数学通报丛书

几何作图 非欧几何 逻辑初步

中国数学会数学通报编委会编

科学技术出版社

几何作圖 非欧几何 邏輯初步

中国数学会数学通报編委会編

*

科学技术出版社出版

（北京市西直門外郝家灣）

北京 科学出版業營業許可証出字第 091 號

（北京五三五工厂印刷

北京書刊發行所發行 各地新华書店經售

*

开本：850×1168 1/32 印張：$4\frac{13}{16}$ 字数：107,000

1959 年 12 月第 1 版 1959 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—25,077

总号：1444 統一書号：13051.249

定价：（ 7 ）5 角 1 分

出版者的話

数学通报自創刊以来，發表了不少对讀者进修数学、扩大数学知識領域有帮助的文章，特別是發表了不少有关中等学校数学教学的文章，受到了讀者的欢迎，并經常收到讀者来信要求将这些文章分类編成單行本出版。数学通报編委会为了满足讀者这一需要，特将該刊自創刊号起至1959年中的文章，选其質量較好的并按性質分成数学知識介紹和中等数学教学两部分出書。前一部分已选編成“綫性代数多項式”、“实数極限近似計算”、“几何作圖非欧几何邏輯初步”、“概率和数理統計”、“关于电子数字計算机的一些問題”、“初等数学史”、“趣味的数学問題”和“中等数学習題解答集”；后一部分已选編选成“中学数学教学的一般問題”、“初中数学教材和教法分析”和“高中数学教材和教法分析”。

这十一本書的內容，有适合初等数学的，或适合在初等数学基础上进一步提高的，因此，具有相当高中数学水平的讀者，中等学校数学教师、大、中学生及数学爱好者均可閱讀。

“几何作圖　非欧几何　邏輯初步”是这套丛書中的一本。

目　次

几 何 作 圖

聶灵沼

I. 問題的源起

在中学平面几何学中，主要有两类問題：一类是討論几何圖形的性質，如三角形与圓的各种性質等．另一类是求作几何圖形，使它适合預先給定的条件．如求作綫段的中点，求作已知角的分角綫以及求作三角形的內接圓等．我們現在要討論的是后一类問題．

作圖的方法决定于作圖工具的选擇．自古代希腊以来直到現在，在平面几何中大家習慣于用无刻度的直尺与圓規来作圖．在只允許用尺規作圖的限制下，三等分一已知角，倍立方（卽求作一立方体，使其体积为已知立方体的体积的二倍）以及圓代方（求作一正方形，使其面积等于一已知圓的面积）成为古希腊三大作圖題．一直到十九世紀初，还沒有得到解决，就是說，还不能决定这三大作圖題是否可用尺規作出．但是由于十七世紀中解析几何（1638）的發現，不久就获得了用尺規作圖的解析判断标准，加以在方程式的代数解法方面获得了很大的进展，因此三大問題中的前两問題才获得了解决（1837）．至于后一問題，則直到 π 的超越性証明（1882）以后，才获得解决．这样才完全証明了几何三大問題都是不能用尺規作出的．

II. 用尺規作圖的解析标准的意义

由于几何三大問題經过历史上許多人求解始終沒有成功，反轉来怀疑用尺規求解也許是不可能的．于是进而求証用尺規求解的不可能．由此才借解析几何的方法建立了*用尺規作圖的解析标准*，就是用尺規作圖可能性的必要与充分条件．这种判

断条件的意义不限于証明几何三大問題的不可能，其积極的一面是由此可以判断任何作圖問題用尺規是否可以求解．

須要注意，作圖可能問題是由于仅允許用尺規作圖的限制而引起的．如果允許我們利用尺規以外的作圖工具，則有些原来不可作的問題就变成可能作的了．如倍立方在古希腊时用十字尺就已作出．又如三等分一角則有許多利用其他工具的解法．

Ⅲ．尺規作圖的解析标准

尺規作圖可能問題其实是一个代数問題，那是因为借解析几何的方法，把一个几何問題化成了一个代数問題．首先考察用尺規作圖的几个基本的步驟．任何一个尺規作圖，不外有限次地反复应用下列的几个步驟：

