

# 流体力学原理与 计算基础

刘光宗 编

西安交通大学出版社

## 内 容 简 介

本书内容着眼于介绍建立流体力学物理模型有关的基础知识以及解题途径，作为进一步学习与运用流体力学的导引。其中第一、二、三和十三章介绍基本概念和基本方程组，第四、五、六、七、八和九章分别介绍波、可压缩流动、粘性流动、两相流、流体弹性振动以及叶轮机械原理方面的基础知识，第十、十一和十二章介绍流体力学中常用的解题方法。本书可供动力、能源、机械、化工以及航运等专业的研究生、高年级大学生和有关工程技术人员参考使用。

### 流体力学原理与计算基础

刘光宗 编

责任编辑 刘宏珊 林全

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁路28号)

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经营

开本787×1092 1/16 印张16.625 字数：402千字

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

印数：1—2000

ISBN7-5605-0099-4/O·16 定价：3.70元

# 前 言

流体力学是力学中一个重要的分支，广泛应用于很多科技领域中，尤其在动力、航空、船舶、水利、化工、气象、环保等部门中占有重要的地位。近年来，由于科学技术的迅速发展，特别是电子计算机的广泛使用以及实验技术的不断提高，对流体力学的内容与方法给以很大的影响，形成了许多新的分支，使这门古老的学科面貌一新。尤其是计算流体力学的形成，影响就更大，几乎对流体力学的各个分支都产生了猛烈的冲击。

计算流体力学的发展，使人们能够计算许多过去难以计算(甚至是无法想象的)的问题，进而也加深了对力学现象和原理的分析和理解。然而，这终究不能代替力学原理的研究。因此，无论是计算也好，适应新的发展也好，都要求读者在流体力学方面有较好的素质。或者说，至少对流体力学中的一些基本概念、原理和方法有一个较为确切的认识。编写本书的目的就是这一方面作一些尝试，以供高年级大学生和研究生参考。

本书对在大学课程中已基本系统阐述过的内容，一般不再重复，而着眼于研究流体力学各分支有关的共同基础与分析方法。为此在系统上不得不放弃传统的编排方式，采用基础与专题内容结合的方式安排章节次序。显然，用“横向”方式取材，这难免有不全和失之过简之处，在次序上可能不符合分类法。这里完全是按照编者对问题的认识而取舍，权作入门前的导引。

本书的具体内容大致包含如下几方面：

1. 基础内容部分包括基本概念(第一章)、基本方程(第二章)和力学模型的建立(第三章和第十三章)等内容。
2. 基本原理部分包括波与特征线理论(第四和五章)、粘性与湍流理论(第六章)、两相流(第七章)、气(液)弹性理论(第八章)和相对运动基础(第九章)
3. 计算基础部分包括解题分析(第十章)和解法(第十一和十二章)。

鉴于本书涉及的流体力学内容广泛，编者知识有限并参差不齐，不少内容非编者所长，谬误与不妥之处难免，望学者、专家和读者指正。书末列有阅读本书和进一步提高所需的一些参考文献，它们对本书的编写也有很大的帮助，在此谨向文献的作者和译者致以谢意。

编 者

1987.4

## 常用符号表

以下列出常用的物理量符号，其中某些符号作多种用途，一般在使用时可按内容识别。其他使用次数不多的物理量符号则在有关章节中另行说明，勿与表中所列符号相混淆

$a$ 声速、波速	$s$ 熵
$A$ 面积	$S$ 曲面面积
$c_p$ 定压比热	$S_t$ 斯特罗哈数
$c_v$ 定容比热	$t$ 时间
$e$ 单位质量流体的内能	$T$ 绝对温度或时间段
$E$ 单位质量流体的内能、势能和动能或能量潜密度	$u$ 速度
$F$ 单位质量流体的质量力	$v$ 比容
$g$ 重力加速度	$V$ 体积
$G$ 质量流量	$w$ 相对速度
$H_1, H_2, H_3$ 拉美系数	$W$ 功
$h$ 单位质量流体的焓	$\Gamma$ 环量
$k$ 绝热压缩指数	$\delta_{ij}$ 克朗内克 (Kronecker) 符号
$m$ 质量	$s$ 脉动动能耗散
$M$ 马赫数	$s_{ij}$ 速度变形张量分量
$p$ 静压强	$E$ 速度变形张量
$p_{ij}$ 应力张量分量	$\epsilon$ 旋涡扩散系数
$p'_{ij}$ 粘滞应力张量分量	$\lambda$ 热传导率或特征值
$P$ 应力张量	$\lambda'$ 第二粘滞系数
$P'$ 粘滞应力张量	$\mu$ 动力粘滞系数
$P_r$ 普兰特数	$\nu$ 运动粘滞系数
$Q_s$ 加给单位体积流体的外热	$\Pi$ 质量力势函数
$q_s$ 在单位时间内通过单位面积加给流体的热量	$\pi_{ij}$ 法向粘滞应力
$r$ 半径	$\rho$ 密度
$R$ 气体常数或相关	$\tau_{ij}$ 剪切应力分量 ( $i \neq j$ )
$R_{ij}$ 相关	$\phi$ 速度势函数
$R_s$ 雷诺数	$\psi$ 流函数
	$\omega$ 角速度
	$\Omega$ 涡量

