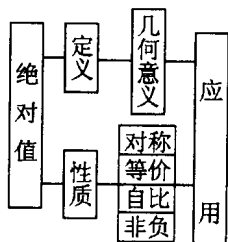
评注 此题也可以代入“结论”命题验证其充分性, 但过程繁杂. 从二项展开式常数项存在的充要条件, 直接判断就简便多了.

关于充分性判断的进一步研讨, 将在本讲义的以后各章节中, 分别加强训练, 务求达到 2003 年 MBA 联考对此类题型的指定要求.

第二节 绝对值

一、基本内容简介

(一) 知识网络图



(二) 知识要点

1. 定义 实数 a 的绝对值记作 $|a|$, 其文字叙述的定义的数学表达式如下:

$$|a| = \begin{cases} a, & (a \geq 0) \\ -a, & (a < 0) \end{cases}$$

2. 几何意义 一个实数在数轴上所对应的点, 到原点的距离值, 就是这个实数的绝对值.

3. 绝对值的性质

(1) 对称性 互为相反数的两个实数的绝对值相等. 即

$$|-a| = |a|$$

(2) 等价性 任何实数的平方的算术平方根就是这个实数的绝对值

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (\text{其中 } a \in \mathbf{R})$$

(3) 自比性 任意实数的绝对值不小于它自身, 而绝对值的相反数不大于它自身, 即

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

当且仅当 $a \geq 0$ 时, 右边等号成立; 而 $a \leq 0$ 时, 左边等号成立.

(4) 非负性 任何实数 a 的绝对值非负. 即 $|a| \geq 0$, 推而广之, 当有

$$\sqrt{a^2} \geq 0 \quad |f(a \cdot b)| \geq 0 \quad a^2 \geq 0 \quad [f(x)]^2 \geq 0$$

$a \geq 0$ 时 $\sqrt[n]{a} \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$

(5) 基本绝对值不等式

1) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \ (a > 0)$

2) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ 或 } x \geq a \ (a > 0)$

3) $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$; 右边等号成立的充要条件是 $ab \geq 0$, 而左边等号成立的充要条件是 $\begin{cases} ab \leq 0 \\ |a| \geq |b| \end{cases}$

4) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

即有限个实数之和的绝对值不大于它们的绝对值之和. 比如: 等式

$$|2x - 11| = |x - 3| + |x - 8|$$

成立的条件是().

(A) $3 \leq x \leq 8$

(B) $x \leq 8$

(C) $(x - 3)(x - 8) \geq 0$

(D) $x \geq 3$

(E) $-8 \leq x \leq -3$

解 由

$$|2x - 11| = |(x - 3) + (x - 8)| \leq |x - 3| + |x - 8|$$

这一基本绝对值不等式, 等号成立的充要条件为 $(x - 3)(x - 8) \geq 0$ 可以得知:

当 $x \leq 3$ 或 $x \geq 8$ 时等式都能成立.

二、典型例题详解

(一) 条件充分性判断题

【例 1】若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $|a - b| = |a| + |b|$ 成立

(1) $ab \geq 0$;

(2) $ab \leq 0$.

解 答案是(B).

分析 题干是由基本绝对值不等式: $|a - b| \leq |a| + |b|$ 中等号成立的特殊情况, 目的是进一步明确指出上述绝对不等式中等号成立的充要条件, 以充分性判断题形式出现, 只是为了使大家区分此绝对不等式与绝对不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 等号成立的条件是不同的.

【例 2】已知 $|y - a| \leq 2$ 成立.

(1) $|2x - a| \leq 1$;

(2) $|2x - y| \leq 1$.

解 答案是(C).

分析 由条件(1)和(2)中都含变量 x 来看两个条件都必然不是充分条件, 现在要考虑两个条件“联合”起来是否充分, 即考查

$$\begin{cases} |2x - a| \leq 1 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

是否充分?