1） 在作圖过程中可在平面上任取一点 A 或任意截取一定長綫段．

2） 求作一綫段．

3） 求作一直綫（求作一角可化成求作一边的問題）．

4） 求作一圓．

5） 作不平行的两已知直綫 l_1 与 l_2 的交点．

6） 作一已知直綫 l 与一已知圓 O 的交点（如果存在的話）．

7） 作两已知圓 O_1 与 O_2 的交点（如果存在的話）．

1）中任取一点或任取一綫段在平分一角或平分一綫段时須用到．由此可以看出，求作的基本几何圖形不过是一些点、綫段、直綫与圓．而求作直綫的問題，等于求作过該直綫的某两点的問題；求作圓的問題等于求作該圓圓心与半徑的問題．另一方面，作为作圖根据的已知几何圖形也不过是一些点、綫段、直綫与圓；同样也可还原成一些已知点与一些已知綫段．所以，总起来說：在一个几何作圖的过程里，只不过是从一些已知点和已知綫段用尺規作出一些新的点和新的綫段的过程．

当平面上引进直角坐标以后，每个点有两个实数作为它的坐标，每个綫段可以用一个实数表示它的長．于是上面的几何作圖問題即化成一个代数問題：代表已知点的坐标和已知綫段的長度的那些实数与代表作出来的新点的坐标和新綫段的实数之間究有何种代数关系．其次就是上述問題的反面：求作的点的坐标和綫段的長度与已知点的坐标和已知綫段的長度应具有怎样的代数关系，才能使新的点和綫段用尺規从已知点和綫段作出来．第一个問題是求作圖可能的必要条件，第二个問題是找它的充分条件．先解决第一个問題．考察基本作圖的2)，5)，6)，7)四个步驟．

2)′ 求作綫段的長等于两点坐标差的平方和的平方根．

5)′ 設直綫 l_1 及 l_2 的方程为

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$

则交点的坐标为

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

6)′ 設直綫 l 的方程为 $ax+by+c=0$，圓 O 的方程为 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$，则交点的坐标为

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$y=-\frac{1}{b}(ax+c).$$

其中 $A=a^2+b^2$，$B=2(ac+ab\beta-\alpha b^2)$，

$$C=\alpha^2b^2+(c+\beta b)^2-\gamma^2.$$

7)′ 設两圓 O_1 及 O_2 的方程为

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2=\gamma_1^2,$$
$$(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2=\gamma_2^2.$$

求 O_1 与 O_2 的交点，等于求圓

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2=\gamma_1^2$$

与割綫

$$2(\alpha_2-\alpha_1)x+2(\beta_2-\beta_1)y+(\alpha_1^2-\alpha_2^2+\beta_1^2-\\-\beta_2-\gamma_1^2+\gamma_2^2)=0$$

的交点．可仿 6)′ 求出．

由 2)′ 看出作出的綫段的長度可从端点的坐标經四則运算及开实平方得出．由 5)′、6)′、7)′ 看出用尺規作得的点的坐标可由已知点的坐标及已知綫段長經四則运算与开实平方表出．基本作圖 3)与4)或为作圖的目的或为基本作圖 5)、6)、7)的准备．而基本作圖 1）中点的坐标及綫段的長度恒可看作为有理数．因为这样的取法总可以办到．

尺規作圖的必要条件．如果某一几何圖形可用尺規从一已知圖形作得，則該圖形中的交点的坐标和綫段的長度可由已知圖形的交点的坐标和綫段的長度經有限次的四則运算及开实平方得到．

現在进一步証明，上述条件不仅是必要的，而且是充分的：**設一点的坐标或一綫段的長可从一些已知点的坐标和一些已知綫段的長經有限次的四則运算及开实平方而得到，則該点与該綫段可用尺規从已知点和綫段作出．**

