连续弹性地基上梁的計算

И. А. 西姆武利迪 著

水利出版社

連續彈性地基上梁的計算

（近似計算法）

И. А. 西姆武利迪　著

武　家　[illegible]　譯

水　利　出　版　社

1957年3月

在"連續彈性地基上梁的計算"一書中，著者嚴格地批判了文克列尔-齐麥尔曼假設的缺点，而根据彈性理論提出了一种新的近似計算方法。对于各种复雜荷載下的基礎梁的問題，著者都根據这方法推導出求反力、剪力和弯矩的公式，以供直接計算，不需要查表或解联立方程式等为其他解彈性地基方法所必需的手續。因此本書可作为土建水利技術人員的設計參考書。

連續彈性地基上梁的計算

原書名　Расчет балок на сплошном упругом основании

原著者　И.А.Симвулиди

原出版处　Государственное издательство "советская наука"

原出版年份　1955

譯者　錢家欢

出版者　水利出版社（北京和平門內北新華街35号）

北京市書刊出版業營業許可証出字第080号

印刷者　水利出版社印刷厂（北京西城成方街13号）

發行者　新華書店

89千字　787×1092　1/32　4 2/16印張

1957年3月第一版　北京第一次印刷　印数1～4,200

統一書号：15047.52　定价(11)0.75元

目　　錄

緒　　言

連續彈性地基上的梁的計算，是一个具有很大实用价值的重要理論問題，当計算鉄路的上層結構、条形基礎以及其他許多地下和地上建筑物基礎时，具有廣泛的用途。

对于連續彈性地基上的梁的計算，在大多数的情形下，利用下列形式的梁的彈性綫微分方程：

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=f(x)-p_x, \qquad (1)$$

式中：　EI——梁的剛度；

y——梁的中和軸的垂直位移；

$f(x)$——已知的作用荷載；

p_x——自地基方面來的土的分布反力。

这里 p_x 与 y 值是未知的。为了找这兩个未知值，一个微分方程是不够的，故有必要寫出連系着这兩数值的附加方程。所采用的这兩个数值間的关系式的特征，决定着連續彈性地基上梁的不同的計算方法。

到現在为止，在工程实踐中当計算連續彈性地基上的梁时，有一部分人根据文克列尔—齐麥尔曼（Винклер-Циммерман）的假設。这个假設的出發点就是地面單元面積的位移与該面積上外压力之間成正比关系。这些数值間的关系可用下式表示：

$$p_x=ky, \qquad (1a)$$

式中：k—— 垫層系数。

在現今，基于上述的关系的关于彈性地基上梁的計算理論已由苏联学者們研究出來了，研究成果的完善及其在应用上的簡便，已达到在这一理論領域內未必能更進一步簡化的程度。

但是在最近一个时期，文克列尔—齐麥尔曼的假設受到了嚴正的批評，从而揭露了这种假設一系列的缺点，其中最重要的如下：

1.当按照这个假設計算时，假定僅在梁下的地面發生沉陷，而一出梁的范圍以外，沉陷就等于零。

但是試驗証明，鄰近梁的地面部分也受到作用，此处地面沉陷的变化并不是突变的，而是漸变的。这样，沉陷就擴大到梁的范圍以外的某一距离上。

2.方程式（1）表示所考慮点的压力与沉陷間的比例关系，其实，理論和实驗的資料都証实了下列情况，即地面某点的沉陷不僅与該点的荷載有关，而且也与鄰近各点的荷載有关。

3.学者和專家們的許多研究确定，垫層系数实际上并不是表征土的物理特性的一个量，而它随基礎在平面內的尺寸、形狀及其剛度而定。因此，借小于实际建筑物的試板的荷載所得的垫層系数，完全不符合于建筑物所应采用的系数。

4.按照这个假設，承受着均布荷載的柔性基礎似乎不發生彎曲，其实建筑实踐証明，这是不对的。

还在 1919 年，普罗克托尔（Г.Э.Проктор）首先指出了文克列尔—齐麥尔曼假設的缺点。三十年之前就已开始出現想用新的方法來解决彈性地基上的梁的計算問題的意圖。