# 目 录

## 常用符号表

<b>第一章 基本概念</b> .....	( 1 )
§ 1.1 连续介质 .....	( 1 )
§ 1.2 描述流体运动的基本方法 .....	( 3 )
§ 1.3 作用力 .....	( 6 )
§ 1.4 应力张量 .....	( 7 )
§ 1.5 微元体速度分解 .....	( 9 )
<b>第二章 基本方程组</b> .....	( 13 )
§ 2.1 连续性方程 .....	( 13 )
§ 2.2 应力形式的运动方程 .....	( 15 )
§ 2.3 本构方程 .....	( 18 )
§ 2.4 纳维埃-斯托克斯方程.....	( 21 )
§ 2.5 能量方程 .....	( 23 )
§ 2.6 状态方程和其它热力学关系式 .....	( 29 )
§ 2.7 热力学第二定律与熵平衡方程 .....	( 31 )
§ 2.8 拉格朗日型基本方程组 .....	( 32 )
§ 2.9 欧拉型方程与拉格朗日型方程的转换 .....	( 33 )
§ 2.10 初始条件与边界条件 .....	( 35 )
<b>第三章 不同类型流体运动综述</b> .....	( 39 )
§ 3.1 无量纲基本方程组 .....	( 39 )
§ 3.2 势场与涡场 .....	( 40 )
§ 3.3 理想流体与粘性流体 .....	( 42 )
§ 3.4 不可压缩流体与可压缩流体 .....	( 44 )
§ 3.5 重力流体。有压流动与无压流动 .....	( 46 )
§ 3.6 定常流与非定常流 .....	( 48 )
§ 3.7 绝热流动与非绝热流动 .....	( 50 )
§ 3.8 一维流动 .....	( 52 )
<b>第四章 波与流体运动基础</b> .....	( 56 )
§ 4.1 波的种类与形成 .....	( 56 )
§ 4.2 声波 .....	( 59 )
§ 4.3 重力波 .....	( 61 )
§ 4.4 进行波(推进波) .....	( 63 )
§ 4.5 色散波 .....	( 65 )
§ 4.6 波的傅立叶分解 .....	( 67 )
§ 4.7 波的能量与冲量 .....	( 69 )
§ 4.8 空气动力噪声 .....	( 71 )
<b>第五章 特征线(面)与强间断</b> .....	( 74 )
§ 5.1 特征线(面) .....	( 74 )

§ 5.2	特征关系式 .....	( 78 )
§ 5.3	特征线(面)的基本性质 .....	( 81 )
§ 5.4	强间断 .....	( 85 )
§ 5.5	强间断的性质 .....	( 87 )
<b>第六章</b>	<b>粘性流体与湍流基础</b> .....	( 90 )
§ 6.1	粘性与动量输运 .....	( 90 )
§ 6.2	粘性流体中的能量耗散 .....	( 92 )
§ 6.3	粘性与涡流 .....	( 93 )
§ 6.4	层流中涡的扩散 .....	( 94 )
§ 6.5	稳定性与湍流 .....	( 96 )
§ 6.6	湍流的描述方法 .....	( 98 )
§ 6.7	雷诺方程 .....	( 101 )
§ 6.8	湍流能量方程 .....	( 103 )
§ 6.9	应力输运方程 .....	( 106 )
§ 6.10	各向同性湍流 .....	( 107 )
§ 6.11	管道与边界层中的湍流结构 .....	( 110 )
<b>第七章</b>	<b>混合气体与两相流动基础</b> .....	( 113 )
§ 7.1	多组元流体运动基本方程 .....	( 113 )
§ 7.2	等熵混合气体流动 .....	( 116 )
§ 7.3	两相流的类型 .....	( 117 )
§ 7.4	分层两相流基本方程 .....	( 118 )
§ 7.5	匀散汽液两相流基本方程 .....	( 120 )
§ 7.6	无滑移的汽液两相流基本方程 .....	( 122 )
§ 7.7	气液两相流基本方程 .....	( 123 )
§ 7.8	气(液)固两相流动基本方程 .....	( 125 )
§ 7.9	声速 .....	( 126 )
<b>第八章</b>	<b>气(液)动弹性原理基础</b> .....	( 128 )
§ 8.1	气(液)动弹性问题的类型 .....	( 128 )
§ 8.2	升力面发散 .....	( 129 )
§ 8.3	经典颤振 .....	( 130 )
§ 8.4	能量吸收与颤振关系 .....	( 132 )
§ 8.5	绕非流线型体的拟定常流 .....	( 134 )
§ 8.6	失速颤振。舞动 .....	( 136 )
§ 8.7	动力响应 .....	( 137 )
§ 8.8	抖振 .....	( 139 )
<b>第九章</b>	<b>相对运动基础</b> .....	( 141 )
§ 9.1	相对运动基本方程组 .....	( 141 )
§ 9.2	等角速度旋转坐标系中的基本方程组 .....	( 142 )
§ 9.3	具有运动壁面的流体能量方程 .....	( 146 )
§ 9.4	流体与固体壁面之间的功能交换 .....	( 148 )
<b>第十章</b>	<b>解题初析</b> .....	( 150 )
§ 10.1	流体力学方程的类型 .....	( 150 )
§ 10.2	初值问题与边值问题 .....	( 152 )
§ 10.3	命题的提法 .....	( 155 )