这只要能够証明下面四步就成了：

(a) 設 a，b 为实数，則 $a\pm b$ 可用尺規作出．

(b) a，b 給定，則 $a\cdot b$ 可用尺規作出．

(c) a，b 給定且 $b\neq 0$，則 a/b 可用尺規作出．

(d) $a>0$ 則 $\sqrt{a}$ 可用尺規作出．

証 (a)$a\pm b$ 显然可作．

注意：由(a)、(b)、(c)三步，从一單位長綫段出發，可作出一切以有理数为坐标的点来．

(d) $\sqrt{a}$，$a>0$．

反复应用上面四个步驟，即可从已知点的坐标和已知綫段的長作出新点的坐标和新綫段的長．总起来說即得作圖的解析标准：

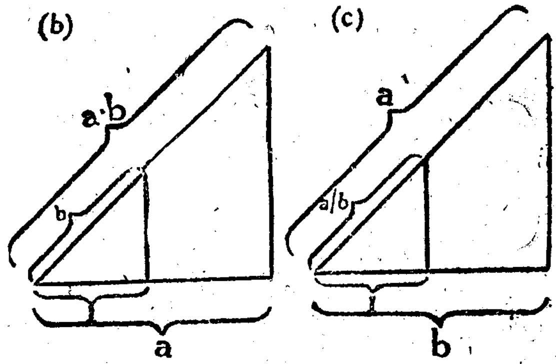

圖 1

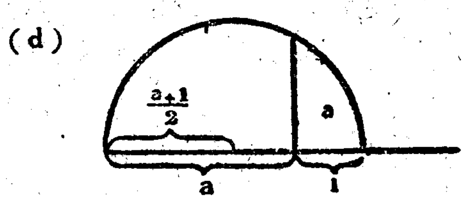

圖 2

一个几何圖形能用直尺与圓規从已知的几何圖形作出的必要与充分条件是，构成这个圖形的交点的坐标和綫段（包含半徑）的長度可从已知圖形的交点的坐标和綫段的長度經有限次的四则运算及开实平方根而得到.

例 求作正 2^n 边形．令 S_n 表正 2^n 边形一边的長．则

$$S_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}},$$

当 $n>2$ 时．

$$S_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}.$$

上述充分条件与坐标軸的选擇是无关的．这由条件的必要性就可知道．

Ⅳ. 尺規作圖的解析标准的另一說法

在一些作圖的問題中，經过解析方法的結果，往往不是直接去判断一个未知量是否能从已知量經四則运算及开实平方而表出，而通常是先将未知量表成以已知量的有理函数（就是从已知量經加、減、乘、除而得到的量）为系数的某多項式的一根．欲根据此多項式判断未知量是否可从已知量經四則运算及开实平方而得到，則上述判断标准就很不适用了．必須将上述的判断标准改換形式．我們将上述判断标准的另一說法写在下面：

尺規作圖的解析标准的另一說法：一个几何圖形能用直尺与圓規从已知几何圖形作出的充分与必要条件是，构成这个圖形的每一个量 s（如交点的坐标或綫段的長度）**能从已知圖形的量**（交点的坐标和綫段的長度）$a,b,c,\cdots,d$ **通过解一串含实根的二次方程的鏈**

$$x^2+a_1x+b_1=0,$$
$$x^2+a_2x+b_2=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^2+a_rx+b_r=0$$

而得到，就是說，未知量 s 为第 r 个二次方程的根，而且这串方程有下述性質：第 i 个二次方程 $x^2+a_ix+b_i=0$ 的系数 a_i，b_i，是前面 $i-1$ 个方程 $x^2+a_jx+b_j$($j=1,2,\cdots,i-1$) 的根以及已知量 $a,b,c,\cdots,d$ 的有理函数．

証：条件的充分性是比較显然的．由于每个方程的根都是实的，則第一个方程的根可由已知量 $a,b,c,\cdots,d$ 經四則运算及开实平方而得到，因此第二个方程的根，按照假設，可由 $a,b,c,\cdots,d$ 經四則运算及开实平方而得到．如此类推（利用数学归納法）可知未知量 s 也是这样．