但尽管有其重大的实际意义，而由于数学上的困难，新的方法很久还是存在着建筑物計算理論的最落后的部分。僅在不久以前，苏联学者的著作，才不应用文克列尔一齐麥尔曼假設，而闡明了不論在平面問題或空間問題条件下的彈性地基上的梁的計算。

苏联学者的著作对于建筑力学的这一部分給予了很大的补充。特别必須指出格尔謝華諾夫（Н.М.Герсеванов）、热莫西金（Б.Н.Жемочкин）、庫兹湼佐夫（В.И.Кузнецов）、弗洛林（В.А.Флорин）、菲朗湼科一博罗季奇（М.М.Филоненко-Бородич）、魯德湼夫（В.И.Руднев）、戈尔布諾夫一波薩多夫（Горбунов-Посадов）和很多其他学者的著作，对于彈性地基上梁的計算的各种不同的問題提供了新穎而独創的解答。

本著作是作者所建議的关于連續彈性地基上梁的計算簡化方法的進一步發展●，本方法不用文克列尔一齐麥尔曼假設。書中首先推導当地面上作用各种不同分布荷載时确定土的变形的公式。

当推導近似公式时，我們利用确定土变形的公式以及格尔謝華諾夫的間断函数理論●，該理論对于解答作者所提出的問題給予了很大的方便。

以一般公式为基礎，对于梁上荷載的特殊情况也導出了公式。

● 参閱作者在1936年“地下鉄道建筑”雜志第四期的論文“不用文克列尔一齐麥尔曼假設進行的彈性地基上梁的計算”以及1949年金屬出版社出版的“鋼的性質”第十八卷論文集中的“連續彈性地基上梁的計算”。

● 参閱1933—34年全苏科学研究院关于工程建筑物地基与基礎研究方面的論文集第一卷和第二卷。

在本著作中，解出了許多例題，并且把按这个方法計算的結果与按其他作者的方法計算的結果（在同一条件下）作了比較。

鑒于格尔謝華諾夫間断函数理論在本書后面的論述中的重大作用，我們在这里引述一下关于它的簡略的基本知識。

間断函数是具有下列性質的某些函数，即对于自变量的某些数値它們等于零，而对于另一些数值它們就等于一。間断函数可分为延伸間断函数和瞬时間断函数。延伸間断函数又分为單側的和双側的。

如果一种函数在某一自变量数值时發生間断，即在自变量的所有数值小于所指的某一数值时函数等于零；当自变量的所有数値大于这个数值时函数等于一，而当等于这个数值时函数等于二分之一，那末这种函数叫做單側延伸間断函数。

單側延伸間断函数以右下角注以角标的字母 Γ 标志之，角标表示对应于間断的自变量数值，例如 Γ_a。根据以上所述，

当 $x<a$ 时 $\Gamma_a=0$，当 $x>a$ 时，$\Gamma_a=1$，当 $x=a$ 时 $\Gamma_a=\frac{1}{2}$。

双側延伸間断函数是这样的一种函数，对于在某两个自变量的極限值之間的所有自变量值該函数都等于一，而在这兩个極限以外就等于零。

双側間断函数以右上角和右下角加注角标的字母 Γ 來表示，角标表示函数發生間断时自变量的倍数值，右上角注較大的数值，右下角注較小的数值，例如 Γ_a^b。这就是說，

$$\text{当 } x<a \text{ 时或者 } x>b \text{ 时 } \Gamma_a^b=0$$

$$\text{以及当 } x>a, \quad \text{但 } x<b \text{ 时 } \Gamma_a^b=1.$$

双側延伸間断函数等于兩个單側間断函数之差，即：

$$\Gamma_a^b=\Gamma_a-\Gamma_b\,.$$

例如，要求借助于間断函数以分析法來表示圖 1 上間断函数的数值。如上所述，列于圖 1 的間断函数可寫成下式：

$$y=\Gamma_0^3\,x+\Gamma_3^5\,2+\Gamma_8^{10}\,3+\Gamma_{10}\,5\,.$$

瞬时間断函数可以是一階的也可以是二階的。Γ_a 的一階導数就是一階瞬时間断函数，以 Γ_a' 表之。对于不等于 a 的所有自变量值 x 而言，一階瞬时間断函数等于零，而如果 $x=a$，則 Γ_a' 等于無窮大。

