

# 工程学中的数值方法

M. G. 沙瓦陀里等著

高等教育出版社

# 工程学中的数值方法

M. G. 沙瓦陀里等著  
刘 献 捷 译

高等教育出版社

本書系根据沙瓦陀里(M. G. Salvadori)及巴龙(M. L. Baron)著“工程学中的数值方法”(Numerical Methods in Engineering, 1955年第二版, 纽约 Prentice Hall 出版)一書譯出, 并經北京鋼鐵学院胡鏡容同志参考 1955 年的俄譯本修訂。

本書主要以差分法为基础, 講述微分方程初值問題及边值問題的一些数值解法, 其特点是內容比較簡要实用, 但缺乏严格的推导。書中有許多習題, 可供實習之用。

書中有些計算法是比較新而有效的, 并且是一般人还不太知道的, 因此对于从事工程計算問題的讀者, 無論他是教員、工程師或高等学校学生, 本書还具有相当的实用价值。

## 工程学中的数值方法

M. G. 沙瓦陀里等著

刘献捷譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号  
(北京市书刊出版业营业许可証出字第054号)

商务印书館上海印刷厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·537 开本 850×1168 1/32 印張 7 13/16  
字數 191,000 印数 1—3,300 定价(5) ¥1.20  
1959年1月第1版 1959年1月上海第1次印刷

## 原著者为中文版写的序言

在这国际間相互了解对于世界和平至为重要的时候，鑒于拙著“工程学中的数值方法”一書中譯本的出版可能有助于促进东西方的文化交流，我很乐于特別为它写一篇序言。

据我跟来美的許多中国学生及学者接触的經驗，頗感此書对于素具卓越数学知識的中国人民未必有很大帮助，今刘献捷博士不辞其劳自願将此書譯成中文，仍是至为可感的。

在应用数学家及工程师間，数值方法正日益流行，这也是理所当然的，因为有些原来非具高深解析知識才能解的問題，甚或根本不可能用解析方法处理的問題，用数值方法就可得出比較簡單的解法。对科学家和技术人員來說，数值計算法与計算尺、电动計算机及电子計算机相配合，正在給他們打开嶄新的知識領域。因此，像这样的一本書，給工程师講解这种方法的基本原理的，可以期望对于各門知識都会具有实际应用。

当我写这篇序言时，本書葡萄牙文譯本的校样已从巴西寄到，想起数学語言与工程需要之可以突破空間距离与語言隔閡，不觉为之欣然。

著 者

1955年5月于紐約

## 序 言

近数十年来由于多种原因应用数学家及自然科学家对于数值方法的兴趣已大为增长。价格不贵,大量生产的桌上电动计算机、数字型的及模拟型的各种大型电子计算机使得许多年前不可能解决的计算问题在今天变成了可能。一些不可能以解析方法得出解答的、比以往更复杂的、为数更多的技术问题,需要立刻得到答案,而能够作出复杂的解析问题的技术人员是不可多得的。数值近似法却只要求工作人员具有一点有限的数学知识。

这些情况说明了数值方法之所以受人欢迎,因之具有数值计算技能的人员需要加多,在各学院和各大学里数值方法的课程也有日益增加的需要。

这本书是从哥伦比亚大学工学院一学期的课程所用的一部讲义整理而成。这个课程是著者在十二年前开始教的五种课程中的最后一种,其目的是为了扩大大学生及研究生的数学根底,并且把理论数学知识与用数学方法解物理问题的技术联系起来。

在一本篇幅不过多的书里,显然不可能把方面既广而且正在继续发展的数值方法全部包罗进去。本书发表的目的不过是介绍给学生及科学工作者,特别是工程师,在解技术问题时所常需用的一些基本技能。因此本书是以学机械、物理、化学、数学的学生以及为了应用在他的专业工作上,因而希望熟悉数值方法的任何人为对象而写的。我们假定读者已学过微积分同一点点微分方程。

本书共五章,讨论的对象为:

1. 高次代数方程及联立线性代数方程组的解法。

2. 有限差分的基本理論及其对数值微分、数值积分、内插法、外推法的应用。
3. 一般初值問題的解法。
4. 一般边值及特征值問題的解法。
5. 偏微分方程边值問題、特征值問題以及混合型問題的解法。