由(2)得

$$|y - 2x| \leq 1 \quad (3)$$

由 $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ 可得到

$$|2x - a| + |y - 2x| \geq |(2x - a) + (y - 2x)|$$

$$\text{即} \quad 1 + 1 \geq |y - a|$$

$$\text{所以} \quad |y - a| \leq 2$$

这就是说条件(1)和(2)“联合”起来是充分的.

【例 3】 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

$$(1) f(x) = \left| x - \frac{2}{5} \right| + \left| \frac{1}{10} + x \right|;$$

$$(2) f(x) = x + \frac{1}{54x^2} (x > 0).$$

解 答案是(D).

分析 由条件(1)有

$$f(x) = \left| \frac{2}{5} - x \right| + \left| \frac{1}{10} + x \right| \geq \left| \left(\frac{2}{5} - x \right) + \left(\frac{1}{10} + x \right) \right| = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $\left(\frac{2}{5} - x \right) \left(\frac{1}{10} + x \right) \geq 0$ 时等号成立, 取等号成立的一个充分条件

$$\left(\frac{2}{5} - x \right) \left(\frac{1}{10} + x \right) = 0, \text{ 可得: } x = \frac{2}{5} \text{ 或 } x = -\frac{1}{10} \text{ 时, } y_{\min} = \frac{1}{2}$$

由条件(2)有

$$f(x) = x + \frac{1}{54x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{54x^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{54x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{x}{2} = \frac{1}{54x^2}, \text{ 即 } x = \frac{1}{3} \text{ 时, } y_{\min} = \frac{1}{2}$$

因此, 条件(1)充分, 条件(2)也充分.

【例 4】 已知 $|\log_{\frac{1}{2}} x| = -\log_{\frac{1}{2}} x (x > 0)$

$$(1) x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right];$$

$$(2) x \in [1, 3).$$

解 答案是(B).

分析 由对数函数的性质, 当底数 $a \in (0, 1)$ 时

$$x \in (0, 1) \text{ 对数 } \log_a x > 0$$

$$x \in (1, +\infty) \text{ 对数 } \log_a x < 0$$

当 $x = 1$ 时, $\log_a x = 0$. 因此, 只有当 $x \geq 1$ 时 $-\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$ 才能成立.

所以条件(1)不充分, 但条件(2)充分.

【例 5】 数列 $\{\lg |a_n|\}$ 为等差数列,

(1) 数列 $\{|a_n|\}$ 为等比数列, 且 $a_n \neq 1$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $q > 0$.

解 答案是(D).

分析 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_n > 0$ 时, 必然有 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列的结论. 而 $|a_n| \Leftrightarrow a_n > 0$, 因此, 条件(1)和(2)中的前半部分就已经充分了. “且如何, 如何”属画蛇添足, 无需考虑.

【例 6】 $|x^2 - 5x| < 6$ 能够成立,

(1) $x > 3$;

(2) $x < 5$.

解 答案是(C).

分析 条件(1)不充分,不是大于3的一切实数都能使原不等式成立.举出一个反例就可以否定条件(1)的充分性.如:当 $x = 6$ 时,原不等式就不成立.同理,条件(2)也不充分,例如当 $x = -2$ 时,原不等式也不成立.

但是条件(1)和(2)“联合”起来,即 $\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5$ 时,原式显然成立.

所以条件(1)和(2)单独都不充分,但它们联合起来是充分的.

评注 判断充分性的试题,如果题干是一个可求解的简单不等式.如本题,也可以去求出使这个条件不等式成立的充要条件,即求出解集.本题解集 $X = (-1, 2) \cup (3, 6)$,然后观察所给的两个条件(1)和(2).条件所描述的集合中,只要含有任何解集 X 之外的元素,则条件不充分.本题条件(1)和(2)显然都不充分,但它们联合起来,得到的 $x \in (3, 5)$ 是解集 X 的子集,因此充分.

(二) 问题求解题

【例1】 若关于 x 的不等式: $|3-x| + |x-2| < a$ 的解集是 $\emptyset$,则实数 a 的取值范围是().

(A) $a < 1$

(B) $a \leq 1$

(C) $a > 1$

(D) $a \geq 1$

(E) $a \neq 1$

解 答案是(B).

