

推測統計學

韓振學編著

臺灣開明書店印行

推測統計學

韓振學編著

臺灣開明書店印行

民國六十七年九月初版發行

每册基價 精裝四元
平裝三元

(按照同業規定倍數發售)

推測統計學

*

有著作權·不准翻印

編著者 韓振學

發行人 劉甫琴

印刷者 臺灣開明書店

總發行所

臺北市中山北路一段七七號
電話 二五二六
三三六四號
郵局劃撥賬號第一二五七號

臺灣開明書店

行政院新聞局登記證：局版臺業字第〇八三七號

序 言

- 一、本書係以闡述、分析、研究有關小樣本之理論與方法（即統計上之推測）爲主旨。
- 二、本書採理論與實驗並重，對於各種定理、公式，其可以普通數學方法證明者皆加以證明；其涉及高深數學或證法繁難者，則舉實例驗證之。
- 三、本書共分十一章，第一章爲介紹推測統計學之基本敘述，第二、三兩章爲機率及機率分配之擇要說明，第四、五兩章爲理論分配，第六、七兩章爲統計推測上之基本理論與方法（推定與測驗），第八、九兩章爲變異數分析，第十章爲迴歸分析之介紹，第十一章則爲迴歸與變異數分析之結合互變數分析。
- 四、本書採取教科書之體裁所編著，俾便於研讀，書中舉例頗多，足敷讀者參考之需。
- 五、本書可做爲大專院校高級統計學（或稱統計學二）之教本，亦可供爲從事統計工作者及準備統計人員高等考試者之參考。
- 六、本書於每章末均附有習題，以期讀者能把握重點，熟習公式及演練計算，並於書末附有答案，以供參考；並另附各種統計數值表，以備需用。
- 七、小樣本理論與方法之研究，發展非常迅速，應用亦甚廣泛，已成爲近代研究各種科學之重要工具，甚盼國人能廣爲倡導研究，以提高研究風氣。
- 八、著者學非識淺，疏漏之處，在所難免，尚祈先進方家，不吝教正。

著者識於臺中市

六十七年七月

目 錄

第一章 緒 論	1
1-1 科學的方法	1
1-2 統計學	1
1-3 母全體與樣本	2
1-4 推測統計學	2
1-5 參數與統計量值	3
1-6 觀察值變動時對平均數與變異數之影響	4
1-7 次數分配表	6
1-8 直方圖與次數曲線	7
習 題	9
第二章 機率概述	11
2-1 推測統計與機率	11
2-2 事件與樣本空間	11
2-3 機率之定義	12
2-4 先天機率與經驗機率	12
2-5 事件之類別	13
2-6 機率之性質	16
2-7 條件機率	18
2-8 獨立事件之重複試行	20
2-9 全機率與貝耶斯定理	23

2-10 幾何機率·····	26
習 題·····	28
第三章 機率分配·····	31
3-1 機率分配與分配函數·····	31
3-2 分配函數之性質·····	33
3-3 二元機率分配·····	35
3-4 希望數·····	39
3-5 變異數·····	41
3-6 動 差·····	43
3-7 互變數·····	44
3-8 契別謝夫定理·····	46
習 題·····	49
第四章 一次元之理論分配 ·····	51
4-1 理論分配之意義·····	51
4-2 超幾何分配·····	51
4-3 二項分配·····	56
4-4 卜阿松分配·····	66
4-5 常態分配·····	73
4-6 常態分配之數值計算·····	77
4-7 常態分配之加法性·····	82
4-8 常態分配之應用·····	85
4-9 等分配與指數分配·····	94
4-10 大數法則·····	99
習 題·····	104