§ 10.4	基本方程的建立	(157)
§ 10.5	解题的途径	(163)
<b>第十一章</b>	<b>解析方法</b>	(170)
§ 11.1	概述	(170)
§ 11.2	选择法、叠加法和奇点法	(172)
§ 11.3	集中参数法	(173)
§ 11.4	有限基本解法和格林函数法	(177)
§ 11.5	保角变换法	(181)
§ 11.6	速度图法	(185)
§ 11.7	特征线数值法	(188)
§ 11.8	摄动法	(190)
§ 11.9	逐次逼近法	(192)
§ 11.10	分离变量法	(194)
§ 11.11	相似解法	(197)
§ 11.12	半径验方法	(201)
<b>第十二章</b>	<b>数值方法</b>	(206)
§ 12.1	概述	(206)
§ 12.2	相容性、收敛性与稳定性	(207)
§ 12.3	基本差分格式	(210)
§ 12.4	流体力学中的差分法	(216)
§ 12.5	有限元法	(226)
§ 12.6	半解析法与直接法	(231)
§ 12.7	湍流计算模型	(234)
<b>第十三章</b>	<b>流体物理性质</b>	(239)
§ 13.1	状态方程	(239)
§ 13.2	非平衡态	(242)
§ 13.3	体积粘滞系数(第二粘滞系数)	(244)
§ 13.4	稀薄气体	(245)
§ 13.5	非牛顿流体	(246)
<b>附 录</b>		(248)
§ 1	场论中的基本公式	(248)
§ 2	曲线坐标系	(251)
§ 3	张量	(255)
<b>主要参考书目及文献</b>		(256)

# 第一章 基本概念

本章着重介绍在进行流体力学分析时所用到的几个最基本的概念。这些概念的一般内容在大学流体力学教程中都有介绍，在初步掌握流体运动的知识后，再对这些基本概念作必要的回顾与分析，从而使我们对这些概念的理解更清晰。本章参考书目可见文献[1、18、19、20、39、40]。

## § 1.1 连续介质

流体力学所研究的对象是流体，如同其他力学分支中所研究的刚体、弹性体和塑性体那样，把这些物质看作由无数质点所组成并连续充满它所处的空间，即在经典力学中不是把物质按照分子运动的特征不同而分为固体、液体、气体和等离子体，而是把它们作为一种连续介质来处理。这样做不仅是为了工程实际问题的需要，而且也符合物质运动本身的规律。

例如，在实际问题中，我们需要知道流体通过空间某点的速度值时，没有必要去回答在该时刻通过该点所有的分子速度值或分子数，而只要知道有关的统计平均值就可以了。这些宏观物理量就是我们在工程中所常用的所谓质点的速度、压强、温度、质量等。显然，在这里所引入的“质点”以及与它有关的物理量是从经典意义上理解的宏观量。这些概念从经典力学本身来看，可以不必作进一步的解释，而直接作为初始定义引入，表示介质的某种物理属性。然而如果我们需要把经典力学研究所得的结论用于实际问题中时，就不得不考虑经典力学中所引入的那些初始概念本身是否具有实在的意义。

从分子物理学观点看，流体是由大量分子所组成的，分子间的距离尺度远大于分子本身的尺度，这就是说，流体的微观结构具有离散的性质，它与连续介质在数学上可以连续分割的概念不同。其次，物质的分子是不断地处于热运动状态，因而个别分子的运动，包括它所处的空间位置和运动速度等量，具有随机的性质，而在经典流体力学中，即使是非定常流动，流体质点仍具有确定的属性。与上述性质相关的，从微观结构或运动而言，流体分子在时间或空间分布上也是不均匀的，而在连续介质的概念中，则每个质点都自然地认为具有均匀的

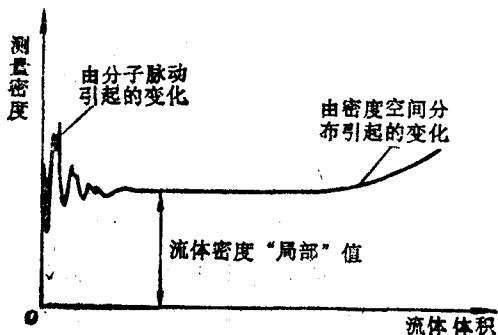


图 1.1 流体密度与体积尺度的关系

属性。所有这些看来似乎是一些相互矛盾的概念，但却是经典流体力学所必须弄清的最基本问题，否则在连续介质基础上所建立起来的一切具体力学模型都将成为空中楼阁。

关于上述问题可以用图 1.1 中关于密度随气体体积尺度的变化来说明。当体积尺度取得过小时，由于分子间的距离尺度相对已足够大，分子运动的随机性对所观察的流体体积中所含分子数发生了影响，因而测得的流体密度值出现了很大的脉动。随着所取的体积尺度增大，



其中所含的分子数增加,这种脉动影响就逐渐减少。当体积尺度足够大时,少数分子离开或进入所观测的体积对于该体积中的分子总数的影响就微不足道了,因而密度值达到了稳定平衡。这样,我们就能从分子物理学出发,用统计的方法对连续介质和质点给出一个确定的界限,从而使这些概念既具有物理学上的真实性又使数学分析方便。

