上海市职工高等学校试用教材

线性代数

上海市业余工业大学 黄午阳 编

上海科学技术文献出版社

上海市职工高等学校试用教材

线性代数

上海市业余工业大学 黄午阳 编

上海科学技术文献出版社

上海市职工高等学校试用教材
线 性 代 数
黄午阳 编
·
上海科学技术文献出版社出版
（上海高安路六弄一号）
新华书店上海发行所发行
江苏省宜兴县南漕印刷厂印刷
·
开本 787×1092 1/32 印张 4.375 字数 102,000
1982年5月第1版 1982年5月第1次印刷
印数：1—22500
书号：13192·39 定价：0.55元

《科技新书目》24-224

编 者 的 话

本书是为了配合职工高等学校开设线性代数这门课而编写的. 内容有线性代数的基础理论和基本运算，对于一些证明起来较复杂的定理，我们只是通过一些实例来加以说明，而并未给出详细证明. 这样做的目的，是为了减少初学者的一些困难.

本书分四章，各章的学时分配(仅供参考)如下：

第一章　行列式及其性质，约 4 学时；

第二章　矩阵，约 12 学时；

第三章　二次齐式，约 6 学时；

第四章　线性空间与线性变换，约 8 学时.

书末的附录一及附录二不作教学内容，主要供读者学习其他学科时查阅.

编　　者

1981.7.

目　　录

第一章 行列式及其性质

工程上的很多问题可归结为解一个线性方程组的问题. 本章将从求二元、三元线性方程组的解引出二阶及三阶行列式的概念, 然后推广到 n 阶行列式, 最后给出解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1 二阶行列式

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

可以 a_{22} 乘第一个方程, 以 a_{12} 乘第二个方程, 然后将两式相减, 得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

同样, 如以 a_{21} 乘第一个方程, 以 a_{11} 乘第二个方程, 然后将两式相减, 可得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

若 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, 就得到:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为了便于记忆 x_1 及 x_2 的表达式, 引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

这叫做二阶行列式．其中横写的叫做行，竖写的叫做列，二阶行列式含有两行、两列．从上式可知，二阶行列式是这样两项的代数和：一项是在左上角到右下角的对角线上的两个数的乘积，取正号；另一项是在右上角到左下角的对角线上的两个数的乘积，取负号．

例如，
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5-(-2)\times 3=11.$$

根据二阶行列式的定义，(2)式中两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果采用记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

于是，方程组(1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=1, \\ x+3y=2. \end{cases}$$

解　$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2,\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3.$

故
$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

§2　三阶行列式

我们再来解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{3}$$

从方程组(3)中的前两式消去 x_3, 后两式消去 x_3, 再从所得到的两个方程中消去 x_2, 就得到

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ =(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32} \\ -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).\end{aligned}$$

若 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ $-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时, 得出

$$\begin{aligned}x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32} \\ -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).\end{aligned}$$

同样, 我们可求得

$$\begin{aligned}x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3 \\ -b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}),\end{aligned}$$

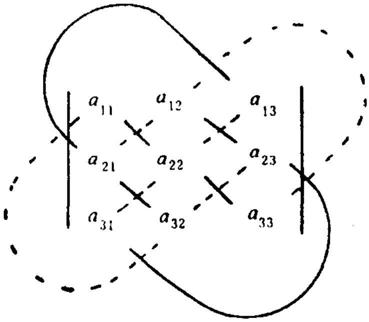
$$\begin{aligned}x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32} \\ -a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).\end{aligned}$$

为了便于记忆, 引进三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{4}$$

它含有三行、三列, 是六项的代数和. 这六项可这样来记忆: 如下图所示, 实线上三个数的乘积构成的三项都取正号, 虚线上三



个数的乘积构成的三项都取负号．例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1$$
$$+1\times(-1)\times1-1\times(-5)\times1$$
$$-3\times(-1)\times2-(-4)\times1\times1$$
$$=-10-12-1+5+6+4=-8.$$