条件也是必要的．如果未知量 s 能用尺規从已知量 a，b，$c,\cdots,d$ 作得，則必然是經过基本几何作圖 1）至 7）的累次应用而得到，也就是說，s 是由已知量 $a,b,c,\cdots,d$ 經过一串中間

量 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 而得到．詳細地說 a_i 是某中間点的坐标或綫段的長度，而这中間点或綫段是經过某基本作圖从 $a, b, \cdots, d$ 所代表的已知点和綫段以及 $a_1, \cdots, a_{i-1}$ 所代表的中間点和綫段而得到的．如果所用到的基本作圖是 1），則該点可取成坐标为有理数的点，綫段可取成其長为有理数的綫段．由基本作圖 3)、4)、5)所得到的 a_i 显然是 $a, \cdots, d$ 及 $a_1, \cdots, a_{i-1}$ 的有理函数．而由基本作圖 2)、6)、7) 所得到 a_i 显然是以 $a, \cdots, d$ 及 $a_1, \cdots, a_{i-1}$ 的有理函数为系数的二次方程的一根，而且这个二次方程的根是实的．須要注意的是，这个方程的另一根显然也是 $a, \cdots, d$ 及 $a_1, \cdots, a_{i-1}$，a_i 的有理函数．于是条件的必要性即被証明．

上述第二种形式的判断标准給予我們一个决定某个圖形不可能用尺規作圖的充分条件．首先我們推出一个能用尺規作圖的另一必要条件．

定理 1. 如果未知量 s 能从已知量 $a, b, c, \cdots, d$ 用尺規作出，則 s 必須适合一个次数为 2^n 的而系数为 $a, b, \cdots, d$ 的有理函数的不可約多項式[对包含有理数域及 $a, b, \cdots, d$ 的最小域而言．也就是对由 $a, b, \cdots, d$ 的所有有理函数組成的域 $R(a, b, \cdots, d,)$ 而言]．

証 对上述二次方程鏈的長度 r 作归納法，当 $r=1$ 时显然．因为此时 s 为 $x^2+a_1x+b_1$ 的根，只要看这个多項式在 $R(a, \cdots, d)$ 上可約或不可約，則 s 就适合一个在 $R(a, \cdots, d)$ 上不可約的 $2^0=1$ 次或 $2^1=2$ 次的多項式．現在假定当二次方程鏈的長度为 $r-1$ 时定理是眞的．由此来証明当鏈的長度为 r 时定理也眞，茲分两种情形討論：

1) 第一个多項式 $x^2+a_1x+b_1$ 在域 $R(a, \cdots, d)$ 上可約，即可分解成两个一次因式．此时第一个方程的根已在 $R(a, \cdots, d)$ 中．而第二个方程的根已是 $a, b, \cdots, d$ 的有理函数．因此 s 已經可以由二次方程鏈

$$x^2+a_2x+b_2=0,$$

$$x^2+a_3x+b_3=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^2+a_rx+b_r=0$$

得到，而这个鏈仍适合定理中的条件，按归納法假設，s 适合一个在 $R(a,\cdots,d)$上不可約的 2^n 次方程.

2） 第一个多項式 $x^2+a_1x+b_1$ 在 $R(a,\cdots,d)$上不可約. 設 α,α' 为它的根. 不难証明，所有的数 $e+f\alpha,e,f$ 取 $R(a,\cdots,d)$ 中的数，按实数的加法和乘法，作成一个数域. 而且这个域是 $R(a,\cdots,d)$的扩域，用 $R(a,\cdots,d)(\alpha)$来表示. 于是 s 可以看作从已知量 $a,\cdots,d$ 及 α[也就是从域 $R(a,\cdots,d)(\alpha)$] 通过解一串含实根的二次方程 $x^2+a_2x+b_2=0,\cdots,x^2+a_rx+b_r=0$ 而得到. 按归納法假設. s 适合一个在域$R(a,\cdots,d)(\alpha)$上不可約的 2^n 次方程 $g(x)=x^{2n}+c_1x^{2n-1}+\cdots+c_{2n}$ ，c_i 屬于 $R(a,\cdots,d)(\alpha)$，如果系数 $c_1,\cdots,c_{2n}$ 已經屬于子域 $R(a,\cdots,d)$，則 $g(x)$ 当然也是 $R(a,\cdots,d)$上的不可約多項式. 于是定理卽被証明. 如果 $c_1,\cdots,c_{2n}$ 不全屬于 $R(a,\cdots,d)$，就是說，如將 c_i 写成