在本書中，有限差分理論被作为所有数值計算方法的統一基础。这使得我們对于許多問題的处理节省了時間并避免了不必要的重复。这样也就容許全書中有簡單的誤差值計算法，并且或許还是第一次有系統地运用有效力的外推法。

为了在我們要求的預备知識及篇幅限制之內尽可能地使应用方面广泛，我們从各門工程学的領域（机械、材料力学、电工学、彈性及塑性理論、热工学、振动理論等等）选取簡單例题，各种数值計算法被导出或直接应用于這些問題上。但是讀者并不需要熟悉这些为了掌握数值計算意义而牽涉到的各种問題。

这些数值計算方法的选择是基于它們的簡單和效率高的优点：有些是两世紀来就已經为众所周知了的，其他的一些是新近才發展出来的。这些方法用到的計算工具，通常是桌上电动計算机，在許多情況下用計算尺。这些方法中大多数显然可能应用近代电子計算机，但是我們不提它，因为使用电子計算机的理論已成为一支嶄新的应用数学。

每章后面的習題主要地有两种类型：純粹地練習数值計算和应用問題。許多数值計算練習題实际上也代表物理問題并且可以用类比作多种解釋。应用問題的公式有的在本書中推出，有的可以从小注中所举的参考書里找到。習題答案每間隔一題給出，而对普遍感觉有兴趣的答案則一一給出。

M. L. 巴倫在我的指导下承担了收集并解答本書中所包含的

400 个习题的繁杂任务。他校验了书中的习题并描绘了所有的插图。

M. G. 沙瓦陀里

# 目 录

原著者为中文版写的序言

序言

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 第一章 代数及超越方程的实用解法 .....                | 1  |
| 1.1 緒論 .....                          | 1  |
| 1.2 代数方程实根的求法 .....                   | 1  |
| 1.3 代数方程复数根的求法 .....                  | 8  |
| 1.4 超越方程的解法 .....                     | 13 |
| 1.5 联立綫性代数方程組的解法 .....                | 16 |
| 1.6 高斯表式 .....                        | 16 |
| 1.7 矩陣及行列式 .....                      | 19 |
| 1.8 乔列斯基表式 .....                      | 22 |
| 1.9 高斯-賽得耳疊代法 .....                   | 27 |
| 1.10 用調節余数法解綫性方程組 .....               | 29 |
| 習題集 1 .....                           | 35 |
| 第二章 有限差分及其应用 .....                    | 43 |
| 2.1 緒論 .....                          | 43 |
| 2.2 內插拋物綫 .....                       | 43 |
| 2.3 台勞級数展式 .....                      | 46 |
| 2.4 向后差分法 .....                       | 49 |
| 2.5 向前差分法 .....                       | 55 |
| 2.6 格氏-牛頓 (Gregory-Newton) 內插公式 ..... | 58 |
| 2.7 中央差分法 .....                       | 60 |
| 2.8 数值积分法 .....                       | 67 |
| 2.9 李却德孙外推法 .....                     | 73 |
| 習題集 2 .....                           | 78 |
| 第三章 初值問題的数值积分法 .....                  | 88 |
| 3.1 緒論 .....                          | 88 |
| 3.2 一阶微分方程数值解法的开端 .....               | 88 |
| 3.3 高阶微分方程数值解法的开端 .....               | 94 |