分析 $|3-x| + |x-2| \geq |(3-x) + (x-2)| = 1$,即使 $a = 1$ 时,原不等式仍然无解.

所以 $a \leq 1$ 时解集为 $\emptyset$.

【例2】 $k \in \mathbf{R}$,绝对值 $|2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k}|$ 可以化简为().

(A) 0

(B) $2^{-(2k-1)}$

(C) 2^{2k-1}

(D) -2^{2k+1}

(E) $2^{-(2k+1)}$

解 答案是(E).

分析 因为参变量 k 的值不定,绝对值符号内三个2的幂无法计算,但它们同为2的幂,所以可用分解因式的方法化简.

$$\begin{aligned} 2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k} &= -2^{-2k}(-2^{-1} + 2 - 1) = -2^{-2k} \cdot 2^{-1} \\ &= -2^{-2k-1} = -2^{-(2k+1)} \\ | -2^{-(2k+1)} | &= 2^{-(2k+1)} \end{aligned}$$

所以选(E).

【例3】 使不等式: $0 < |x-3| - |x-5| < m$ 成立的实数 m 的取值范围是($x \in \mathbf{R}$ 且 $x \geq 4$)().

(A) $m > 2$

(B) $m \geq 2$

(C) $m > 1$

(D) $m \geq 1$

(E) $1 < m < 2$

解 答案是(A).

分析 由绝对值不等式的性质定理有:

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

当且仅当 $ab \leq 0$ 且 $|a|$ 不小于 $|b|$ 时等号成立. 又因为 $|x - 3| \geq |x - 5|$ 在 $x \geq 4$ 的条件下成立. 再依据绝对值的性质, 把原式化为它的等价命题:

$$0 < |x - 3| - |5 - x| < m$$

这样一来, 在已知 $x \geq 4$ 的条件下, 又有

$$(x - 3)(5 - x) \leq 0$$

这时不等式

$$|x - 3| - |5 - x| \leq |(x - 3) + (5 - x)|$$

等号成立的条件也齐备了. 所以 $|x - 3| - |5 - x| \leq 2$, 综上所述不等式

$$0 < |x - 3| - |x - 5| \leq 2$$

成立, 从而得知只有 $m > 2$ 时才能满足题目的条件.

【例 4】 $(1 - 2x^2)^7 = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_7x^{14}$ 中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 的绝对值之和:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_7|$$

的值是().

- (A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) 2186
(E) 2187

解 答案是(D).

分析 求后 7 项系数的绝对值之和, 如分项去求, 再取绝对值并求和的话, 过于繁难. 不如直接求 $(1 + 2x^2)^7$ 展开式各项系数之和再减去首项 $a_0 = 1$, 即可.

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7| = (1 + 2)^7 - 1 = 2187 - 1 = 2186$$

【例 5】 等式 $|2m - 7| = |m - 2| + |m - 5|$ 成立, 则实数 m 值的范围是().

- (A) $2 \leq m \leq 5$ (B) $m \leq -2$ 或 $m \geq 5$
(C) $-2 < m < 5$ (D) $m \leq 2$ 或 $m \geq 5$
(E) $m \leq -5$ 或 $m \geq -2$

解 答案是(D).

分析 原式等号成立的充要条件是:

$$(m - 2)(m - 5) \geq 0$$

所以

$$m \leq 2 \text{ 或 } m \geq 5$$

【例 6】 已知: $x \in [2, 5]$; $|a| = 5 - x$; $|b| = x - 2$, 则 $|b - a|$ 的取值范围是().

- (A) $[-3, 5]$ (B) $[0, 5]$ (C) $[1, 3]$ (D) $[3, 5]$
(E) $[0, 3]$

解 答案是(E).

分析 因为 $x \in [2, 5]$, 又 $|b - a| = |a - b|$, 所以

$$|a - b| \leq |a| + |b| = (5 - x) + (x - 2) = 3$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b|| = |(5 - x) - (x - 2)| = |7 - 2x| \geq 0$$

即

$$0 \leq |b - a| \leq 3$$