图 1.1 中所示的性质对于其他物理量也类似。例如,在  $0^{\circ}\text{C}$  和 1bar 情况下,  $1\text{cm}^3$  体积中含有约  $2.7 \times 10^{19}$  个气体分子数,即使取  $10^{-9}\text{cm}^3$  这样一个小体积,其中还包括了  $2.7 \times 10^{10}$  个分子(对水分子,数目就更多)。在这种情形下,  $1\text{cm}^3$  的气体分子每秒要发生  $10^{28}$  次碰撞。这样,不仅流体的质点具有确定的质量和密度,而且其他反映分子运动的物理量(如动量、动能等)也有稳定的统计平均值。把这些统计平均值以压强、温度等名称赋给流体质点,使它成为具有确定物理属性的质点。这样,流体力学就不必直接去研究在各种特定边界条件下分子团的运动规律,而只需研究流体介质的运动规律就可以了,不论在计算上还是在实验上都是方便可行的。

由上可知,连续介质是经典力学中的一种力学模型。它把物质看作由无限质点所组成的质点系,这些质点“紧密无间”地排列在一起,当受到外界的作用(如力的作用)能在介质中自由地传播。在另一方面,这些质点又同时具有确定的物理属性。由于分子运动的特性不同,因此,从不同物质抽象所得的连续介质也具有不同的物理属性。对于固体,在受外力作用的情形下,只能作有限的变形,因此,可以按变形的大小与特征,把它分为刚体、弹性体、塑性体等。对液体、气体和等离子体,由于它在外力作用下能连续不断地变形,因而,一般不能象固体那样把这类介质的变形运动同它的质心运动分开来研究,今后统称这类介质为流体。

以上简短地说明了经典力学中连续介质概念同分子物理学中分子团运动特性的关系,有助于正确理解连续介质概念的实质。这种联系建立起来后,为了分析上的方便,不妨把这些有关物性的量看作是质点本身所具有的原始定义或假设引入。也就是说,今后不必再从分子观点去讨论什么是刚体、弹性体或流体的模型,而直接用经典力学方法来定义,即刚体是指受外力作用后不会变形的物体(物体内存任二点间的距离不会改变);弹性体是指受外力作用后能产生有限变形,当外力去除后又能恢复原来形状的物体;流体则能连续不断变形,即通常所谓的流动性。其他的物性参数也可按同样方式引入。如流体的压缩性,不必按物体受外力作用后分子间距离改变程度来定义,而是直接用体积压缩系数  $\beta_p$  来定义,即

$$\beta_p = -\frac{\Delta V/V}{\Delta p} \quad (1.1.1)$$

式中体积  $V$  和压强  $p$  是流体的宏观状态参数。又如粘性,不必按流体在变形时分子运动对变形的影响来定义,而是按照流体在变形时是否具有抵抗变形的能力来确定。它在平直流动中,可以按牛顿内摩擦假设用动力粘滞系数  $\mu$  表示粘性。

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} \quad (1.1.2)$$

这里的摩擦力  $\tau$  和速度  $u$  也是宏观量。用这样的方法在实验测量上也是很方便的。流体力学作为一门宏观运动的学科,研究的重点就可以集中在流体的速度、压强、温度和密度等量随时间和空间的变化,而有关的其他物性参数可以看作是相对固定的,或者是某些物理量(如温度、压力等)的函数。后者可以用实验或分子物理学的方法得到。显然,这种经典力学的

方法在求解具体问题上要比直接用分子运动的方法要优越得多。

## § 1.2 描述流体运动的基本方法

在理论力学中我们用下列的方法来描绘质点的运动，即在不同的时刻下对质点所处的空间位置进行观察和记录：

$$x = F_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t), \quad y = F_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t), \quad z = F_3(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t) \quad (1.2.1)$$

式中  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  是该质点在初始时刻  $t = t_0$  所处的位置。关系式 (1.2.1) 实质上就是质点的运动轨迹，因而对它求关于时间的一阶和二阶导数就可以相继求得该质点的速度和加速度：

$$\begin{cases} u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dF_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t)}{dt} \\ u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dF_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t)}{dt} \\ u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dF_3(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t)}{dt} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2F_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t)}{dt^2} \\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2F_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t)}{dt^2} \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2F_3(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, t)}{dt^2} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

上述方法也同样可以用来描述质点系的运动。此时观察和记录所得的结果是关于质点系中每个质点在不同时刻所处的空间位置，即

$$x = F_1(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = F_2(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = F_3(\xi, \eta, \zeta, t) \quad (1.2.4)$$

上式与式 (1.2.1) 不同，其中  $\xi, \eta, \zeta$  不是某单个质点在初始时刻的位置，而是质点系中任一质点在初始时刻  $t_0$  时的位置。对连续介质，它是该介质在初始时刻所占有的空间坐标的连续变量，因而对任一质点，速度与加速度的表达式与式 (1.2.2) 和 (1.2.3) 不同，需要用偏导数来表示：

$$\begin{cases} u_x(L) = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial F_1(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} \\ u_y(L) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F_2(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} \\ u_z(L) = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F_3(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{cases} a_x(L) = \frac{\partial u_x(L)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_1(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^2} \\ a_y(L) = \frac{\partial u_y(L)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_2(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^2} \\ a_z(L) = \frac{\partial u_z(L)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_3(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