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 3.4                     | 亚当斯法                 | 97         |
| 3.5                     | 解线性微分方程的龙格-伐克斯法      | 101        |
| 3.6                     | 联立一阶微分方程组的解法         | 105        |
| 3.7                     | 对于二阶微分方程的亚当斯-司徒迈解法   | 106        |
| 3.8                     | 对于二阶线性微分方程的伐克斯解法     | 110        |
| 3.9                     | 逐步积分法中误差的积累          | 118        |
| 习题集 3                   |                      | 122        |
| <b>第四章 一般边值问题的数值积分法</b> |                      | <b>129</b> |
| 4.1                     | 边值问题的解法              | 129        |
| 4.2                     | 边值问题的逐步积分法           | 130        |
| 4.3                     | 用中央差分分解二阶微分方程问题      | 131        |
| 4.4                     | 用改正量改进得数             | 136        |
| 4.5                     | 用外推法改进得数             | 143        |
| 4.6                     | 用中央差分分解高阶微分方程问题      | 144        |
| 4.7                     | 特征值问题的解法             | 148        |
| 4.8                     | 不等间距分点的用法            | 152        |
| 习题集 4                   |                      | 154        |
| <b>第五章 偏微分方程的数值解法</b>   |                      | <b>163</b> |
| 5.1                     | 在笛氏坐标系中的偏差分算符        | 163        |
| 5.2                     | 二重积分的数值解法            | 168        |
| 5.3                     | 用叠代法解拉普拉斯方程          | 173        |
| 5.4                     | 用调节余数法解拉普拉斯方程        | 176        |
| 5.5                     | 用调节余数法解泊松方程          | 178        |
| 5.6                     | 弹性扭力                 | 183        |
| 5.7                     | 用调节余数法解塑性扭力问题        | 186        |
| 5.8                     | 含 $F^{1/2}$ 的边值问题的解法 | 194        |
| 5.9                     | 二维各特征值问题的解法          | 197        |
| 5.10                    | 周分离变数及有限差分分解偏微分方程法   | 202        |
| 5.11                    | 膜的振动                 | 204        |
| 5.12                    | 分点接近曲线边界时的处理法        | 207        |
| 5.13                    | 二维热流瞬变问题             | 210        |
| 5.14                    | 斜坐标系中的拉普拉斯算符         | 214        |
| 5.15                    | 极坐标系中的拉普拉斯算符         | 218        |
| 5.16                    | 三角坐标系中的拉普拉斯算符        | 222        |
| 习题集 5                   |                      | 227        |

# 第一章 代数及超越方程的实用解法

## 1.1 緒論

代数及超越方程与联立綫性方程組的解法,在应用数学上作数值計算时是最常遇着的一种,虽然已經發明有許多方法来求它們的解,其中若干方法由理論观点而言非常巧妙,但解答方程的任务仍然很麻煩。

因此我們来介紹各种求高次代数方程的实根及复根、超越方程的实根及联立綫性代数方程組的实根的方法。这些方法特別适于用計算尺及电动計算机。电动計算机的精确度能达到5—10位有效数字并可解40至100个联立綫性方程組。近代电子計算机也可以广泛的使用这些方法。

以下概述的一般步驟中,打算把各种方法結合起来,使解题的劳动量减少,但讀者也可用其他經典的方法或公式,因为选择方法这件事是要看各人已有的訓練和个人爱好而定的。

## 1.2 代数方程实根的求法

一个 $n$ 次代数方程有 $n$ 个根,其中若干可为不相同的实根或为实数的重根,其余的就出現为成对的共轭复数根。

解一高次代数方程时,宜先依其绝对值大小的次序找出各实根。最好使用累試法,并以綜合除法求余数。

方程可能有的正根及負根数可用笛卡兒符号規則来确定:即正根的个数等于方程的系数的符号变号的次数(或比这个数目少

一偶数), 負根的个数則等于它的系数的符号重复数 (或比这个数目少一偶数)。但系数为零的各项在計算时略去不計。

設方程

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \text{ ①}, \quad (1.2.1)$$

它的最大的一个根往往可用綫性方程

$$x + a_{n-1} = 0 \quad (1.2.2)$$

的根或用二次方程

$$x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0 \quad (1.2.8)$$

的絕對值較大的根作为近似值。如方程 (1.2.1) 的最大根的絕對值远較其他一切根大时, 則这种近似值是精确的。

同样, 方程 (1.2.1) 的最小根可用方程

$$a_1x + a_0 = 0 \quad (1.2.4)$$

的根去近似, 如果最小根远較其他各根的值小时。或需用方程

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (1.2.5)$$

的絕對值較小的根去近似。

关于找出实根的一般方法現在将应用于方程 (a) 說明之。

$$y = f(x) = x^3 - 12.2x^2 + 7.45x + 42 = 0. \quad (a)$$

依笛氏符号法知道方程有两个正根或无正根, 而只有一个負根。

最大根的近似值由方程

$$x - 12.2 = 0$$

給定, 或用方程

$$x^2 - 12.2x + 7.45 = 0$$

求出。

由第一个方程我們得  $x_1 = 12.2$ , 由第二个方程我們得

$$x_1 = 6.1 + \sqrt{(6.1)^2 - 7.45} = 11.55,$$

上面的根号前面取正号, 得較大的根。現以  $x_1 = 12$  为試值, 应用

①  $x^n$  的系数  $a_n$ , 普通多以  $a_n$  除全方程而使它化簡为 1。

綜合除法則有

|    |   |       |       |       |
|----|---|-------|-------|-------|
|    | 1 | -12.2 | 7.45  | 42    |
| 12 |   | 12.0  | -2.40 | 60.6  |
|    | 1 | -0.2  | 5.05  | 102.6 |