引进三阶行列式后，上面 x_1、x_2、x_3 的表达式中，分母都是三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而分子则分别是行列式 D_1、D_2、D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

容易看出，D_1 是 D 的第一列中的 a_{11}、a_{21}、a_{31} 分别换成 b_1、b_2、b_3 得到的. D_2 是 D 的第二列中的 a_{12}、a_{22}、a_{32} 分别换成 b_1、b_2、b_3 得到的. D_3 是 D 的第三列中的 a_{13}、a_{23}、a_{33} 分别换成 b_1、b_2、b_3 得到的.

若 $D\neq 0$，则方程组(3)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-5y+3z=2, \\ x-y+z=-1. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6.$$

故方程组的解为

$$x=-\frac{11}{8},\quad y=-\frac{9}{8},\quad z=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

§3 n 阶行列式

一、n 阶行列式的定义

有了二阶、三阶行列式，就可把 $D\neq 0$ 时方程组(1)及方程组(3)的解很简单地表示出来. 我们在解 n 元线性方程组时，自然会想到它的解是否也能用 n 阶行列式来表示呢？这里碰到的

问题是如何定义 n 阶行列式. 为此，我们先从研究二阶、三阶行列式的结构入手，找出其内在的联系，然后根据这些联系来定义 n 阶行列式，并用它来解 n 元线性方程组.

观察三阶行列式(4)的结构可以得到:

1. (4) 中每一项都是三个数的乘积，各项中因子的第一个下标的次序均为 1, 2, 3, 而第二个下标的次序则分别为: 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1. 故 (4) 的任意项可写成 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$, 这里 i_1, i_2, i_3 是 1, 2, 3 的一个排列.

2. (4) 中每一项都带有符号，不是正号便是负号，这是根据什么规律确定的呢? 为了搞清楚这个问题，先介绍排列 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 的逆序数的意义. 在排列中一个数 i 的左边比 i 大的数字的个数称为该数字 i 的逆序数. 排列中所有数字的逆序数的和称为该排列的逆序数. 例如，当 $n=3$ 时，排列 2, 3, 1 中 1 的逆序数为 2, 2 和 3 的逆序数均为 0, 因此排列 2, 3, 1 的逆序数为 $2+0+0=2$; 而排列 3, 2, 1 中, 1 的逆序数为 2, 2 的逆序数为 1, 3 的逆序数为 0, 因此排列 3, 2, 1 的逆序数为 $2+1+0=3$.

排列的逆序数可按下述方法计算: 首先计算有多少记数排列在 1 的前面，其次，把 1 划去，计算有多少记数排列在 2 的前面(划去的 1 不再计算)，然后把 2 划去后，再计算有多少记数排列在 3 的前面，依次类推.

假设在 1 前面有 m_1 个记数，在 2 前面有 m_2 个记数，$\cdots$，在 n 前面有 m_n 个记数，这个排列的逆序数就等于 $m_1+m_2+\cdots+m_n$.

如果一个排列的逆序数为奇数，则称此排列为奇排列；若排列的逆序数为偶数，则称此排列为偶排列.

由 (4) 可知，凡排列 i_1, i_2, i_3 为偶排列的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 带正

号，反之，则带负号.

3．因为1、2、3共有$3!=6$个不同的排列，所以(4)是一个6项的代数和.

于是，三阶行列式(4)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}.$$

上面这些规则，对于二阶行列式显然也是适用的。现在根据这些规则来定义n阶行列式：

有n^2个数a_{ij}，i，$j=1, 2, \cdots, n$，排列成n行、n列，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{A}$$

叫做n阶行列式．a_{ij}叫做第i行第j列上的元素，n阶行列式就是所有这些项的代数和.

1．每项是形如$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$的乘积，其中各因子的第一个下标是按1，2，…，$n$的次序排列的，第二个下标$i_1$，$i_2$，…，$i_n$是1，2，…，$n$的一个排列.

