XIAOBOYUFENBU

杨奇祥 著

小波与分布

——小波应用的部分机理

北京科学技术出版社

责任编辑　卢小琳
　　　　　王　藏
责任印制　臧桂芬
封面设计　李　辉

ISBN 7-5304-2677-X

9 787530 426777 >

ISBN 7-5304-2677-X/N·103
定价：58.00元

小 波 与 分 布

——小波应用的部分机理

杨奇祥　著

北京科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

小波与分布/杨奇祥著.—北京:北京科学技术出版社,2002.10

ISBN 7-5304-2677-X

Ⅰ.小… Ⅱ.杨… Ⅲ.小波分析 Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第051965号

小波与分布

作　　者:杨奇祥
责任编辑:卢小琳　王藏
封面设计:李　辉
责任印制:臧桂芬
出 版 人:张敬德
出版发行:北京科学技术出版社
社　　址:北京西直门南大街16号
邮政编码:100035
电话传真:0086-10-66161951(总编室)
　　　　　0086-10-66113227　0086-10-66161952(发行部)
电子信箱:bkjpress@95777.com
经　　销:新华书店
印　　刷:腾飞胶印厂印刷
开　　本:850mm×1168mm　1/32
字　　数:185千
印　　张:7.125
版　　次:2002年10月第1版
印　　次:2002年10月第1次印刷
印　　数:1—300

ISBN 7-5304-2677-X/N·103

定　价:58.00元

作 者 的 话

Meyer 教授引导作者走上小波之路，那些年来的关照很难简单地用言语来表达。陆善镇教授长期以来给予作者很多帮助，看过本书的部分手稿并提供了部分参考文献；彭立中教授同样给予作者很多帮助，他对本书的写作和结构安排提供了很好的参考意见并提供了部分参考文献，他十分仔细地审校了本书全部的内容，他还十分热心地为本书写序。对他们的感激之情作者一直埋在心里。另外在不同的时间里作者还曾得到武汉大学，巴黎九大和中山大学等大学和机构的部分老师、同事和同学的关照，这里不方便一一列举姓名。作者十分感谢所有这些提名或未提名的前辈以及同事所给予的关照。本书的写作还得到教育部国际与交流合作司李东翔司长和教育部留学服务中心沃守信主任等领导的鼓励和帮助；作者十分感谢这两机构提名或未提名的领导的帮助。本书得到教育部留学回国基金和国家自然科学基金（批准号10001027）的资助，作者在此一并致谢。

正是由于有这些关照，作者才在书剑漂零的生涯中有了写作本书的勇气。写作本书的数学上的直接动机是有同事询问我关于一些小波应用方面（特别是数值算法）的理论基础。我认为大多数的应用是建立在分布理论的基础上的，数学上接触的大量对象是与分布打交道，应用上无论是图像还是信号等几乎是用分布来表达的。不过分布本身是用对偶定义的，不具备逐点意义；在小波出现之前，分布空间的分类借助于 Fourier 变换和 Littlewood-Paley 分析实现。具体的 Fourier 变换，除极少数特例外，其余无法计算。这就使得分布理论对具体的数值计算有些高深莫测，但如果用合适的基底进行分析，Fourier 变换的计算变成

小波系数的计算，这就将分布转化为类似有限元的东西。由于在一点的小波系数是确定的，从而在某种意义上分布有了逐点的含义；并且通常小波系数的绝对值就可以反映分布本身的各种性质。另外多分辨率分析相当于给出了空间的一个预设的几何框架结构，因而允许数值算法的快速计算。由有限个生成函数的平移展缩生成的空间的标准正交基，不但使得小波系数的计算简单，而且使得两个分布的内积就是对应的系数的乘积。由有限个生成函数的平移展缩生成的正则的正交小波基的各种性质令人倾倒，但随着应用的不断深入，发现有不尽人意的地方。比如说正交性常与其他性质冲突，不过这可方便地由双正交性替代来解决。但有些情况根本就无法用由有限个生成函数的平移展缩生成的小波基分析，这使得人们不断地寻找各种其他的基底。因此从构造主义和实用主义的观点出发，如果小波系数能以简单和合理的方式反映所研究的对象，就应该称其为小波基。

