推測統計學

韓振學編著

臺灣開明書店印行

推測統計學

韓振學編著

臺灣開明書店印行

民國六十七年九月初版發行

每冊基價 精裝四元 平裝三元

（按照同業規定倍數發售）

推測統計學

*

編著者　韓振學

發行人　劉甫琴

印刷者　臺灣開明書店

總發行所

臺北市中山北路一段七七號

電話　五四一五五六九　五五一〇八二〇　五三三八九四號

郵局劃撥賬號第一二五七號

臺灣開明書店

行政院新聞局登記證：局版臺業字第〇八三七號

（坤記—213J.）

序　　言

一、本書係以闡述、分析、研究有關小樣本之理論與方法（即統計上之推測）為主旨。

二、本書採理論與實驗並重，對於各種定理、公式，其可以普通數學方法證明者皆加以證明；其涉及高深數學或證法繁難者，則舉實例驗證之。

三、本書共分十一章，第一章為介紹推測統計學之基本敍述，第二、三兩章為機率及機率分配之擇要說明，第四、五兩章為理論分配，第六、七兩章為統計推測上之基本理論與方法（推定與測驗），第八、九兩章為變異數分析，第十章為廻歸分析之介紹，第十一章則為廻歸與變異數分析之結合互變數分析。

四、本書採取教科書之體裁所編著，俾便於研讀，書中舉例頗多，足敷讀者參考之需。

五、本書可做為大專院校高級統計學（或稱統計學二）之教本，亦可供為從事統計工作者及準備統計人員高等考試者之參考。

六、本書於每章末均附有習題，以期讀者能把握重點，熟習公式及演練計算，並於書末附有答案，以供參考；並另附各種統計數值表，以備需用。

七、小樣本理論與方法之研究，發展非常迅速，應用亦甚廣泛，已成為近代研究各種科學之重要工具，甚盼國人能廣為倡導研究，以提高研究風氣。

八、著者學非識淺，疏漏之處，在所難免，尚祈先進方家，不吝教正。

著者識於臺中市

六十七年七月

目　　錄

〔附 錄〕

第一章 緒　論

1.1 科學的方法

由於科學的昌明，使人類的文明日益進步，人類利用科學所研究之問題，範圍廣泛，分類精細，而所用的科學方法，則不外乎兩種：即演繹法（Deduction Method）與歸納法（Indeduction Method）。

所謂演繹法係由簡而繁、從原理推出具體方式完成實際要求之方法，亦即數學的方法；所謂歸納法係由繁而簡、由具體事實個別理由以推出總結原因之方法，亦即統計的方法。

演繹法與歸納法雖然其進行程序相對稱，但此兩種方法絕非矛盾衝突，而爲互相補充、並且相輔相成之方法。

1.2 統計學

統計學爲包含統計資料、統計方法及統計原理之科學，係由實際資料或實驗過程去尋求結論之一種工具科學，故統計學所利用之科學的方法係爲歸納法與演繹法之配合（大部分爲歸納法）；即先將所欲研究之對象以數量表示，亦即先將對象數量化，蒐集此數量資料，再表列、簡化此項數量資料，進而根據此數量資料以期能獲致結論的一種科學。

統計學中，有關資料之蒐集，與表列簡化此項資料，以及各種資料之計算，如平均數、離差量數及指數等乃屬於統計敍述（Descriptive Statistics）範圍內，而根據此項資料用有系統之方法加以分析探討，以期獲致結論之步驟，則爲推測統計（Inferential Statistics）。

1.3 母全體與樣本

在統計學中某一事物之數量紀錄，謂之觀察值 (Observation 或稱觀測值)，可以 x 表示之；如某人之體重爲 53.5 公斤，即爲一個觀察值。

甚多同類觀察值之總集合($x_1, x_2, \cdots\cdots x_N$)謂之母全體(Parent Population or Population 或稱母體)；母全體所含觀察值之總個數 N 爲有限值時，稱此母全體爲有限母全體 (Finite Population)，否則稱爲無限母全體 (Infinite Population)。如一羣人之體重資料，則構成體重之母全體，此一羣人之人數爲有限時卽爲有限母全體，否則是爲無限母全體；唯通常當 N 表示甚大數值時，則可視之爲無限母全體。

自母全體中所抽出之若干個觀察值所作成之部分集合 ($x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$) 謂之樣本 (Sample)，樣本所含觀察值之個數 n 稱爲樣本之大小 (Size of The Sample)；如自一羣人中抽選 5 人而量度其體重，則此五個體重數量之集合卽爲樣本，而此樣本之大小卽 $n=5$。通常當樣本大小 $n<30$ 時視爲小樣本，而 $n\geq30$ 時則爲大樣本。