例如，如果在梁上横坐标 $x=a$ 的一点上作用着集中力 P，那末 $\Gamma_a'P$ 將表示由于集中力 P 所產生的荷載圖。

Γ_a 的二階導数就是二階瞬时中断函数，以 Γ_a'' 來表示。它对于不等于 a 的所有自变量值 x 也等于零。例如，如果在梁上横坐标为 $x=a$ 的一点上作用着集中力矩 M，那末 $\Gamma_a''M$ 的乘積將表示这个力矩所產生的荷載圖。

按照格尔謝華諾夫的公式進行間断函数的多重積分

$$\overbrace{\iint\cdots\int}^{n}\Gamma_a f(x)dx^n=\Gamma_a\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(x)(x-z)^{n-1}dz+$$

$$+D_{n-1}x^{n-1}+D_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+D_1x+D_0\,.\quad(2)$$

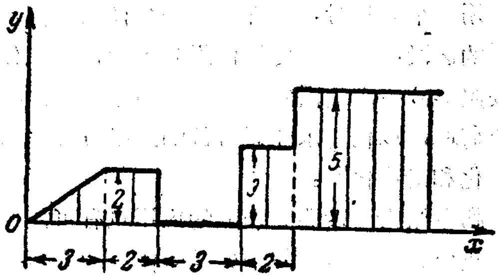

圖 1

当計算連續彈性地基上的梁时，必須确定梁的横断面的偏轉角、梁在某一定点的撓度、某一定断面内的弯矩和剪力。

在确定上述各值时，在大多数情况中都用微分方程（1）的積分。当荷載复雜时，常常按照荷載的間断处將梁分为若干个区段。

这样，就常須把一根連續的梁按照分成的多少个区段，当作多少根梁來研究，对于每一区段，組成它們各自的微分方程。

为了求取任意的積分常数，除了表达梁端固定类型的边界条件之外，还要根据梁的兩个相鄰区段边界上的角形变和綫形变的相等条件組成附加的方程。这就必須在解由許多方程所組成的联立方程中進行很多的計算工作。由此顯見应該減少区段的数目，此处可用实用方便的相当的連續荷載來代替間断荷載。这已由克雷洛夫（А.Н.Крылов）在其卓越的經典著作“論彈性地基上梁的計算”中提出过了。他是第一个以分布荷載强度形式的一个函数代表間断荷載的人。从其緒言中可以看出他所建議的方法的优越性，克雷洛夫在緒言中寫道：“在这篇論文中，我首先發展解答所提出問題的一般方法，用这个方法时，不管荷載是怎样的，都不需要將梁分为若干的区段，也不需要提供附帶条件，而在任何情况下僅必須按照梁的一端的固定条件决定兩个荷載，并且僅僅是决定兩个荷載，以代替求任意常数的許多方程。这就使整个計算簡單化和对称化”。

