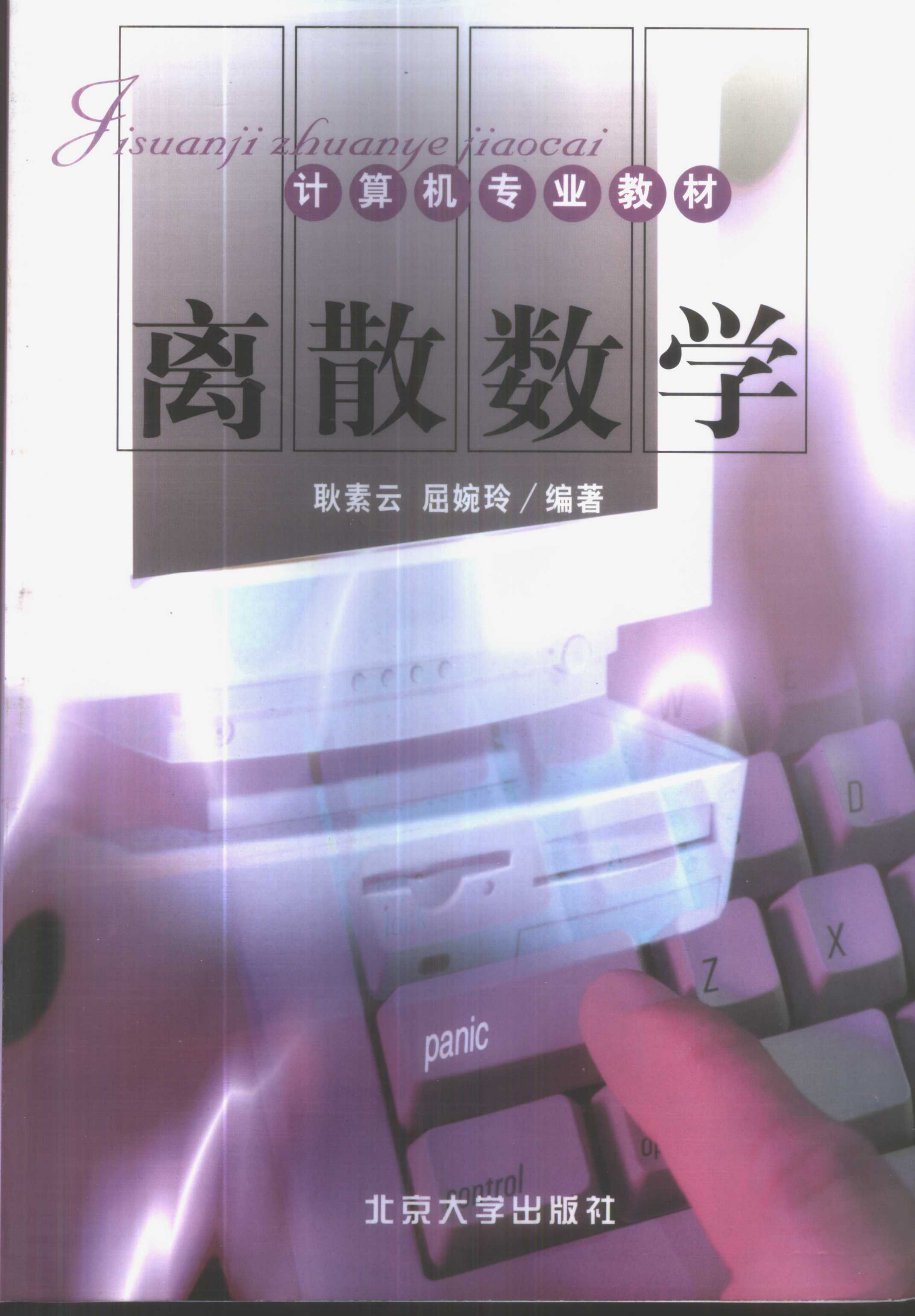
Jisuanji zhuanye jiaocai

计算机专业教材

离散数学

耿素云 屈婉玲/编著



北京大学出版社

计算机专业教材

离散数学

耿素云　屈婉玲　编著

北京大学出版社
北京

内容简介

本书共分四大部分.数理逻辑部分包括命题逻辑的基本概念、等值演算、范式与推理理论,一阶逻辑的基本概念、前束范式以及推理理论.集合论部分包括集合的基本概念与运算,二元关系的性质与运算、等价关系与偏序关系,函数及其性质,复合函数与反函数等.代数结构部分包括二元运算及代数系统,半群、独异点、群、环与域、格与布尔代数等.图论部分包括图的基本概念和矩阵表示,树的概念、性质及应用,二部图,欧拉图,哈密尔顿图,平面图,图的着色等.