$$c_i=\beta_i+\gamma_i\alpha,$$

至少有一个 γ_i 不为 0. 令

$$c_i'=\beta_i+\gamma_i\alpha',$$

且作

$$\bar{g}(x)=x^{2n}+c_1'x^{2n-1}+\cdots+c_{2n}'.$$

易証$\bar{g}(x)$在域$R(a,\cdots,d)(\alpha)$上也不可約. 用反証法，假定 $\bar{g}(x)$ 在 $R(a,\cdots,d)$上可約:

$$\bar{g}(x)=\bar{\varphi}(x)\bar{\Psi}(x)=(x^m+b_1'x^{m-1}+\cdots+b_m')$$
$$(x^t+d_1'x^{t-1}+\cdots+d_t').$$

其中 $m,t\geqslant 1$ 而且 b_i'，d_j' 屬于 $R(a,\cdots,d)(\alpha)$. 但 b_i'，d_j' 也可用 α' 写出来

$$b_i'=\lambda_i+\mu_i\alpha',\ d_j'=\eta_j+\xi_j\alpha'.$$

$\lambda_i,\mu_i,\eta_j,\xi_j$ 皆屬于 $R(a,\cdots,d)$. 令

$$b_i=\lambda_i+\mu_i\alpha,\ d_j=\eta_j+\xi_j\alpha,$$

, 018—69C

而且作 $\varphi(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$,

$\Psi(x)=x^t+d_1x^{t-1}+\cdots+d_t$.

由計算可知: $g(x)=\varphi(x)\Psi(x)$.

$g(x)$在$R(a,\cdots,d)(\alpha)$将是可約的了.引出一个矛盾,既知$\bar{g}(x)$在$R(a,\cdots,d)(\alpha)$上不可約，即易証明$f(x)=g(x)\bar{g}(x)$不仅是子域$R(a,\cdots,d)$上的多項式而且是不可約的，$f(x)$的系数屬于$R(a,\cdots,d)$是显然的，今来証明$f(x)$在$R(a,\cdots,d)$上是不可約的，用反証法，假定$f(x)$在$R(a,\cdots,d)$上可約，即有分解式

$$f(x)=\varphi(x)\Psi(x).$$

$\varphi(x)$，$\Psi(x)$的次数皆$\geqslant 1$，最高項系数为1，而且系数皆在$R(a,\cdots,d)$內，試在扩域$R(a,\cdots,d)(\alpha)$內比較两种分解式.

$$f(x)=g(x)\bar{g}(x)=\varphi(x)\Psi(x),$$

由因式分解唯一定理,就非有$g(x)=\varphi(x)$或$g(x)=\Psi(x)$不可.无論如何,$g(x)$的系数将屬于子域$R(a,\cdots,d)$了.矛盾，于是s适合在$R(a,\cdots,d)$上不可約的2^{n+1}次方程.定理1至此完全証明.

为了便于应用，可以将定理1写成下面形式:

定理 1′. **設$f(x)$为一个m次多項式，而系数是已知量$a,b,\cdots,d$的有理函数. 如果$f(x)$在域$R(a,\cdots,d)$上不可約而且它的次数m含有大于2的質因子，則$f(x)$的任一根不可能从已知量$a,b,\cdots,d$用尺規作出.**

应用定理1′，即可解决三大几何作圖問題中的两个.

倍立方問題. 設一已知正立方体的边長为a. 求作另一正立方体，使它的体积等于已知正立方体的体积的二倍.