上述方法在流体力学中称为拉格朗日 (Lagrange J. L.) 方法。初始时刻质点所处空间的坐标称为拉格朗日变量。式中下标  $L$  表示用拉格朗日法表示的函数。

除此以外，在流体力学中还经常使用另一种描述流体运动的方法，它与拉格朗日方法不同，不是随时随地“跟踪”着每个流体质点，把它的时间、位置等动向记录下来，而是在流体运动所及的空间中，到处沿途设站，记录下在不同时刻通过各观察站的速度等量，即

$$\begin{cases} u_x = f_1(x, y, z, t) \\ u_y = f_2(x, y, z, t) \\ u_z = f_3(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

此处  $x, y, z$  与式(1.2.1)中的不同，它不是质点轨迹的位置，而是用以标明观察站的坐标，在流体力学中称为欧拉(EuLer L.)坐标。用这种方法描述流体的运动方法称为欧拉法。

拉格朗日法犹如列车长把列车在不同时刻所经历的地点和运行情况记录下来那样，而欧拉法则是采用各车站按时把各次列车经过各站的速度等运行情况记录下来。如果列车象流体那样川流不息的行驶，而车站又是沿途连续不断地设置，显然，为了获得列车的运行情况，两种方法是等效的。对流体也是类似的，可以用拉格朗日法或欧拉法来描述流体的运动，建立基本定律并由此推出有关的定理和方程。鉴于在理论力学中所使用的方法是拉格朗日法，因此在使用欧拉法作为描述流体运动的手段时，有必要了解两种方法的相互转换。

如果雅科比(Jacobi C.)式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.2.8)$$

则对式(1.2.4)进行反解，可以把拉格朗日变量转换为欧拉变量：

$$\xi = \xi(x, y, z, t), \quad \eta = \eta(x, y, z, t), \quad \zeta = \zeta(x, y, z, t) \quad (1.2.9)$$

把它代入式(1.2.5)中便得到

$$\begin{aligned} u_{x(L)}(\xi, \eta, \zeta, t) &= \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x[\xi(x, y, z, t), \eta(x, y, z, t), \zeta(x, y, z, t)]}{\partial t} \\ &= u_x(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.2.10a)$$

同理，

$$u_{y(L)} = \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = u_y(x, y, z, t) \quad (1.2.10b)$$

$$u_{z(L)} = \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = u_z(x, y, z, t) \quad (1.2.10c)$$

上式说明，初始时刻位于  $\xi, \eta, \zeta$  的流体质点，在时刻  $t$  的速度  $u_{(L)}(\xi, \eta, \zeta, t)$  与在时刻  $t$  通过空间点  $x, y, z$  所测得的速度  $u(x, y, z, t)$  是一样的。

反之，如果利用关系式(1.2.10)，式(1.2.7)可以写为

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f_2(x, y, z, t), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = f_3(x, y, z, t) \quad (1.2.11)$$

对上式中  $x, y, z$  在拉格朗日意义的理解下进行积分, 可得

$$\begin{cases} x=x(c_1, c_2, c_3; t) \\ y=y(c_1, c_2, c_3; t) \\ z=z(c_1, c_2, c_3; t) \end{cases} \quad (1.2.12)$$

如果在初始时刻  $t_0$  取  $c_1=\xi, c_2=\eta, c_3=\zeta$ , 则式(1.2.12)就是式(1.2.4)。这样便把欧拉法所得结果化为拉格朗日法的结果。

上述两种方法在流体力学中以欧拉法应用普遍。这由于欧拉法所提供的信息或计算结果通常是许多实际问题所希望直接回答的。例如我们欲知道一管道的流量或流体作用在物体上的力, 此时只需要知道在该时刻通过该处的流体速度或压力就可以了, 而对该处流体质点的来龙去脉(历史过程)则不感兴趣。欧拉法直接提供了问题所需的信息, 而拉格朗日法则给出的恰是流体质点运动的历程及沿该历程的信息, 因而在使用时很不方便。欧拉法在描述和分析流体运动规律时可以充分使用场论的工具。从数学上看, 在动力学问题中, 用拉格朗日法表示加速度(式1.2.6)是关于  $x, y, z$  的二阶导数, 而用欧拉法, 加速度只是关于速度  $u_x, u_y, u_z$  的一阶导数, 显然这在使用时要方便些。

拉格朗日法也有它的优点, 即用该法所得的计算结果, 除了流体的物理量外, 还直接给出了质点的运动轨迹。这对某一类问题, 如波的问题常常是较方便的。

最后需要说明, 尽管在流体力学中广泛地使用着欧拉法, 用欧拉坐标  $x, y, z, t$  来描述流体的运动, 但拉格朗日法的观点却是经常使用着, 用以表达流体的某些物理量随质点运动的变化。例如, 设  $A$  为某物理量, 在欧拉坐标中表示为

$$A=f(x, y, z, t)$$

如果把  $x, y, z$  同时看作质点  $\xi, \eta, \zeta$  在时刻  $t$  所处的位置, 即具有式(1.2.4)的关系。按复合函数求导方法对上式求导, 得