这个余数之大可能使讀者相信 12 对于  $x_1$  是一个不好的近似值, 但并不如此, 因每当一根的值远較 1 为大时, 根值有微小的变更也可引起余数巨大的变动。事实上如以  $x_1=10$  为第二試值則有

|    |   |       |        |         |
|----|---|-------|--------|---------|
|    | 1 | -12.2 | 7.45   | 42      |
| 10 |   | 10.0  | -22.00 | -145.50 |
|    | 1 | -2.2  | -14.55 | -103.50 |

$x=12$  及  $x=10$  两值各为根的上下近似值<sup>①</sup>。一个較好的近似值可以用綫性內插法求得。連結  $P_1(x_1, y_1)$  及  $P_2(x_2, y_2)$  两点的直綫

$$\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

与  $x$  軸的交点 ( $y=0$ ) 为

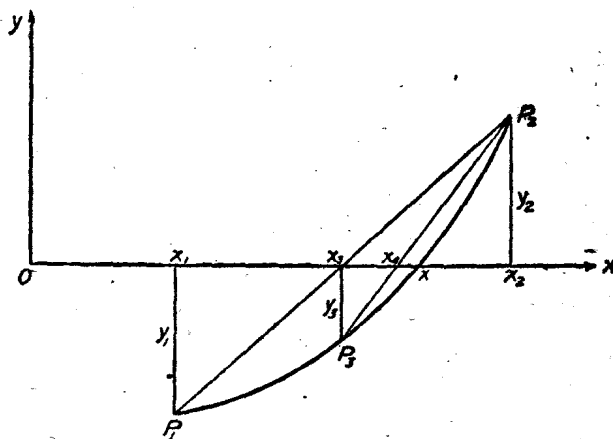


圖 1.1 綫性內插法。

① 因  $x=12$  的余数为正,  $x=10$  的余数为負, 則在 10 及 12 之間必有所求根存在——讀者注。

$$x_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}, \quad (1.2.6)$$

此式给定  $x_3$  为线性内插近似值 (圖 1.1)。方程 (1.2.6) 的右边可以用簡單的机器运算解出来。例如对于各近似值  $x_1=12$ ,  $y_1=103$  及  $x_2=10$ ,  $y_2=-103$  应用方程 (1.2.6) 則有

$$x_3 = \frac{12(-103) - 10(103)}{-103 - 103} = 11,$$

用 11 作綜合除法, 則得余数  $y_3 = -21.25$ 。我們現在可由 11 及 12 兩数作线性内插, 得  $x_4 = 11.17$  余数为  $-3.55$ 。最后推测根数为 11.20, 作綜合除法

$$\begin{array}{r} 11.20 \quad 1 \quad -12.2 \quad 7.45 \quad 42 \\ \hline 11.20 \quad 11.20 \quad -11.20 \quad -42.0 \\ \hline 1 \quad -1.0 \quad -3.75 \quad 0 \end{array} \quad (b)$$

我們若交互的应用牛頓切綫法 (圖 1.2) 以改进根的第一近似值, 往往更为便利。連續地应用綜合除法两次, 可直接得  $f(x_n)$  及  $f'(x_n)$  的值, 从而用以計算  $x_{n+1}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.2.7) \textcircled{1}$$