解 当已知正立方体的边長为1时此圖不可能作出，由此就可知在任何情形下也不可能. 設所求正立方体的边長为x，則

$$x^3=2,$$

此时已知量是1. $R(1)$=有理数域. 因x^3-2沒有有理根. 它在有理数域上不可約. 所以x不可能从有理数用尺規作得.

三等分任意一角. 給定一角α，求作一角等于$\dfrac{\alpha}{3}$.

解　以角 α 的頂点为坐标原点，以一边为 X 軸．此时 $\angle NOX=\alpha$．求作一角 $\angle MOX$ 使之等于 $\frac{\alpha}{3}$．为了求得一个解析的标准，作一个以 O 为圓心的單位圓．設單位圓分别交直綫 ON，OM 于 A，B 二点．于是 A 点坐标 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 为已知

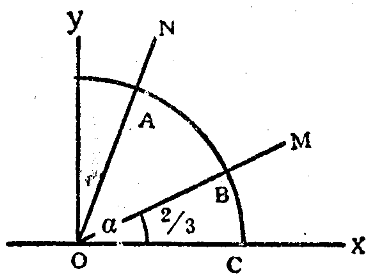

圖 3

量，而 B 点的坐标 $\left(\cos\frac{\alpha}{3},\ \sin\frac{\alpha}{3}\right)$ 为未知量，假如角 $\frac{\alpha}{3}$ 可从已知角 α 作出，就是說直綫 OM 可从点 A, O, C 作出的話，則交点 B 也可从点 A, O, C 作出．現在来証明点 B 一般不可能从 A 点作出，于是三等分任意角的不可能性即被証明了．由三角公式知

$$4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}-\cos\alpha=0,$$

換句話說 B 的横坐标适合下列三次方程

$$4x^3-3x-\cos\alpha=0.$$

如果能証明，对于 α 的某一特别值，B 点不可能作，則对于 α 的一般值，B 点当然也不能作．特别取 $\alpha=60°$．則 $\cos\alpha = =\frac{1}{2}$．于是上述方程即变成

$$4x^3-3x-\frac{1}{2}=0,$$

或

$$(2x)^3-3(2x)-1=0.$$

令 $y=2x$．方程 y^3-3y-1 在有理数域上不可約，因之 $4x^3-3x-\frac{1}{2}$ 也不可約，这就是說，B 点的横坐标 x 不可能用尺規作得．所以 B 点也不能用尺規作得．三等分任意角不可能即被証明．

等分圓周法[1]

Б.А. 科尔得門斯基

分圓周为n等分，或与此有联系的关于作正多角形的問題，在学校里的教科書中，构成了平面几何作圖問題的一部分.

教师教給学生的，是利用圓規和直尺，把圓周分为3、4、6等分的方法；有时还講把圓周分成10或5等分的方法，并把能否等分圓周的高斯檢驗法，介紹給学生.

当准确的作圖不能做到时，教师們便介紹一种近似的利用量角器分圓周的方法. 墨守着教科書的成法，他們常常仅作到这一步为止.

利用几何的方法是可以准确地分圓周为3、5、6、15、17及257等分的，然而这里并沒有一个統一的方法；分圓周为15等分的方法是这样，而分圓周为5或6等分的方法又是那样，所有的方法都得記住，这对学生有何益处呢?

正由于这样，从学校里畢业的人，几乎在任何时候，誰也不用把圓周分为5、10、17等分的几何方法. 他們往往純粹只利用量角器来分圓周为任意等分，只在分圓周为3、4、6等分时，才可能有例外(因为人們早已熟悉了这些方法).

无疑地，学生們对于下面所要叙述的近似的等分圓周的几何方法，一定会感到莫大的兴趣. 此法常为建筑师所采用，不管分圓周为多少等分，其方法是一致的.

当知道了利用此法可准确地分圓周为3、4、6等分之后，对于这个方法的認識，将进一步的加深.

設要分圓周为n等分(圖1)引任意直徑AB，在AB上作等边三角形ABC. 用点D分直徑AB成比値$AD:AB=2:n$.