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.2.13)$$

上式左边表示物理量  $A(\xi, \eta, \zeta, t)$  在固定  $\xi, \eta, \zeta$  下对时间求导。由于初始坐标为  $\xi, \eta, \zeta$  的质点系在运动, 因此上式中的  $\frac{\partial A}{\partial t}$  表示该物理量随质点运动时的变化率。上式右边各偏导数则表示在欧拉坐标中求导。这样, 式(1.2.13)就给出了在欧拉坐标中随质点一起运动时的时间导数计算方法。为了清晰与方便, 式(1.2.13)的左边用  $\frac{Df(x, y, z, t)}{Dt}$  表示:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.2.14)$$

$\frac{Df}{Dt}$  称为流体的物质导数或随体导数。如果  $f$  表示质点的速度  $u$ , 则由式(1.2.14)可以直接得出在欧拉坐标中质点的加速度公式:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} u_x + \frac{\partial u}{\partial y} u_y + \frac{\partial u}{\partial z} u_z + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2.15)$$

式中右边  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  和  $\frac{\partial}{\partial z}$  称为对流项,  $\frac{\partial}{\partial t}$  称为局部项。

### § 1.3 作用力

引入了连续介质的模型，对作用力的处理也带来了一些改变。按照分子物理学的观点，作用在液体和气体分子上的力可以分为两类。一类是远程力，如重力场，惯性力场中的重力和惯性力；另一类是短程力，如分子之间的吸引力与斥力。由于在实际问题中，这种短程力对液体和气体运动的效应几乎小到只有在两个质点（微元体）相互接触时才起作用。为此在流体力学中，把第一类力统称为质量力（或体积力）。它与流体的质量分布与所在位置的场的强度有关。显然，这类力是作用在微元体的质心上的，与周围介质的作用无关。例如重力用流体的质量 $m$ 与重力场强度 $g$ 的乘积 $mg$ 来表示。一般质量力的形式可以表示为

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) \rho \Delta V \quad (1.3.1)$$

其中 $\mathbf{F}$ 是作用在单位质量流体上的质量力。对于体积 $V$ 的流体，总的的质量力可以表示为

$$\iiint_V \mathbf{F}(x, y, z, t) \rho dV \quad (1.3.2)$$

第二类力，在流体力学中称为表面力，它只与周围介质对该微元体的作用有关，因而它是一种接触力。作用在面积 $\Delta A$ 上的表面力可以表示为

$$p dA \quad (1.3.3)$$

作用在体积 $V$ 的流体上总的表面力为

$$\iint_S p dA \quad (1.3.4)$$

其中 $S$ 是体积 $V$ 的表面积。由于流体与周围介质之间的接触力是相互作用力，二者大小相等方向相反，因此对有限容积 $V$ 的总的表面力只要计算界面上的接触力就可以了。

把作用力分为质量力和表面力的提法，在力学的其他分支中也是如此。质量力与分子物理学中的远程力具有同样的性质。表面力的性质同连续介质的具体力学模型有关。

先从表面力在某一点所具有的空间性质来看。刚体，由于不能变形，外力可以沿着力的作用线任意移动，不会改变刚体运动的状态。弹性体或流体，由于变形的缘故，一般，作用在弹性体或流体上的外力将在整个介质内发生影响。具体地说，在它们本身内部质点之间将产生内应力，这些内应力不仅随质点所处的空间位置而异，且在同一点处对不同方向的表面，其方向与大小也不同。这就是说，这些内应力与刚体中的内力不同，它具有应力的性质（进一步的分析见§4）。

其次，这些内力在介质内部传播过程的时间效应也随介质性质而不同。例如外力作用的效应在刚体中的传播是瞬息的，不需要考虑时间的因素。对弹性体与流体，任何扰动（包括外力的作用）都是需要经历一定的时间过程才能传播到介质的各个部分。例如当流体某处受到某种扰动以后，首先是扰动点附近的压强发生变化，造成了该处的力学状态与未受扰部分发生不平衡，进而使相邻的部分也受到影响（扰动）。新的受扰部分又把不平衡推向更大范围的流体中去，按照这样的方式使某处的扰动逐步扩大到整个流体中去。这就是通常所说的压力波传播过程。显然，这个过程进行的快慢与介质的体积变形和压强变化有关。在通常的情况下，这个过程可以看作等熵( $S = \text{const}$ )的过程，扰动波的传播速度可以表示为

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}_s \quad (1.3.5)$$

按照上述的观点,在流体力学中也可以按照波速在介质中的传播速度来定义流体是可压缩的或不可压缩的。后者是指  $a \rightarrow \infty$  的情况。尚需指出,不可压缩流体只是在扰动传播的时间效应上同刚体一样,但在运动的形式上仍是截然不同的,必需计及变形的影响。

再从表面力所产生的动力学效应来看,刚体同弹性体也有所不同。对于刚体,由于质点间的距离不能改变,因此内力不会相对微元体做功。对于流体与弹性体,由于受力后会发生变形,因而对微元体力学分析时,这一部分内应力会对微元体做功,从而对微元体的状态变化产生影响。尽管对整个流体,微元体内部的表面应力是一种内力,不会改变整个系统的总能量,但毕竟在实现能量的转化过程中起着重要的影响。例如当理想流体从深为  $H$  的小孔流出时,出口速度与自由落体所得的速度同为  $\sqrt{2gH}$ 。自由落体动能的增加仅仅是由于重力做功的结果。流体起初随着高度的降低,动能增加很少,重力所作的功相当大的部分用以克服压差(或者转化为压力能)。只是在出口附近,由于压差的作用(或压力能的转化)使流体动能迅速增加,从而在出口处速度达到  $\sqrt{2gH}$ 。