第五章 樣本統計量值之分配	107
5-1 樣本之抽取	107
5-2 樣本分配	107
5-3 樣本平均數 $\bar{x}$ 之分配	109
5-4 二樣本平均數之和或差 ($\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$) 之分配	115
5-5 卡方 (χ^2) 分配	117
5-6 t 分配	133
5-7 F 分配	142
習 題	149
第六章 統計之推定(估計)	152
6-1 統計推定(估計)之意義	152
6-2 點推定(點估計)	153
6-3 點推定之求法	156
6-4 區間推定(區間估計)	160
6-5 常態母全體平均數之區間推定	162
6-6 二常態母全體平均數之和或差 ($\mu_1 \pm \mu_2$) 之區間推定	165
6-7 常態母全體變異數之區間推定	168
6-8 二項母全體比率之區間推定	171
習 題	177
第七章 統計之假設測驗(假設檢定)	180
7-1 假設測驗之意義	180
7-2 假設測驗之方式與其理由	181
7-3 兩種誤差	184
7-4 測驗力函數與兩種誤差之決定	188

7-5	假設測驗實際進行時應採之步驟·····	190
7-6	常態母全體平均數之假設測驗·····	191
7-7	二常態母全體平均數差 $\mu_1 - \mu_2$ 之假設測驗·····	194
7-8	常態母全體變異數之假設測驗·····	202
7-9	母全體比率之假設測驗·····	205
7-10	計數資料之假設測驗·····	212
7-11	逐次假設測驗法·····	219
	習 題·····	223
第八章	一因子變異數分析 ·····	228
8-1	變異數分析之意義及其原理·····	228
8-2	一因子變異數分析法·····	229
8-3	SS 值及 F 值之簡捷算法 ·····	237
8-4	母全體參數之推定與假設測驗·····	240
8-5	隨機集區設計·····	246
8-6	拉丁方格設計·····	256
8-7	單一自由度·····	263
8-8	最小顯著差異·····	273
8-9	新的多種差距測驗·····	276
	習 題·····	279
第九章	二因子變異數分析 ·····	284
9-1	二因子實驗之意義及其優點·····	284
9-2	處理資料無重覆之二因子變異數分析·····	286
9-3	處理資料無重覆二因子實驗之推定及假設測驗·····	288
9-4	處理資料有重覆之二因子變異數分析·····	291

9-5	處理資料有重覆二因子實驗之推定及假設測驗·····	295
9-6	特殊假設之測驗·····	298
9-7	譜系分類·····	306
9-8	抽樣誤差與譜系分類·····	311
	習 題·····	313
第十章	迴歸分析·····	317
10-1	迴歸分析之意義·····	317
10-2	迴歸參數 σ, β 之點推定·····	319
10-3	統計量值 a, b 及 $\bar{y}$ 之希望數與變異數·····	323
10-4	參數 σ^2 之推定值 ·····	325
10-5	迴歸參數 α, β 之可信區間·····	327
10-6	迴歸參數 α, β 之假設測驗·····	328
10-7	迴歸直線之可信區間·····	332
10-8	直線迴歸與變異數分析間之關係·····	336
10-9	母全體相關係數·····	340
10-10	二迴歸直線之比較·····	346
	習 題·····	353
第十一章	互變數分析 ·····	355
11-1	互變數分析之意義·····	355
11-2	迴歸係數同質性之測驗·····	356
11-3	修正平均數同質性之測驗·····	361
11-4	迴歸係數相等時修正平均數之假設測驗·····	364
11-5	隨機集區設計修正平均數之假設測驗·····	370
11-6	單一自由度·····	373

11-7 互變數分析與二因子實驗間之關係.....	377
習 題.....	384

〔附 錄〕

一、習題答案.....	387
二、統計數值表.....	397

第一章 緒 論

1.1 科學的方法

由於科學的昌明，使人類的文明日益進步，人類利用科學所研究之問題，範圍廣泛，分類精細，而所用的科學方法，則不外乎兩種：即演繹法 (Deduction Method) 與歸納法 (Indeduction Method)。