2．每一项所带的符号是这样来确定的：若排列i_1，i_2，…，i_n为偶排列，取正号；反之，则取负号.

3．因为n个数字的所有排列共有$n!$个，所以这样的项共有$n!$个，用式子表示就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

n 阶行列式是指一个含有 $n!$ 项的代数和，每一项都是由 (A) 中的每一行和每一列任取一个元素，且仅取一个元素所成的积．把每一项的因子的第一个下标按照自然数的顺序书写，假若第二个下标所成的排列的逆序数为 t，这一项前面的符号就令它为 $(-1)^t$．

因此，当 t 是偶数(0 也当偶数看待)，也就是第二个下标所成的排列为偶排列时，这一项取正号，反之，t 是奇数时，这一项就取负号．于是，n 阶行列式也表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

二、行列式的性质

根据行列式的定义直接计算行列式是很麻烦的．为了简化行列式的计算，我们来讨论行列式的一些基本性质．对这些性质我们只是加以叙述，而不作证明，然后通过实例说明如何利用行列式的性质来进行行列式的计算．

性质 1　如果把行列式的某一行中所有元素同乘以 k，其结果等于用 k 乘原行列式．或者说，行列式的某一行中所有各数如有公因子 k，则可把 k 提到行列式外面．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 = A,$$

用 2 乘 A 的第一行，得

$$\begin{vmatrix} 2\times2 & 2\times1 & 2\times2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 = 2A.$$

特别当 $k=0$ 时，行列式的值是零，即行列式中如果有某一行完全是零，则行列式的值是零.

性质 2 如果行列式的某行的所有数均可写成两项的和，则这个行列式等于两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5+5 = 10 = A.$$

性质 3 交换行列式中的任意两行，行列式只改变符号.

例如，把 A 的第二行与第三行互换，就得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 = -A.$$

根据性质 3，可得到下面两个推论：

推论 1 行列式中如有两行完全相同，则这个行列式等于零.

因为把行列式 D 中相同的两行互换，行列式不变，但由性质 3 知，它们又应当反号. 所以 $D=-D$，即 $2D=0$，故 $D=0$.

推论 2 行列式中如有两行成比例，则这行列式等于零.

因为，如行列式中第 i 行的各数是第 $j(i\neq j)$ 行各对应数的 k 倍，则把第 i 行的公因子 k 提到行列式外面，就得到有两行完全相同的行列式，从而由推论 1 可知这个行列式等于零.

性质 4 如果把行列式的某行中各数同乘以 k 后，加到另一行的对应的数上，则这行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，用 2 乘 A 的第一行加到第二行上，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+4 & 3+2 & 1+4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10=A.$$

注意：这里用 k 乘行列式 D 的某一行是加到另一行上，而不是加到同一行上，如用 k 乘第 i 行又加到第 i 行上，这样就等于用 $k+1$ 乘 i 行，其结果是 $(k+1)D$ 而不是 D 了.

例 1 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}.$$

解 把第二行乘以 -1, 加到第一行上, 然后把第三行乘以 -1 加到第四行上去, 就得到:

$$\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & a-c & 0 & 0 \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c-a & a-c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

下面引进转置行列式的概念.

把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行都变为列, 不改变它们的前后顺序, 所得到的新的行列式

$$D^{\tau} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 D 的转置行列式. 显然 D 也是 D^{τ} 的转置行列式, 因此 D 与 D^{τ} 是互为转置的.

性质 5 行列式与它的转置行列式相等.

例如, A 的转置行列式

$$A^{\tau} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 = A.$$

性质5说明，在行列式中，行与列所处的地位是相同的，因此，凡是对行成立的性质，对列也同样成立，反之亦然，于是性质1到性质4，对列而言都是成立的.

例2 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

证:
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix},$$

由性质2,

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix},$$

由性质4,

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix},$$

由性质4,

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

由性质3,

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

容易看出，行列式的阶数越低越容易计算，因此很自然的提