如以  $x_1=12$  則由以下兩步驟中得

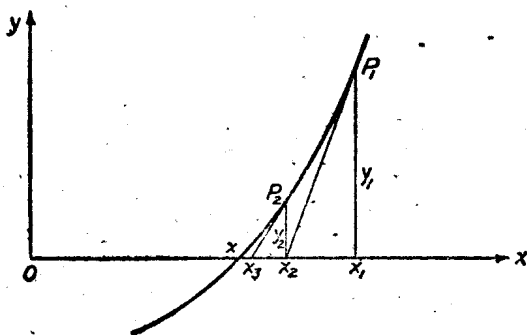


圖 1.2 牛頓切綫法。

① (1.2.7) 即牛頓切綫法公式——譯者注。

|          |   |       |               |              |
|----------|---|-------|---------------|--------------|
|          | 1 | -12.2 | 7.45          | 42           |
| $x_1=12$ |   | 12.0  | -2.40         | 61           |
|          | 1 | -0.2  | 5.05          | $103=f(x_1)$ |
| $x_1=12$ |   | 12.0  | 142           |              |
|          | 1 | 11.8  | $147=f'(x_1)$ |              |

$$x_2 = 12 - \frac{103}{147} = 12 - 0.7 = 11.3.$$

用这个新求得的值  $x_2=11.3$  再用上面的方法运算两次便有

|            |   |       |                  |               |
|------------|---|-------|------------------|---------------|
|            | 1 | -12.2 | 7.45             | 42            |
| $x_2=11.3$ |   | 11.3  | -10.17           | -30.7         |
|            | 1 | -0.9  | -2.72            | $11.3=f(x_2)$ |
| $x_2=11.3$ |   | 11.3  | 117.52           |               |
|            | 1 | 10.4  | $114.80=f'(x_2)$ |               |

$$x_3 = 11.3 - \frac{11}{116} = 11.3 - 0.1 = 11.2,$$

这个数就是以前所求得的根值。

综合除法的主要优越点之一是它能直接求得简化方程的各系数，这个简化方程的诸根就是所求原方程中其余的根。这样，以  $x-11.2$  对方程 (a) 作综合除法，则得一个二次方程，它的各系数出现在 (b) 的最后一行上为

$$x^2 - x - 3.75 = 0,$$

它可以用解二次方程的公式解出，于是得方程 (a) 的其他两个根

$$x = 0.5 \pm \sqrt{0.25 + 3.75} = \begin{cases} +2.5 \\ -1.5. \end{cases}$$

如根值远比 1 大时，为了避免因根值的变动而引起的余数的巨大变更我们可以用逆综合除法如下

|          |       |        |        |     |
|----------|-------|--------|--------|-----|
|          | 1     | -12.20 | 7.45   | 42  |
| $x_1=12$ |       | 11.29  | -10.95 | -42 |
|          | 11.29 | -0.91  | -3.50  | 0   |

从假设余数为 0 开始，则 -42 能使余数等于 0，-42 以近似根 12 除之得 -3.50。出现在 7.45 下面的一数必需与 7.45 相加而能得

-3.50, 所以这数为  $-3.50 - 7.45 = -10.95$ 。至于  $-0.91$  则为  $-10.95/12$  的商, 及  $11.29$  为  $-0.91 - (-12.2)$  的差。这最后的结果可检验所假设的数是否正确。由上可见假设的数与用逆综合除法所得的数值相差并不大, 这就表示  $12$  与根值相差不远。我们再以同法用  $x_2 = 11$  去试

$$\begin{array}{r} x_2 = 11 \quad \begin{array}{rrrr} 1 & -12.20 & 7.45 & 42 \\ & 11.18 & -11.27 & -42 \\ \hline & 11.18 & -1.02 & -3.82 \end{array} \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

在第一试值中其误差是  $12 - 11.29 = 0.71$ ; 第二试值的误差是  $11 - 11.18 = -0.18$ , 再由简单的线性内插法使得

$$x = \frac{12(-0.18) - 11(0.71)}{-0.18 - 0.71} = 11.20。$$

如将上例的结果普遍化, 则任一代数方程的  $m$  个实根可以用  $(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_m)$  一次又一次地作综合除法去求到任何要求的精确度。

在求各实根时如有两个根几乎相等, 也就是说方程几乎有重根时, 我们应注意方程  $f(x) = 0$  的  $k$  重根也就是这个方程的  $k-1$  阶导数的一个根。例如以  $x = 3$  对下式作综合除法