格尔謝華諾夫函数間断理論的应用也有可能將任何的間断荷載、集中力以及沿着整个梁長而作用的力矩代以分布荷載强度形式的一个函数。这个函数表达出上述荷載的总合作

用。当这样來進行解决問題时，就不需要按照若干区段來研究載有任何荷載的梁。

因此，对于任何荷載（間断的或連續的），僅組成剪力、力矩和梁的彈性綫的一个方程式。

随着上述函数的应用，当从梁的一段荷載变到另一段荷載时，这些方程的相应項自然而然地加入和去掉。

第　一　章

荷載下土的变形的計算

1．承載任意对称分布的連續荷載〔$f(x_1)$〕的地面的变形

为了計算在对称荷載作用下的地面的变形，我們首先求出半平面体中任意点M（x_1，y_1）的位移（圖2）。

为此，利用彈性理論中熟知的公式，这些公式表示应力与变形之間的关系如下：

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{x_1} &= \frac{1}{E_0}\left[\sigma_{x_1} - \mu_0\left(\sigma_{y_1} + \sigma_{z_1}\right)\right] = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\\
\varepsilon_{y_1} &= \frac{1}{E_0}\left[\sigma_{y_1} - \mu_0\left(\sigma_{z_1} + \sigma_{x_1}\right)\right] = \frac{\partial v_1}{\partial y_1},\\
\varepsilon_{z_1} &= \frac{1}{E_0}\left[\sigma_{z_1} - \mu_0\left(\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}\right)\right] = \frac{\partial w_1}{\partial z_1},
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

$$
\gamma_{x_1 y_1} = \frac{2(1+\mu_0)}{E_0}\tau_{x_1 y_1}, \qquad (4)
$$

式中：　$\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{z_1}$——沿着相应軸 $O_{x_1}, O_{y_1}, O_{z_1}$ 方向的相对变形的分量；

$\gamma_{x_1 y_1}$——相对剪应变；

u_1——沿着軸 x_1 的水平位移；

v_1——沿着軸 y_1 的垂直位移；

w_1——沿着軸 z_1 的水平位移；

σ_{x_1}——水平正应力；

σ_{y_1}——垂直正应力；

σ_{z_1}——水平正应力；

$\tau_{x_1y_1}$——剪应力；

E_0——土的变形模数；

μ_0——土的泊桑系数。

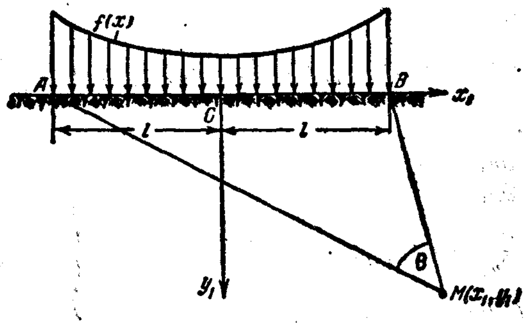

圖 2

因为这里我們系解彈性理論的平面問題(平面变形)●，故对于所研究的情形应該是：

$$\varepsilon_{z_1}=\frac{1}{E_0}[\sigma_{z_1}-\mu_0(\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1})]=0.$$

由此 $$\sigma_{z_1}=\mu_0(\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}).$$

以所得 σ_{z_1}值代入方程(3)，同时以下式代入公式(4)中

$$\gamma_{x_1y_1}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1},$$

● 物体所有各点的位移都平行于同一平面(变形平面)，而僅与这平面內的坐标有关，物体的这种变形称为平面变形。

得到：

$$\left.\begin{aligned}
&E_0\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=(1-\mu_0^2)\,\sigma_{x_1}-\mu_0(1+\mu_0)\sigma_{y_1},\\
&E_0\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=(1-\mu_0^2)\,\sigma_{y_1}-\mu_0(1+\mu_0)\sigma_{x_1},\\
&E_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)=2(1+\mu_0)\,\tau_{x_1y_1}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

为了書寫簡單起見，用下式代表：

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x_1,y_1)=(1-\mu_0^2)\sigma_{x_1}-\mu_0(1+\mu_0)\sigma_{y_1};\\
&f_2(x_1,y_1)=(1-\mu_0^2)\sigma_{y_1}-\mu_0(1+\mu_0)\sigma_{x_1}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

于是得到：

$$\left.\begin{aligned}
&E_0\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=f_1(x_1,y_1);\\
&E_0\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=f_2(x_1,y_1);\\
&E_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)=2(1+\mu_0)\,\tau_{x_1y_1}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