小波的历史源远流长，并且发展迅速。不同学科的探索者在各自的领域做着各自的探索，这使得小波的内容十分广泛。正是如此，本书不可能也不打算涵盖小波应用的所有机理，更不打算涵盖小波的全面领域，这过于庞大。比如小波自身的构造的各种算法，散度为零的小波及其应用，小波对 Chirp 的分析以及如何将数值算法用在某个具体工程中的问题的处理等等，这些均不打算论及。另外限于见识和水平，作者也很难全面把握。这里侧重于对函数和算子对应的分布的研究和调和分析中的实方法，从在理论和应用上的应用的机理出发看小波和应用，尽量少谈及小波本身的各种算法。本书适用于具备本科以上知识想了解小波在理论和应用上的应用机理的各个方向的读者。

杨奇祥

2002 年 9 月

前　　言

自从 1807 年 J. Fourier 提出 Fourier 分析至今，Fourier 分析无论是在理论数学研究还是在信息产业（IT）中都是一个基本的工具。由 Fourier 展开引发的 Riemann 对称空间和近年来的半单对称空间上 Plancherel 公式的研究，代数曲线和代数球面上的 Selberg 迹公式的研究一直是核心数学中的基本问题。在 IT 产业，由 Fourier 分析构建的快速 Fourier 变换(FFT)，离散余弦变换（DCT）成为信号处理和图像处理的主要工具，加快了现代工业化的步伐。但是 Fourier 变换只具有频率域的局部性，不具有时间（或空间）的局部性，在很多理论和工业应用中受到限制。而 Heisenberg 的测不准原理又告诉人们绝对的同时时频局部化是不可能的。这样寻求相对协调的同时又具有时间和频率局部性的正交展开就成为人们多年来的梦想。20 世纪 30 年代的 Littlewood-Palay 理论是数学理论上时频局部化的一种实现方法。20 世纪 80 年代中期产生的小波则使时频同时局部化的梦想成真。1984 年比利时的数学家（物理学家）A. Grossmann 和法国地质学家 J.Morlet 在分析地质数据时首先引进并使用了小波（Wavelet）这一术语。后来，法国数学家 Y. Meyer 将他们的成果与数学家们早期的工作联系起来，形成了小波分析的理论体系，成为目前人们研究的热点。1988 年年轻的数学家 I. Daubechies(Grossmannn 的学生)构造出紧支集的正交小波滤波器以后，小波进入 IT 产业，开始了一场革命性的变革。

1990 年 Y. Meyer 和 R. Coifman 合作写了一套三卷本的著作“小波与算子”（第 I, II 卷 Meyer 著，第 III 卷合著）详细论述了小波的数学理论，构造了小波基，用小波基给出一系列函数空间的刻画，用小波研究了 Calderón-Zygmund 奇异积分算子，给出小波在复分析，算子论，偏微分方程和非线形分析等领域的应用，成为小波数学理论的名著。

十几年过去了，小波数学理论又有了长足的发展，特别是在如下方面：①对于函数空间而言，Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_p^{s,q}(R^n)(s\in R, 0<p<\infty, 0<q\leq\infty)$ 的系统刻画及原子分解，有界平均振动空间 $\dot{M}_p^{s,q}(s\in R, 0<p\leq 1\leq q\leq\infty)$、Morrey 空间和 Q 空间的研究和区域上的函数空间的研究，允许对绝大多数函数空间中的分布的研究变成对小波系数的研究。②对于算子空间而言，对许多类算子的刻画性研究，把算子空间中的算子与小波系数一一对应起来，给予算子以具体的构造论的实现。③对于 C-Z（Calderon-Zygmund）算子，在核的正则性较弱的情况下建立算子的连续性是继 T1 定理后人们关心的问题，比如在 L^2 上和在其他 Banach 空间（Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间等）上的连续性的研究都有新的进展。④利用对分布空间（函数和算子）的研究，对算子在函数空间上的研究转化为算子块和函数块之间的研究，更好地适用了算子的不同部分对不同量的作用效果的需要；拟环形分解是一种比通常仿积分解更仔细的算子分解。这些研究成果使得人们对小波应用的算法的理论基础有更明确的认识。这只是从分布的角度来看小波的进展，当然小波在其他的许多方面也有重要进展。