所謂演繹法係由簡而繁、從原理推出具體方式完成實際要求之方法，亦即數學的方法；所謂歸納法係由繁而簡、由具體事實個別理由以推出總結原因之方法，亦即統計的方法。

演繹法與歸納法雖然其進程序相對稱，但此兩種方法絕非矛盾衝突，而為互相補充、並且相輔相成之方法。

1.2 統計學

統計學為包含統計資料、統計方法及統計原理之科學，係由實際資料或實驗過程去尋求結論之一種工具科學，故統計學所利用之科學的方法係為歸納法與演繹法之配合（大部分為歸納法）；即先將所欲研究之對象以數量表示，亦即先將對象數量化，蒐集此數量資料，再表列、簡化此項數量資料，進而根據此數量資料以期能獲致結論的一種科學。

統計學中，有關資料之蒐集，與表列簡化此項資料，以及各種資料之計算，如平均數、離差量數及指數等乃屬於統計敘述 (Descriptive Statistics) 範圍內，而根據此項資料用有系統之方法加以分析探討，以期獲致結論之步驟，則為推測統計 (Inferential Statistics)。

1.3 母全體與樣本

在統計學中某一事物之數量紀錄，謂之觀察值 (Observation 或稱觀測值)，可以 x 表示之；如某人之體重為 53.5 公斤，即為一個觀察值。

甚多同類觀察值之總集合 ($x_1, x_2, \dots, x_N$) 謂之母全體 (Parent Population or Population 或稱母體)；母全體所含觀察值之總個數 N 為有限值時，稱此母全體為有限母全體 (Finite Population)，否則稱為無限母全體 (Infinite Population)。如一羣人之體重資料，則構成體重之母全體，此一羣人之人數為有限時即為有限母全體，否則是為無限母全體；唯通常當 N 表示甚大數值時，則可視之為無限母全體。

自母全體中所抽出之若干個觀察值所作成之部分集合 ($x_1, x_2, \dots, x_n$) 謂之樣本 (Sample)，樣本所含觀察值之個數 n 稱為樣本之大小 (Size of The Sample)；如自一羣人中抽選 5 人而量度其體重，則此五個體重數量之集合即為樣本，而此樣本之大小即 $n=5$ 。通常當樣本大小 $n < 30$ 時視為小樣本，而 $n \geq 30$ 時則為大樣本。

1.4 推測統計學

自某一母全體抽取樣本，根據所抽出之樣本，經過有系統之分析，進而獲致有關該母全體具有某種特性之結論的作法與步驟，是為推測統計。蓋因某事物之每一個體容或各有其若干不同之性質，而某事物所構成之羣體 (即母全體) 則必有其若干共同之特性存在；設若吾人對某一母全體之特性屬於已知，則樣本之抽取，系統之分析，已顯無必要，反之若吾人對此母全體之特性尚未獲悉，則不得不借助於樣本之抽取，庶可據以推測其母全體之特性。

例如某日光燈管生產工廠，如鑑定其產品之品質時，絕不容許吾人將所生產之每一燈管從事光度及壽命之試驗，必須從所製造之燈管中，抽取若干個作為樣本而加以試驗，依據此部分受驗燈管所試驗之結果，以推測其全部產品之品質。因之吾人應知：(1) 凡經試驗過之燈管，絕不會再在市場上出現。(2) 凡在市場上出售之燈管，實在均未經過試驗。

綜上所述，吾人可知所謂推測統計乃係「根據從母全體中抽出之少數個體所組成之樣本，用有系統之方法，尋求一項結論，以推測其母全體特性之科學」。

1.5 參數與統計量值

表示母全體特性之數值謂之參數 (Parameter 或稱母數)；例如以 μ 表示母全體之平均數， σ^2 表示母全體之變異數， σ 表示母全體之標準差， ρ 表示母全體之相關係數等，皆為參數。