把（7）式中的前兩个方程積分，得：

$$\left.\begin{aligned}
&E_0u_1=\int f_1(x_1,y_1)dx_1+\rho(y_1),\\
&E_0v_1=\int f_2(x_1,y_1)dy_1+\omega(x_1),
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

式中：$\omega(x_1)$和$\rho(y_1)$——任意函数。

我們所需要的$\omega(x_1)$，由$y_1=0$，$\tau_{x_1y_1}=0$的条件求得，即：

$$E_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)=0\,.\qquad(9)$$

由此应得

$$
\left.\begin{aligned}
E_0\frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \int \frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} dy_1 + \omega'(x_1);\\
E_0\frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \int \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} dx_1 + \rho'(y_1).
\end{aligned}\right\} \qquad (10)
$$

將这兩式相加，且假設 $y_1=0$，得：

$$
\left(\int \frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} dy_1\right)_{y_1=0} + \left(\int \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} dx_1\right)_{y_1=0} + \\
+\omega'(x_1) + C = 0,
$$

式中：以 C 表示 $\rho'(y_1)$。

令：

$$
\left.\begin{aligned}
\left(\int \frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} dy_1\right)_{y_1=0} &= \Phi_2(x_1, 0);\\
\left(\int \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} dx_1\right)_{y_1=0} &= \Phi_1(x_1, 0).
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

这样，我們得出下列形式的方程來求 $\omega'(x_1)$：

$$
\Phi_1(x_1, 0) + \Phi_2(x_1, 0) + \omega'(x_1) + C = 0. \qquad (12)
$$

为了决定常数 C，利用对称的条件，即当 $x_1=0$ 时（y_1 为任意值），得：

$$
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y_1}. \qquad (13)
$$

因此在坐标原点应該是 $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$。

在这个条件下 $\omega'(0) = -\Phi_2(0,0)$。

另一方面，按照公式（12）

$$
\omega'(0) = -\Phi_1(0,0) - \Phi_2(0,0) - C,
$$

由此

$$
C = -\Phi_1(0,0).
$$

以所求得的 C 值代入方程（12），并求相应的 $\omega'(x_1)$，得：

$$
\omega'(x_1) = \Phi_1(0,0) - \Phi_1(x_1, 0) - \Phi_2(x_1, 0),
$$

由此

$$\omega(x_1)=\iint\left(\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial y_1}dx_1^2\right)_{\substack{x_1=0\\y_1=0}}-\iint\left(\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial y_1}dx_1^2\right)_{y_1=0}-$$

$$-\left(\int f_2(x_1,y_1)dy_1\right)_{y_1=0}+D\,. \qquad (14)$$

以 $\omega(x_1)$值代入方程（8），得到：

$$E_0v_1=\iint\left(\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial y_1}dx_1^2\right)_{\substack{x_1=0\\y_1=0}}-$$

$$-\iint\left(\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial y_1}dx_1^2\right)_{y_1=0}+D\,, \qquad (15)$$

式中：D——任意常数。

根据公式（15）可以决定在任何对称分布的荷載作用下地面的相对位移。

2. 承載連續均布荷載(a_0)的地面的变形

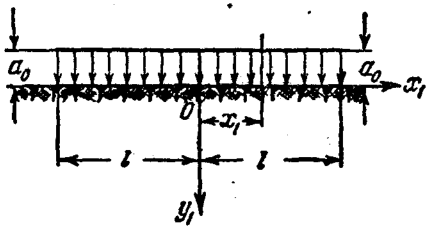

圖 3

設在地面上（圖 3）作用着均布荷載，强度 $p_x=a_0$。取荷載段的中点为坐标原点，幷使軸 x_1 取水平向右的方向，軸 y_1 取垂直向下的方向，按公式(15)就可算出地面的变形。为此，利用格尔謝華諾夫所導得的在均布荷載下表示土中应