作者能够从分布的角度把握小波的发展是与其多年来的经历分不开的：作者曾在武汉大学学习微分方程的一些基础理论；而后在巴黎师从 Y. Meyer 学习小波的知识，有机会接触小波最前沿的工作，并在那里获博士学位；再到中山大学做博士后，接触许多实分析和调和分析方面的知识。这一本书是 1990 年 Y. Meyer 和 R. Coifman 合写的著作“小波与算子”之后，论述小波的数学理论发展的一本新著。无论是从事小波理论工作的，还是从事小波应用研究的读者，都可以从这本书中获得收益。

彭立中

于北大清华蓝旗营小区

2002 年 4 月 18 日

目　　录

第一章　准备知识

本章介绍几个泛函分析的实技巧和分布理论的一些准备知识，这些结果在以后各章将用到。在具备了这些准备知识后，只要具备了较好的数学分析的基础的读者就可以方便地阅读本书。

从 20 世纪 50 年代以来，Calderón-Zygmund（有时简称 C-Z）学派在研究 C-Z 算子时发展了一系列处理 R^n 上的问题的实技巧，这在许多领域得到了广泛的应用。本章的第一个目的是给出建立从一个函数空间到另一个函数空间的连续性而必备的几个调和分析的实技巧：①Marcinkiewicz 插值定理；②Hardy-Littlewood（有时简称 H-L）极大函数和 C-Z 分解；③H-L 极大算子的连续性。

本章的第二个目的是介绍一些分布的准备知识。首先介绍分布的定义及其几个运算；然后系统地介绍一些类型的经常遇到的分布，它们可能是函数或者是算子。实际上，图像和信号处理（见参考文献[1][2][3]）、数值分析（见参考文献[4]）等应用上的广泛的领域，数学上的大量问题，均只是与分布打交道，这样就比较容易理解小波在数值计算中的有效性。

§1　实分析的准备知识

我们首先介绍 Marcinkiewicz 内插定理。对于集合 E，记 $|E|$ 为 E 的测度。$\forall 0<p<\infty$，用 $WL^p(R^n)$ 记弱 $L^p(R^n)$ 空间：$\{f(x):\forall\lambda>0,\lambda\left|\{x\in R^n,|f(x)|>\lambda\}\right|^{\frac{1}{p}}<+\infty\}$；为记号方便起见，这里也记 $WL^\infty(R^n)=L^\infty(R^n)$。那么我们有：

定理 1.1　$\forall 0<p_1<p<p_2\le\infty$，假设：

$\forall i=1,2$，有 $T:L^{p_i}(R^n)\to WL^{p_i}(R^n)$ 连续, (1.1)

那么我们有：

$T:L^p(R^n)\to L^p(R^n)$ 连续. (1.2)

证明：$\forall\lambda>0$，我们定义：

$$f_{\lambda,1}(x)=\begin{cases}f(x), & \text{如果}\ |f(x)|>\lambda,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

记 $f_{\lambda,2}(x)=f(x)-f_{\lambda,1}(x)$，这样 $f(x)$ 分解成两个函数之和，并且有：

$$\|f_{\lambda,1}(x)\|_{L^{p_1}}^{p_1}\le\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x \quad \text{和}$$

$$\|f_{\lambda,2}(x)\|_{L^{p_2}}^{p_2}\le\int_{\{x:|f(x)|\le\lambda\}}|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x.$$