1.4 推測統計學

自某一母全體抽取樣本，根據所抽出之樣本，經過有系統之分析，進而獲致有關該母全體具有某種特性之結論的作法與步驟，是爲推測統計。蓋因某事物之每一個體容或各有其若干不同之性質，而某事物所構成之羣體 (卽母全體) 則必有其若干共同之特性存在；設若吾人對某一母全體之特性屬於已知，則樣本之抽取，系統之分析，已顯無必要，反之若吾人對此母全體之特性尙未獲悉，則不得不借助於樣本之抽取，庶可據以推測其母全體之特性。

例如某日光燈管生產工廠，如鑑定其產品之品質時，絕不容許吾人將所生產之每一燈管從事光度及壽命之試驗，必須從所製造之燈管中，抽取若干個作為樣本而加以試驗，依據此部分受驗燈管所試驗之結果，以推測其全部產品之品質。因之吾人應知：(1) 凡經試驗過之燈管，絕不會再在市場上出現。(2) 凡在市場上出售之燈管，實在均未經過試驗。

綜上所述，吾人可知所謂推測統計乃係「根據從母全體中抽出之少數個體所組成之樣本，用有系統之方法，尋求一項結論，以推測其母全體特性之科學」。

1.5 參數與統計量值

表示母全體特性之數值謂之參數（Parameter 或稱母數）；例如以 μ 表示母全體之平均數，σ^2 表示母全體之變異數，σ 表示母全體之標準差，ρ 表示母全體之相關係數等，皆為參數。

表示樣本特性之數值謂之統計量值（Statistic），例如以 $\bar{x}$（或 M）表示樣本之平均數，s^2 表示樣本之變異數，s 表示樣本之標準差，γ 表示樣本之相關係數等，皆為統計量值。

通常在習慣上常以希臘字母表示母全體之參數，而以相應之英文字母表示樣本之統計量值；至於有關母全體各種參數與樣本各種統計量值之計算，其各計算公式之基本形式並無何等不同，僅只計算所根據者、參數為依據母全體所計算，而統計量值則為就樣本所計算之區別而已。

註：關於平均數、變異數、標準差以及相關係數等之計算公式，則可依照一般之統計學（記敍統計學）之計算方法，故不再重述。

1.6 觀察值變動時對平均數與變異數之影響

一、每一觀察值同加或同減以定數值 a 時

設母全體之觀察值爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_N$，則其平均數 $\mu=\frac{1}{N}\Sigma x_i$，變異數 $\sigma^2=\frac{1}{N}\Sigma(x_i-\mu)^2$，標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(x_i-\mu)^2}$；同加之定數值$a$，則新觀察值爲 $x_1+a, x_2+a, \cdots\cdots x_N+a$，其

$$\text{新平均數}\quad \mu_1=\frac{1}{N}\Sigma(x_i+a)=\frac{1}{N}(\Sigma x_i+Na)$$

$$=\frac{1}{N}\Sigma x_i+a=\mu+a \qquad \text{公式(1-1)}$$

$$\text{新變異數}\quad \sigma_1{}^2=\frac{1}{N}\Sigma(x_i+a-\mu_1)^2=\frac{1}{N}\Sigma(x_i+a-\mu-a)^2$$

$$=\frac{1}{N}\Sigma(x_i-\mu)^2=\sigma^2 \qquad \text{公式(1-2)}$$

則新標準差 $\sigma_1=\sigma$ 。

同樣亦可得出每一觀察值同減定數值 a 之結果爲

$$\mu_1=\mu-a \qquad \text{公式(1-1}a\text{)}$$

$$\sigma_1{}^2=\sigma^2 \qquad \text{公式(1-2}a\text{)}$$

$$\sigma_1=\sigma\ 。$$

故可得如下之結論:

定理 (1-6a)：將母全體中每一觀察值同加或同減以定數值 a，其平均數亦將增加或減少該一定數值 a，而其變異數與標準差則仍爲原值不變。

二、每一觀察值同乘或同除以定數值 $a(\neq 0)$ 時

設原觀察值爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_N$，所同乘之定數值 $a(\neq 0)$，則新觀察

值為 $ax_1, ax_2, \cdots\cdots ax_N$,

新平均數 $\mu_2=\frac{1}{N}\Sigma ax_i=\frac{a}{N}\Sigma x_i=a\mu$ 公式(1-3)

新變異數 $\sigma_2{}^2=\frac{1}{N}\Sigma(ax_i-\mu_2)^2=\frac{1}{N}\Sigma(ax_i-a\mu)^2$

$=\frac{a^2}{N}\Sigma(x_i-\mu)^2=a^2\sigma^2$ 公式(1-4)

則新標準差 $\sigma_2=a\sigma$ 。

同樣亦可得出每一觀察值同除以定數值 $a(\neq 0)$ 之結果為

$\mu_2=\frac{\mu}{a}$ 公式(1-3a)