### § 1.4 应力张量

在上一节中曾对作用在流体上两种力的一般性质作了初步讨论。由于质量力的性质简单易懂,为此在本节中仅就表面力的性质作进一步的分析。

根据连续介质的观点,流体中的表面力是由于流体在外力作用下运动时,为了保持它的平衡状态(在静力学中就是指静平衡状态)在流体内部必需存在的一种力。一般通过任一点各个不同方向的表面上所受的表面力方向与大小是不相同的。也就是说,流体内任一点的表面力不仅与该点的空间位置(矢径  $r$ )有关,并且还通过该点所取的表面在空间的方向(表面的单位法向矢量  $n$ )有关。考虑到流体的各种物理量也应沿着空间连续地分布,因而在通过同一空间点的各种不同方向表面上所作用的表面力之间存在着一定的联系,而不是不相关的。

如果过空间任意点  $M$  取一个四面微元体,使它的三个棱  $MA, MB$  和  $MC$  恰为正交坐标系的三个轴  $x, y, z$  (图 1.2)。以  $p_x, p_y$  和  $p_z$  表示作用在  $MBC, MCA$  和  $MAB$  三个面上的表面力(按单位面积计),并约定这些力在坐标轴方向的投影  $p_{ij}$  与坐标轴的取向相反(这样做是为了今后在实际问题的计算中,使所得的摩擦力总是取正值并相对于物体运动的反方向)。这里第一个下标表示与坐标轴相垂直的表面,第二个下标表示在坐标轴  $j$  上的投影。(  $i, j = x, y, z$  )。除了表面力外,作用在该四面体上还有质量力。由于作用在微元体上的质量力是三阶微量,而表面力则是二阶微量,因此当微元体体积趋于零时,可以把质量力略去,微元体的平衡只要考虑作用在四个面上的表面力就可以了。

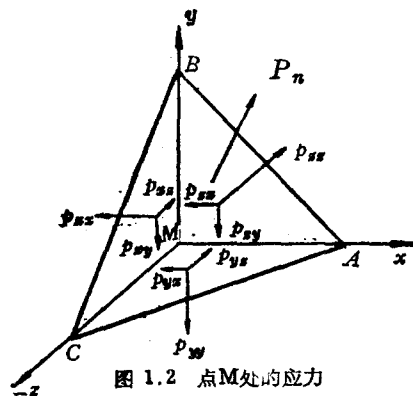


图 1.2 点  $M$  处的应力

根据微元体在平衡时合力为零的条件,可以把作用在任意表面  $ABC$  上的力表示为

$$p_n \Delta A_{ABC} = p_x \Delta A_{MBC} + p_y \Delta A_{MCA} + p_z \Delta A_{MAB}$$

或

$$\mathbf{p}_n = \sum_{i=x,y,z} \mathbf{p}_i \cos(n, \mathbf{e}_i) = \sum_i \sum_j \mathbf{p}_{ij} \cos(n, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j \quad (1.4.1)$$

式中  $i, j = x, y, z$ 。  $\mathbf{e}_i$  是坐标轴的单位矢量,  $\mathbf{n}$  是表面  $ABC$  的单位外法线矢量。上式说明, 作用在任一面积  $ABC$  上的单位表面力  $\mathbf{p}_n$  可以用三个矢量  $\mathbf{p}_i (i = x, y, z)$  或 9 个分量  $\mathbf{p}_{ij}$  表示。由于在上述讨论中, 局部坐标系  $xyz$  在空间的方位与描述流体运动的参考坐标系无关, 因而式(1.4.1)反映了作用在流体上的表面力本身所具有的内在性质。它与通常用标量或矢量表示的一些物理量不同, 具有张量的性质。如果用张量的符号来表示, 式(1.4.1)可以写为

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad (1.4.2)$$

式中  $\mathbf{P}$  称为应力张量, 它的 9 个分量为  $\mathbf{p}_{ij}$ , 即

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

显然, 它是一个二阶张量。

如果流体不具有强的极性, 微元流体不能传递和承受不平衡的力矩, 根据平衡的第二个条件, 即作用在微元体的合力矩为零, 由此可以得出

$$p_{ij} = p_{ji} \quad (1.4.4)$$

这样, 应力张量是一个对称张量。它具有 6 个不同的分量, 其中三个是法向分量  $p_{xx}, p_{yy}$  和  $p_{zz}$ , 3 个是切向分量  $p_{xy}, p_{yz}$  和  $p_{zx}$ 。

根据对称张量的性质可知, 在流体每一点存在三个相互垂直的轴, 沿着与该轴方向垂直的面上只有法向应力, 没有切向应力。该轴称为主应力轴。在以主轴为坐标轴的系统中, 应力张量可以表示对角线形式, 即

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

式中  $p_1, p_2, p_3$  称为主应力。

主应力在任意坐标系  $xyz$  中的分量可以表示为

$$p_{vj} = p_\nu \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_j) \quad (1.4.6)$$