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0,$$

我们便看到

$$\begin{array}{r} \begin{array}{rrrr} 3 & 1 & -5 & 3 & 9 \\ & & 3 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 = f(3) \end{array} \\ \begin{array}{rrrr} 3 & 1 & -2 & -3 & 0 = f(3) \\ & & 3 & +3 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 = f'(3) \end{array} \end{array}$$

所以  $x = 3$  是个重根。

每当  $f'(x)$  在一根  $\bar{x}$  的邻域内的值很小时, 则方程 (1.2.7) 对于  $\bar{x}$  值的变更极为灵敏。在这种情况下, 宜先求出  $f'(x) = 0$  在  $\bar{x}$  附近的一个根  $a$  来计算  $f''(a)$ , 而将  $f(x)$  在  $x = a$  附近展开成台

劳级数,其中高于三阶的项略去不计便有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots \approx \\ &\approx f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2. \end{aligned}$$

要求  $f(x)$  在  $x=a$  附近的各根时,我们解以下二次方程

$$f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = 0,$$

得

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{\frac{-f'(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}}. \quad (1.2.8)$$

例如以  $x=1$  用综合除法除下方程

$$x^3 - x^2 - 1.01x + 0.99 = 0$$

|   |   |    |                      |                     |
|---|---|----|----------------------|---------------------|
|   | 1 | -1 | -1.01                | 0.99                |
| 1 |   | 1  | 0                    | -1.01               |
|   | 1 | 0  | -1.01                | <u>-0.02 = f(1)</u> |
| 1 |   | 1  | 1.00                 |                     |
|   | 1 | 1  | <u>-0.01 = f'(1)</u> |                     |

因为  $f'(1)$  的值小,我们先来解方程

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.01 = 0,$$

用  $x=1$  开始算

|   |   |                   |                      |
|---|---|-------------------|----------------------|
|   | 3 | -2                | -1.01                |
| 1 |   | 3                 | 1.00                 |
|   | 3 | 1                 | <u>-0.01 = f'(1)</u> |
| 1 |   | 3                 |                      |
|   | 3 | <u>4 = f''(1)</u> |                      |

则得根

$$a = 1 - \frac{-0.01}{4} = 1.0025.$$

连续应用综合除法<sup>①</sup>以求  $f(a)$  及  $f''(a)$  的值,则有

<sup>①</sup> 以  $x=a$  对方程  $f(x)=0$  连续作综合除法  $n$  次,则得  $f(a), f'(a), \frac{1}{2!}f''(a), \dots, \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$  的各值。

|            |   |                              |             |                 |
|------------|---|------------------------------|-------------|-----------------|
|            | 1 | -1                           | -1.01       | 0.99            |
| $a=1.0025$ |   | 1.0025                       | 0.0025      | -1.010          |
|            | 1 | 0.0025                       | -1.0075     | -0.020 = $f(a)$ |
| $a=1.0025$ |   | 1.0025                       | 1.0075      |                 |
|            | 1 | 1.0050                       | 0 = $f'(a)$ |                 |
| $a=1.0025$ |   | 1.0025                       |             |                 |
|            | 1 | 2.0075 = $\frac{1}{2}f''(a)$ |             |                 |

同时应用方程(1.2.8), 使得根值

$$x_{1,2} = 1.0025 \pm \sqrt{-\frac{0.020}{2.0075}} = \begin{cases} 1.102 \\ 0.903, \end{cases}$$

根的值 1.10 及 0.90<sup>①</sup>。

当方程的各实根均被除去后, 则最后简化方程中就只含成对的共轭复数根了。

### 1.3 代数方程复数根的求法

如简化方程为二次式, 则其复数共轭根可立刻用公式求得。若简化方程为四次、六次或更高次则宜将方程中对应于每共轭复数根的二次因子隔离开, 这可以用二次因子试值以综合除法试除直到余项  $s_1x + s_0$  成为零或很小时为止。

在方程(1.2.1)中对应于最大模数的根的二次型因子的第一近似因子为

$$x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}, \quad (1.3.1)$$

对应于最小模数的根的二次型因子的第一近似因子是

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

或

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}, \quad (1.3.2)$$

方程中的这些  $a$  现为简化方程的各系数。

<sup>①</sup> 用 1.10 及 0.90 对 1, -1, -1.01, 0.99 各系数作综合除法, 可证明它们是根的真值——译者注。