运用算子的弱连续性假设有：

$$|\{x:|Tf_{\lambda,1}(x)|>\lambda\}|\le C\lambda^{-p_1}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x$$

$$|\{x:|Tf_{\lambda,2}(x)|>\lambda\}|\le C\lambda^{-p_2}\int_{\{x:|f(x)|\le\lambda\}}|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x.$$

注意到有：

$$|\{x:|Tf(x)|>2\lambda\}|\le|\{x:|Tf_{\lambda,1}(x)|>\lambda\}|+|\{x:|Tf_{\lambda,2}(x)|>\lambda\}|.$$

这样就得到：

$$\begin{aligned}\int|Tf(x)|^p\mathrm{d}x&=C\int\lambda^{p-1}|\{x:|Tf(x)|>2\lambda\}|\mathrm{d}\lambda\\&\le C\int\lambda^{p-p_1-1}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}|f(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\\&\quad+C\int\lambda^{p-p_2-1}\int_{\{x:|f(x)|\le\lambda\}}|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

交换 x 和 λ 的积分次序，先对 λ 求和就得到：

$$\int|Tf(x)|^p\mathrm{d}x\le C\int|f(x)|^p\mathrm{d}x$$

定理 1.1 证毕！

接着我们来介绍局部可积函数的 Hardy-Littlewood 极大函数（此处不考虑像参考文献[5]中的极大函数一样的其他类型的极大函数）和 L^1 函数的 C-Z 分解。设 Ξ 为所有方体的集合，定义：

$$Mf(x)=\sup_{x\in Q\in\Xi}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y. \tag{1.3}$$

那么我们有如下的 C-Z 分解：

定理 1.2　$\forall f(x)\in L^1(R^n),\forall\lambda>0$，存在互不重叠的方体序列 Q_k^λ 使得 $\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x\sim\lambda$ 且相差一个零测集有 $\{Mf(x)>\lambda\}=\bigcup\limits_k Q_k^\lambda$；并且对于 $\lambda>\mu$，必有 Q_k^λ 含于某个 $Q_{k'}^\mu$ 中。

证明：由于 $f(x)\in L^1(R^n)$，这样只要以原点为一个顶点的二进方体 $|Q|$ 边长充分大就会有 $\frac{1}{|Q|}\int|f(x)|\mathrm{d}x\le\lambda$。任选其中的一个 Q 为标准划分整个 R^n，然后再把每一个方体等分成 2^n 个小方体，记这样的小方体为 Q'，于是有两种可能性：

第一种情形　$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x\le\lambda,$

第二种情形　$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|\mathrm{d}x>\lambda.$

对于第二种情形，保留 Q' 不动。对于第一种情形，继续对 Q' 进行 2^n 等分，如此继续下去，就得到了全体第二种情形构成的方体序列 Q_k^λ。容易验证这样的 Q_k^λ 就满足要求。

定理 1.2 证毕！

本节最后来介绍一种极大算子（Hardy-Littlewood 极大算子）的连续性（见参考文献[6]）。

定理 1.3

(i) $\forall 1<p\le\infty$ 有 $\|Mf(x)\|_{L^p}\le A_p\|f(x)\|_{L^p}$. (1.4)

(ii) $\forall 1 < q \le \infty$ 有

$$\left(\int |Mf(x)|^q |\varphi(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le B_q \left(\int |f(x)|^q |M\varphi(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

(iii) $\forall 1 < p < \infty, 1 \le q \le \infty$ 有

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (Mf_j(x))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} \le C_{p,q} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}.$$

(1.6)

证明：

(i) 由定理 1.2 知：$M : L^1 \to WL^1$ 连续，而 $M : L^\infty \to L^\infty$ 连续是显然的；再利用定理 1.1 就得到所需的结论。

(ii) $\forall \lambda > 0$，运用定理 1.2 有：

$$\{x : Mf(x) > \lambda\} = \bigcup_k Q_k \text{ 且 } \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)| \mathrm{d}x \sim \lambda.$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{Q_k} |f(x)| M\varphi(x) \mathrm{d}x &\ge \int_{Q_k} |f(x)| \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |\varphi(y)| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{Q_k} |\varphi(y)| \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \sim \lambda \int_{Q_k} |\varphi(y)| \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