式中  $\nu = 1, 2, 3$  为主应力轴,  $j = x, y, z$ 。另一方面, 由于  $p_{vj}$  可以用坐标系  $x, y, z$  中各分量来表示:

$$p_{vj} = \sum_k p_{kj} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_k) \quad (1.4.7)$$

式中  $k = x, y, z$ 。因此

$$\begin{cases} (p_{xx} - p_\nu) \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_x) + p_{xy} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_y) + p_{xy} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_z) = 0 \\ p_{yx} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_x) + (p_{yy} - p_\nu) \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_y) + p_{yz} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_z) = 0 \\ p_{zx} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_x) + p_{zy} \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_y) + (p_{zz} - p_\nu) \cos(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_z) = 0 \end{cases}$$

上式中三个方向余弦有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} p_{xx} - p_\nu & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} - p_\nu & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} - p_\nu \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4.8)$$

即

$$-p_y^2 + I_1 p_y^2 + I_2 p_y + I_3 = 0 \quad (1.4.9)$$

式中

$$I_1 = \sum p_{kk} \quad (1.4.10)$$

$$I_2 = -p_{xx}p_{yy} - p_{yy}p_{zz} - p_{zz}p_{xx} + p_{xy}p_{yx} + p_{yz}p_{zy} + p_{zx}p_{xz} \quad (1.4.11)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.4.12)$$

它与坐标  $xyz$  的空间方位无关, 称为应力张量的不变量。

设  $n_3$  是两个主应力轴 ( $i_1$  和  $i_2$ ) 的角平分线的单位矢量, 作用在与该线相垂直的平面上的应力以  $p_{3'}$  表示。

显然

$$p_{3'} = (p_1 i_1 + p_2 i_2) \cos 45^\circ \quad (1.4.13)$$

它的法线分量为

$$p_{3'3'} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad (1.4.14)$$

它的切线分量 (称为主剪切应力) 则为

$$p_{1'2'} = \sqrt{p_{3'}^2 - p_{3'3'}^2} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

或

$$\begin{cases} p_{1'2'} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \\ p_{2'3'} = \frac{1}{2}(p_2 - p_3) \\ p_{3'1'} = \frac{1}{2}(p_3 - p_1) \end{cases} \quad (1.4.15)$$

上式说明主剪切应力等于相应的两个主应力之差的一半。

在几何上, 应力张量所组成的二次有心曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) &= p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{xy}xy \\ &+ 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx = 1 \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

可以用来表示任一方向  $\mathbf{r}$  的应力  $\mathbf{p}_n$  的方向。为此只要由  $M$  点引出与作用面  $\Delta A_1$  垂直的矢径  $\mathbf{r}$ , 它与二次曲面相交的那一点处的法线方向  $\mathbf{n}$  就是作用在表面  $\Delta A$  上的应力  $\mathbf{p}_n$  的方向 (图 1.3, 二维情形)。

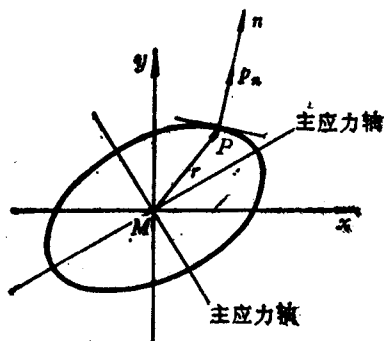


图 1.3 主应力

## § 1.5 微元体速度分解

在 § 1 中曾说过, 对固体, 可以把固体的变形同固体质点在空间中的位置移动分开来研究。这样, 固体质点系在空间的运动就可以用刚体运动来代替。按照刚体速度分解原理, 任



一质点  $M$  的速度  $\mathbf{u}$  可以分解为随同某基点平动 (位移) 和绕基点的转动速度之和, 即

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.5.1)$$

式中  $\mathbf{u}_0$  是基点  $o$  的平动速度 (通常可以取质心  $o$  为基点),  $\boldsymbol{\omega}$  是刚体绕  $o$  点瞬时角速度,  $\mathbf{r}$  是点  $M$  到点  $o$  的矢径。

对于流体, 由于不能把变形同流体质点在空间的位置移动不相关地截然分开, 在研究任一质点在空间的运动时必需把变形的影响同时一起考虑。设点  $O$  的坐标为  $x, y, z$ , 邻近点  $M$  的坐标为  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ 。  $M$  点的速度  $\mathbf{u}$  可以用泰勒级数展开 (略去二阶无穷小量) 为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \delta z$$

或 
$$u_i = u_{0i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1.5.2)$$

其中  $i, j = 1, 2, 3$ 。上式右边第二项系按张量分量的习惯写法记和, 即对同一项中出现的两个相同的下标表示求和。

由于式 (1.5.2) 中  $u_i$  和  $\delta x_j$  都是任意矢量的三个分量,  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  是一个二阶张量的 9 个分量, 它可以分解为反对称张量  $\mathbf{A}(a_{ij})$  和对称张量  $\boldsymbol{\epsilon}(\epsilon_{ij})$  之和:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.5.3)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5.4)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.5.5)$$

其中

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.5.6)$$

表示微元流体的直线变形速率, 即微元体沿轴向上的拉伸或压缩;

$$\begin{cases} \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1.5.7)$$

表示微元体的剪切变形速率, 它等于微元体的角变形速率的一半, 因此该对称张量又称变形