$\sigma_2{}^2=\frac{\sigma^2}{a^2}$ 公式(1-4a)

$\sigma_2=\frac{\sigma}{a}$ 。

故可得如下之結論:

定理(1-6b): 將母全體中每一觀察值同乘或同除以定數值$a(\neq 0)$, 其平均數為原平均數之 a 倍或 $\frac{1}{a}$ 倍, 其變異數為原變異數之a^2倍或$\frac{1}{a^2}$倍, 而其標準差則為原標準差之 a 倍或 $\frac{1}{a}$ 倍。

上述二項定理, 對於樣本之平均數、變異數與標準差之運算亦完全適用。

例 1. 已知一羣觀察值為 1、2、2、3、4、6, 試就下列條件求其平均數與變異數, 並用以驗證本節所述之二定理。

(1) 每一觀察值均加以定數值 5。(2) 每一觀察值均除以定數值 5。

【解】 原觀察值之平均數 $\mu=\frac{\Sigma x}{N}=\frac{18}{6}=3$,

變異數 $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x-\mu)^2}{N} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$;

(1) 每一觀察值均加以 5 後,則新觀察值爲 6、7、7、8、9、11, 其

新平均數 $\mu_1 = \dfrac{48}{6} = 8 = \mu + 5$,

新變異數 $\sigma_1{}^2 = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3} = \sigma^2$。

(2) 每一觀察值均除以 5 後, 則新觀察值爲 0.2、0.4、0.4、0.6、0.8、1.2, 其

新平均數 $\mu_2 = \dfrac{3.6}{6} = 0.6 = \dfrac{\mu}{5}$,

新變異數 $\sigma_2{}^2 = \dfrac{0.64}{6} = \dfrac{8}{75} = \dfrac{\sigma^2}{25} = \dfrac{\sigma^2}{5^2}$。

1.7 次數分配表

設 164 人體重之分配如下列表 (1-1) 情形, 稱爲次數分配表(Frequency Distribution Table), 其次數常以 f_i 表示, 總次數 $N = \Sigma f_i$。

表(1-1) 164人體重分配

體 重 (公斤) (x)	人數(次數) (f)	累積次數 ($c.f$)	相對次數($r.f$) (%)	相對累積次數 ($r.c.f$) (%)
45——50	10	10	6.10	6.10
50——55	44	54	26.83	32.93
55——60	51	105	31.10	64.03
60——65	43	148	26.22	90.25
65——70	13	161	7.92	98.17
70——75	3	164	1.83	100.00
總 計	164		100.00	

於次數表中，將其次數依次相加所得者稱爲累積次數（Cumulative Frequency）常以 $c.f$ 表示之。

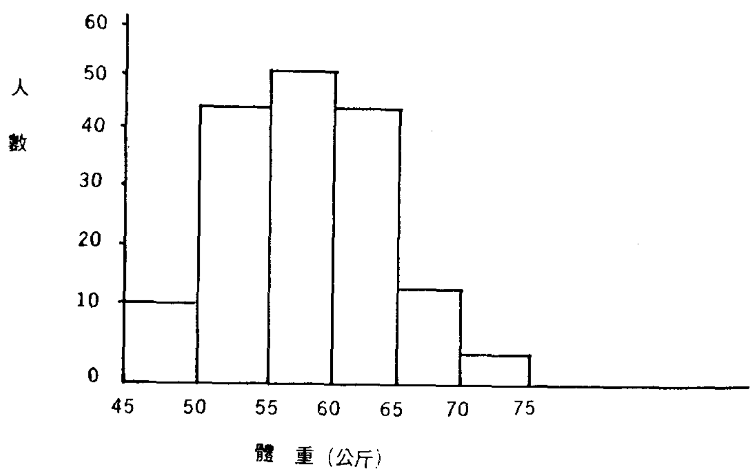
於次數表中，將其各次數予以比率化（百分比化，即以%爲單位）者謂之相對次數（Relative Frequency），常以 $r.f$ 表示；但因總次數之百分比必爲 100，故不論任何資料，其相對次數之總計均爲 100（%）。

將相對次數再依次相加者，稱爲相對累積次數（Relative Cumulative Frequency）常以 $r.c.f$ 表示，關於相對累積次數之求算，不論先求相對次數再配以累積關係，或先求累積次數再配以相對關係，其結果並無不同，蓋因

$$\Sigma\left(\frac{f_i}{N}\right)=\frac{\Sigma f_i}{N} \qquad \text{公式(1-5)}$$

1.8 直方圖與次數曲線

次數分配亦可以直方圖（Histogram）表示，所謂直方圖乃係於橫軸上取相當於各組組距之長度，而於其上作矩形，使所作矩形之面積與相



圖(1-1) 164人體重分配之直方圖