連接C，D两点，并延長CD交圓周于E点，其时AE弧将

[1]本文內所提到的各种問題，可参看原东北人民政府教育部編譯的高中平面几何，219—225各节.——譯者

近似的等于圓周的$\frac{1}{n}$，或者說 AE 弦近似的为圓內接正 n 角形的一边.

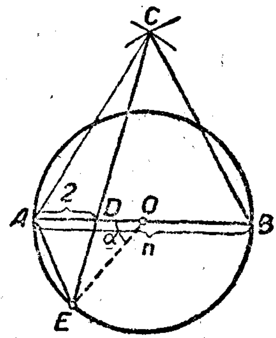

圖 1

如果把所得中心角$\widehat{AOE}$和等分数 n 中間的关系用公式表示出来，那末即得：

$$\operatorname{tg}\widehat{AOE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+16n-32}-n}{n-4}$$

从另一方面来看，如果完全准确地分圓周为 n 等分，那末每边所对的中心角应等于$\frac{2\pi}{n}$. 比較角$\widehat{AOE}$ 和 $\frac{2\pi}{n}$，即可得到由于把 AE 弧当作圓周的$\frac{1}{n}$而造成的誤差(見 16 頁表).

将某些 n 值代入公式，經計算的結果，正如表中所示，上述方法可以近似地分圓周为 5、7、9 及 10 等分. 所得誤差并不大，自 0.07 到 1 %.在大多数的实际問題中，这样的誤差是完全可以允許的. 从表中可以看出，此法的准确度，隨 n 值的增大而显著地降低，即相对誤差增大. 但是，正像下面所要証明的，相对誤差絕不会大于 10.3%.

現在讓我們来推証出上面的公式：

設半徑 R＝1（圖 2）及 $AD:AB=2:n$；

	3	4	5	6	7	8	10	20	60
$\frac{360^\circ}{n}$	120°	90°	72°	60°	51°26′	45°	36°	18°	6°
$\widehat{AOE}$	120°	90°	71°57′	60°	51°31′	45°11′	36°21′	18°38′	6°26′
誤差%	0	0	0.07	0	0.16	0.41	0.97	3.5	7.2

于是：$AD=\frac{4}{n}$；$OD=1-\frac{4}{n}$；

令 $EF\perp OA$；$\angle AOE=\alpha$；

得 $EF=\sin\alpha$；$OF=\cos\alpha$

$$DF=OF-OD=\cos\alpha-\left(1-\frac{4}{n}\right)$$

$$OC=\sqrt{3}\text{；}$$

因 $\triangle EFD\backsim\triangle ODC$；

故 $\frac{DE}{EF}=\frac{OD}{OC}$；$\frac{\cos\alpha-\left(1-\frac{4}{n}\right)}{\sin\alpha}=\frac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt{3}}$；

設 $1-\frac{4}{n}=k$，則 $\frac{\cos\alpha-k}{\sin\alpha}=\frac{k}{\sqrt{3}}$，

亦即 $\sqrt{3}\cos\alpha-k\sin\alpha=k\sqrt{3}$.

但已知：$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$；

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

代入上式：得

$\sqrt{3}-k\cdot\mathrm{tg}\alpha=k\sqrt{3+3\mathrm{tg}^2\alpha}$.

等号两面平方，可得到关于$\mathrm{tg}\alpha$的二次方程式：$2k^2\mathrm{tg}^2\alpha+2k\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha+3(k^2-1)=0$.

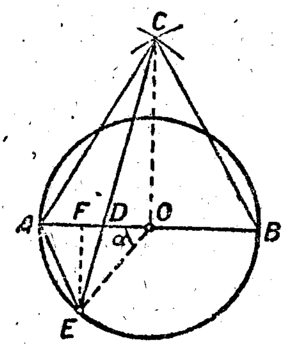

圖 2

解此方程式，并将k值代入.

得 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+16n-32}-n}{n-4}$.

对于九年級学生来說，这个結論是完全能够理解的，并且可以作为很好的習題.

現在来求相对誤差的極限：