本书作为北京市高等教育计算机及应用专业自学考试的指定教材,体系严谨,选材精炼,深浅适度,并配有大量的例题,习题及解答.本书既适合自学,也可以作为普通高校计算机及相关专业离散数学的入门教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/耿素云,屈婉玲编著. —北京:北京大学出版社,2002.9
ISBN 7-301-05668-0

Ⅰ.离… Ⅱ.①耿… ②屈… Ⅲ.离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041747 号

书　　名:**离散数学**
著作责任者:耿素云　屈婉玲　编著
责 任 编 辑:沈承凤
标 准 书 号:ISBN 7-301-05668-0/TP·0663
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:发行部 62752015　编辑部 62752038
排　版　者:兴盛达打字服务社　62549189
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　15.875 印张　393 千字
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:21.00 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机专业的一门重要的专业基础课程，已经列为 ACM 2001 计算机专业教学计划的核心课程．许多专业课，如数据结构、操作系统、程序设计、软件工程、数据库、计算机网络、人工智能、算法设计与分析、理论计算机科学基础等，均以离散数学为前导课程．同时，通过离散数学课程的学习能够提高学生分析问题、解决问题及抽象思维的能力．

本书是北京市高等教育自学考试计算机及应用专业本科段离散数学课程的指定教材．全书分为四个部分：数理逻辑、集合论、代数结构、图论．它以原来专科自考教材“离散数学基础”（耿素云、屈婉玲编著，北京大学出版社出版）为蓝本，保持原来的风格，修改补充而成．主要的改变是：

1．按离散数学考试大纲充实了代数结构和图论的部分内容以及相关的例题和练习．

2．针对自学考生不熟悉解题方法和书写规范的困难，对全部习题给出了提示或解答，并针对某些难点和要点做出分析．

3．附录给出了高等教育自学考试离散数学课程的考试大纲，按章系统地列出了必须掌握的知识点及相应的考核要求，为自学考生提供了一个知识框架和复习提纲．

4．为了使自学考生进一步了解题型、题量、考试难度、解题要求等，附录给出了一套模拟试题及答案．

考虑到自学考生的学习特点和困难，在保持知识体系完整的基础上，本书尽量做到选材精炼，重点突出，讲解详实，内容由浅入深，循序渐进，并列举了大量的例题和练习．因此，它不仅适合自学考生使用，也可以作为普通高校学生和科技人员学习离散数学的一本入门教材．

书中第一、二、七、八、九、十章由耿素云完成，第三、四、五、六章由屈婉玲完成．

由于水平所限，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正．

作者

2002.6 于北京大学

目　　录

第一部分　数 理 逻 辑

第一章　命题逻辑 …… (1)
1.1　命题与联结词 …… (1)
1.2　命题公式与赋值 …… (5)
1.3　等值演算 …… (8)
1.4　析取范式与合取范式 …… (13)
1.5　命题逻辑的推理理论 …… (22)
1.6　例题分析 …… (28)
习题一 …… (35)
第二章　一阶逻辑 …… (38)
2.1　一阶逻辑的基本概念 …… (38)
2.2　一阶逻辑公式及解释 …… (43)
2.3　一阶逻辑等值式与前束范式 …… (48)
2.4　一阶逻辑推理理论 …… (53)
2.5　例题分析 …… (56)
习题二 …… (60)

第二部分　集　合　论

第三章　集合的基本概念和运算 …… (63)
3.1　集合的基本概念 …… (63)
3.2　集合的基本运算 …… (65)
3.3　集合恒等式 …… (67)
3.4　有穷集合的计数 …… (69)
3.5　例题分析 …… (70)
习题三 …… (76)
第四章　二元关系和函数 …… (78)
4.1　集合的笛卡儿积和二元关系 …… (78)
4.2　关系的运算 …… (81)
4.3　关系的性质 …… (85)
4.4　关系的闭包 …… (88)
4.5　等价关系和偏序关系 …… (89)
4.6　函数的定义和性质 …… (93)
4.7　函数的复合和反函数 …… (96)
4.8　例题分析 …… (98)