表示樣本特性之數值謂之統計量值 (Statistic)，例如以 $\bar{x}$ (或 M) 表示樣本之平均數， s^2 表示樣本之變異數， s 表示樣本之標準差， r 表示樣本之相關係數等，皆為統計量值。

通常在習慣上常以希臘字母表示母全體之參數，而以相應之英文字母表示樣本之統計量值；至於有關母全體各種參數與樣本各種統計量值之計算，其各計算公式之基本形式並無何等不同，僅只計算所根據者、參數為依據母全體所計算，而統計量值則為就樣本所計算之區別而已。

註：關於平均數、變異數、標準差以及相關係數等之計算公式，則可依照一般之統計學（記敘統計學）之計算方法，故不再重述。

1.6 觀察值變動時對平均數與變異數之影響

一、每一觀察值同加或同減以定數值 a 時

設母全體之觀察值為 $x_1, x_2, \dots, x_N$, 則其平均數 $\mu = \frac{1}{N} \sum x_i$, 變異數 $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2$, 標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2}$; 同加之定數值 a , 則新觀察值為 $x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_N + a$, 其

$$\begin{aligned} \text{新平均數 } \mu_1 &= \frac{1}{N} \sum (x_i + a) = \frac{1}{N} (\sum x_i + Na) \\ &= \frac{1}{N} \sum x_i + a = \mu + a \end{aligned} \quad \text{公式(1-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{新變異數 } \sigma_1^2 &= \frac{1}{N} \sum (x_i + a - \mu_1)^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i + a - \mu - a)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2 = \sigma^2 \end{aligned} \quad \text{公式(1-2)}$$

則新標準差 $\sigma_1 = \sigma$ 。

同樣亦可得出每一觀察值同減定數值 a 之結果為

$$\mu_1 = \mu - a \quad \text{公式(1-1a)}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 \quad \text{公式(1-2a)}$$

$$\sigma_1 = \sigma。$$

故可得如下之結論：

定理 (1-6a)：將母全體中每一觀察值同加或同減以定數值 a , 其平均數亦將增加或減少該一定數值 a , 而其變異數與標準差則仍為原值不變。

二、每一觀察值同乘或同除以定數值 $a (\neq 0)$ 時

設原觀察值為 $x_1, x_2, \dots, x_N$, 所同乘之定數值 $a (\neq 0)$, 則新觀察

值爲 $ax_1, ax_2, \dots, ax_N$,

$$\text{新平均數 } \mu_2 = \frac{1}{N} \sum ax_i = \frac{a}{N} \sum x_i = a\mu \quad \text{公式(1-3)}$$

$$\begin{aligned} \text{新變異數 } \sigma_2^2 &= \frac{1}{N} \sum (ax_i - \mu_2)^2 = \frac{1}{N} \sum (ax_i - a\mu)^2 \\ &= \frac{a^2}{N} \sum (x_i - \mu)^2 = a^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad \text{公式(1-4)}$$

則新標準差 $\sigma_2 = a\sigma$ 。

同樣亦可得出每一觀察值同除以定數值 $a (\neq 0)$ 之結果爲

$$\mu_2 = \frac{\mu}{a} \quad \text{公式(1-3a)}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{a^2} \quad \text{公式(1-4a)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{a}。$$

故可得如下之結論：

定理(1-6b)：將母全體中每一觀察值同乘或同除以定數值 $a (\neq 0)$ ，其平均數爲原平均數之 a 倍或 $\frac{1}{a}$ 倍，其變異數爲原變異數之 a^2 倍或 $\frac{1}{a^2}$ 倍，而其標準差則爲原標準差之 a 倍或 $\frac{1}{a}$ 倍。

上述二項定理，對於樣本之平均數、變異數與標準差之運算亦完全適用。

例 1. 已知一羣觀察值爲 1、2、2、3、4、6，試就下列條件求其平均數與變異數，並用以驗證本節所述之二定理。

(1) 每一觀察值均加以定數值 5。(2) 每一觀察值均除以定數值 5。

【解】 原觀察值之平均數 $\mu = \frac{\sum x}{N} = \frac{18}{6} = 3,$

$$\text{變異數 } \sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2}{N} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3};$$