对 k 求和，就得到：

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\{Mf(x) > \lambda\}} |\varphi(y)| \mathrm{d}y &\le A \int_{\{Mf(x) > \lambda\}} |f(x)| M\varphi(x) \mathrm{d}x \\ &\le A \int_{R^n} |f(x)| M\varphi(x) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

再次运用定理 1.1 和定理 1.2 就得到所需结论。

(iii) 首先证明下式：

$$\left|\{x:\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(Mf_j(x))^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\}\right|\le\frac{A}{\lambda}\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left|f_j(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^1}. \tag{1.7}$$

记 $g_q(x)=\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left|f_j(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$，$\forall\lambda>0$，运用定理 1.2，得到一列方体族 Q_k 使得 $\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}g_q(x)dx\sim\lambda$ 且相差一个零测集 $\{Mg_q(x)>\lambda\}=\bigcup_k Q_k$。令 $\Omega=\bigcup_k Q_k$ 和 $F=R^n\setminus\Omega$；令 $f_j'=f_j\chi_F$ 和 $f_j''=f_j\chi_\Omega$。为证式(1.7)，我们证明

$$\left|\{x:\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(Mf_j'(x))^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\}\right|\le\frac{A}{\lambda}\left\|g_q(x)\right\|_{L^1}. \tag{1.8}$$

和

$$\left|\{x:\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(Mf_j''(x))^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\}\right|\le\frac{A}{\lambda}\left\|g_q(x)\right\|_{L^1}. \tag{1.9}$$

运用定理 1.2 和本定理(i)，式(1.8)可如下推导得出：

$$\lambda^q\left|\{x:\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(Mf_j'(x))^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\}\right|=\lambda^q\left|\{x:\sum_{j=1}^{+\infty}(Mf_j'(x))^q>\lambda^q\}\right|$$

$$\le\int_{R^n}\sum_{j=1}^{+\infty}(Mf_j'(x))^q\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_{R^n} \sum_{j=1}^{+\infty} (f_j{}'(x))^q \mathrm{d}x$$

$$\leq A_q \lambda^{q-1} \int_{R^n} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} (f_j{}'(x))^q \right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}x$$

$$\leq A_q \lambda^{q-1} \left\| g_q(x) \right\|_{L^1}.$$

下证式(1.9)。对于任意方体 $Q \subset R^n$，令 $\tilde{Q} = 2nQ$，即与 Q 同中心，边长伸展 $2n$ 倍的方体；令 $\tilde{\Omega} = \bigcup_j \tilde{Q}_j$，显然有 $\left|\tilde{\Omega}\right| \leq \frac{A}{\lambda} \left\| g_q(x) \right\|_{L^1}$；另外我们定义函数：

$$\tilde{f}_j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|Q_k|} \displaystyle\int_{Q_k} \left| f_j(y) \right| \mathrm{d}y, & \text{当 } x \in Q_k, \\ 0, & \text{当 } x \notin \Omega. \end{cases}$$

利用上述定义的函数，为证式(1.9)，我们证明下述两点：

$$\lambda^q \left| \left\{ x : \left(\sum_{j=1}^{+\infty} (M\tilde{f}_j(x))^q \right)^{\frac{1}{q}} > \lambda \right\} \right| \leq A_q \lambda^{q-1} \left\| g_q(x) \right\|_{L^1}, \tag{1.10}$$

$$\forall x \notin \tilde{\Omega} \text{ 有 } \quad M(f_j{}'')(x) \leq AM\tilde{f}_j(x). \tag{1.11}$$

对于(1.10)，运用向量值的 Minkovsky 不等式，$\forall x \in Q_k$ 我们有：

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left| \tilde{f}_j(x) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} \left| f_j(y) \right| \mathrm{d}y \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left| f_j(y) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}y,$$