习题四……………………………………………………………………………………………………（105）

第三部分　代数结构

第五章　代数系统的一般概念……………………………………………………………（109）
5.1　二元运算及其性质 ……………………………………………………………………（109）
5.2　代数系统及其子代数和积代数 ………………………………………………………（116）
5.3　代数系统的同态与同构 ………………………………………………………………（118）
5.4　例题分析 ………………………………………………………………………………（123）
习题五……………………………………………………………………………………………（126）
第六章　几个典型的代数系统……………………………………………………………（129）
6.1　半群与独异点 …………………………………………………………………………（129）
6.2　群与子群 ………………………………………………………………………………（131）
6.3　循环群与置换群 ………………………………………………………………………（137）
6.4　群的直积与同态 ………………………………………………………………………（141）
6.5　环与域 …………………………………………………………………………………（142）
6.6　格与布尔代数 …………………………………………………………………………（143）
6.7　例题分析 ………………………………………………………………………………（150）
习题六……………………………………………………………………………………………（155）

第四部分　图　论

第七章　图的基本概念……………………………………………………………………（157）
7.1　无向图和有向图 ………………………………………………………………………（157）
7.2　通路、回路、图的连通性 ………………………………………………………………（163）
7.3　图的矩阵表示 …………………………………………………………………………（167）
7.4　例题分析 ………………………………………………………………………………（170）
习题七……………………………………………………………………………………………（175）
第八章　树…………………………………………………………………………………（177）
8.1　无向树 …………………………………………………………………………………（177）
8.2　根树及其应用 …………………………………………………………………………（181）
8.3　例题分析 ………………………………………………………………………………（186）
习题八……………………………………………………………………………………………（188）
第九章　二部图、欧拉图、哈密尔顿图……………………………………………………（190）
9.1　二部图 …………………………………………………………………………………（190）
9.2　欧拉图 …………………………………………………………………………………（193）
9.3　哈密尔顿图 ……………………………………………………………………………（196）
9.4　例题分析 ………………………………………………………………………………（200）
习题九……………………………………………………………………………………………（202）

第十章　平面图及图的着色……………………………………………………………（204）
10.1　平面图……………………………………………………………………………（204）
10.2　图的着色…………………………………………………………………………（209）
10.3　例题分析…………………………………………………………………………（212）
习题十…………………………………………………………………………………（214）
习题的提示或解答……………………………………………………………………（215）
附录A　离散数学课程考试大纲 ……………………………………………………（239）
B　模拟试题 ………………………………………………………………………（242）
C　模拟试题解答 …………………………………………………………………（244）

第一部分　数 理 逻 辑

第一章　命 题 逻 辑

1.1　命题与联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句就成了推理的基本要素．在数理逻辑中，称能判断真假但不能既真又假的陈述句为**命题**．就是说，作为命题的陈述句所表达的判断只有两种结果：正确的或错误的，称这种判断结果为命题的**真值**．真值只能取两个值：真或假．真对应判断正确，假对应判断错误．任何命题的真值都是惟一的，称真值为真的命题为**真命题**，真值为假的命题为**假命题**．判断给定的句子是否为命题，应首先判断它是否为陈述句，再判断它是否有惟一的真值．若它是具有惟一真值的陈述句，它就是命题．

【例 1.1】　判断下列句子中哪些是命题．

(1) $\sqrt{3}$是有理数．

(2) 2 是素数．

(3) $x+y>10$．

(4) 太阳从西方升起．

(5) 乌鸦是黑色的．

(6) 这个小男孩多勇敢呀!

(7) 明年中秋节的晚上是晴天．

(8) 您贵姓?

(9) 请把门开开!

(10) 地球外的星球上也有生物．

解　在以上 10 个句子中，(6)是感叹句，(8)是疑问句，(9)是祈使句，它们都不是陈述句，因而都不是命题．其余 7 个句子都是陈述句，但也不都是命题．其中的(3)就不是命题，由于 x 与 y 的不确定性，使得该陈述句的真值不惟一．当 $x=5, y=8$ 时，$5+8>10$ 正确，而当 $x=5, y=4$ 时，$5+4>10$ 不正确，因而(3)不是命题．其余的 6 个陈述句都是命题，其中，(2)，(5)是真命题，(1)，(4)是假命题．(7)的真值虽然现在还不知道，但到明年中秋节就知道了，因而(7)也是具有惟一真值的陈述句，所以是命题．(10)的真值也是惟一的，只是现在还不知道而已．随着科学技术的发展，它的真值也会知道的．因而它也是命题．

从以上的分析可以看出，命题一定是陈述句，但陈述句不一定是命题．另外还可以看出，真

值是否惟一与我们是否知道它是两回事.