(1) 每一觀察值均加以 5 後, 則新觀察值為 6、7、7、8、9、11, 其

$$\text{新平均數 } \mu_1 = \frac{48}{6} = 8 = \mu + 5,$$

$$\text{新變異數 } \sigma_1^2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = \sigma^2。$$

(2) 每一觀察值均除以 5 後, 則新觀察值為 0.2、0.4、0.4、0.6、0.8、1.2, 其

$$\text{新平均數 } \mu_2 = \frac{3.6}{6} = 0.6 = \frac{\mu}{5},$$

$$\text{新變異數 } \sigma_2^2 = \frac{0.64}{6} = \frac{8}{75} = \frac{\sigma^2}{25} = \frac{\sigma^2}{5^2}。$$

1.7 次數分配表

設 164 人體重之分配如下列表 (1-1) 情形, 稱為次數分配表(Frequency Distribution Table), 其次數常以 f_i 表示, 總次數 $N = \Sigma f_i$ 。

表(1-1) 164人體重分配

體 重 (公斤) (x)	人數(次數) (f)	累 積 次 數 ($c.f$)	相對次數($r.f$) (%)	相對累積次數 ($r.c.f$) (%)
45—50	10	10	6.10	6.10
50—55	44	54	26.83	32.93
55—60	51	105	31.10	64.03
60—65	43	148	26.22	90.25
65—70	13	161	7.92	98.17
70—75	3	164	1.83	100.00
總 計	164		100.00	

於次數表中，將其次數依次相加所得者稱為累積次數 (Cumulative Frequency) 常以 $c.f$ 表示之。

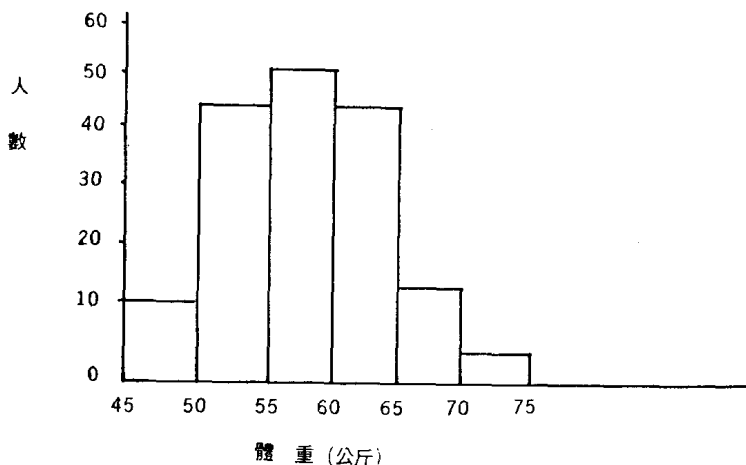
於次數表中，將其各次數予以比率化(百分比化，即以%為單位)者謂之相對次數 (Relative Frequency)，常以 $r.f$ 表示；但因總次數之百分比必為 100，故不論任何資料，其相對次數之總計均為 100(%)。

將相對次數再依次相加者，稱為相對累積次數 (Relative Cumulative Frequency) 常以 $r.c.f$ 表示，關於相對累積次數之求算，不論先求相對次數再配以累積關係，或先求累積次數再配以相對關係，其結果並無不同，蓋因

$$\Sigma\left(\frac{f_i}{N}\right) = \frac{\Sigma f_i}{N} \quad \text{公式(1-5)}$$

1.8 直方圖與次數曲線

次數分配亦可以直方圖(Histogram)表示，所謂直方圖乃係於橫軸上取相當於各組組距之長度，而於其上作矩形，使所作矩形之面積與相



圖(1-1) 164人體重分配之直方圖