为了能用数学方法来研究命题之间的逻辑关系和推理,需要将命题符号化,本书中用 p, $q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$ 表示命题.例如,在例 1.1 中,

p: $\sqrt{3}$是有理数.

q: 2 是素数.…

在数理逻辑中,将命题的真值也符号化,本书中,用 1 表示"真",用 0 表示"假".在例 1.1 中,命题(2),(5)的真值为 1,(1),(4)的真值为 0.

以上讨论的命题都是简单的陈述句,它们都不能分成更简单的陈述句,这样的命题称为**简单命题**或**原子命题**.下例中给出的命题都不是简单命题.

【例 1.2】 (1) 10 不是素数.

(2) 2 和 3 都是素数.

(3) 2 或 4 是素数.

(4) 若数 a 是 4 的倍数,则它一定是 2 的倍数.

(5) 数 a 是偶数当且仅当它能被 2 整除.

(6) 5 不是素数.

(7) 2 和 4 都是素数.

(8) 6 或 8 是素数.

(9) 若数 a 能被 2 整除,则它一定能被 4 整除.

(10) 角 A 与角 B 相等当且仅当 A 与 B 是对顶角.

以上命题由哪些联结词联结而成的?

解 本例中给出的 10 个句子均具有惟一真值,它们都是命题.其中(1)—(5)真值为 1,(6)—(10)真值为 0.(1),(6)中使用了联结词"非",(2),(7)中使用了联结词"和",(3),(8)中使用了联结词"或",(4),(9)中使用了联结词"如果,则",(5),(10)中使用了联结词"当且仅当".

称由简单命题用联结词联结而成的命题为**复合命题**.例 1.2 中给出的 10 个命题都是复合命题,而且都是最基本的复合命题.它们中所用联结词都是自然语言中的联结词.在下面几个定义中,将给出联结词的精确定义,并将它们符号化.

定义 1.1 设 p 为任一命题.复合命题"非 p"(或"p 的否定")称为 p 的**否定式**,记作 $\neg p$.$\neg$称为**否定联结词**.

$\neg p$ 的逻辑关系为 p 不成立,于是 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

在例 1.2 中,设 p:10 是素数,则$\neg p$:10 不是素数.这里,p 的真值为 0,所以$\neg p$ 的真值为 1.在(6)中,设 q:5 是素数.则$\neg q$:5 不是素数.q 的真值为 1,所以$\neg q$ 的真值为 0.

定义 1.2 设 p, q 为二命题.复合命题"p 并且 q"(或"p 与 q")称为 p 与 q 的**合取式**,记作 $p \wedge q$. $\wedge$ 称为**合取联结词**.

$p \wedge q$ 的逻辑关系为 p 与 q 同时成立,因而 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

在例 1.2 中,设 p:2 是素数,q:3 是素数,则 $p \wedge q$ 表示 2 和 3 都是素数.由于 p, q 的真值均为 1,所以 $p \wedge q$ 的真值为 1.在(7)中,仍设 p:2 是素数,r:4 是素数,则 $p \wedge r$ 表示 2 与 4 都是素数,由于 r 的真值为 0,所以 $p \wedge r$ 的真值为 0.

联结词 $\wedge$ 在用法上很灵活.自然语言中的"既…又…","不但…而且…","虽然…但是…"

等都可以符号化为$\wedge$.请看下例.

【例 1.3】 将下列命题符号化.

(1) 张路既聪明又用功.

(2) 张路不仅聪明,而且用功.

(3) 张路虽然不太聪明,但他很用功.

(4) 张路不是不聪明,而是不用功.

(5) 肖颖和李莉都是北大的学生.

(6) 张芳与陈敏是好朋友.

(7) 姜文和姜武是兄弟.

解 设 p: 张路聪明,q: 张路用功.(1)到(4)分别符号化为 $p\wedge q, p\wedge q, \neg p\wedge q, \neg(\neg p)\wedge\neg q$.在这 4 个复合命题中都使用了联结词$\wedge$.至于说它们的真值,均应由 p,q 的真值而定.在(5)中设 p: 肖颖是北大学生,q: 陈敏是北大学生.复合命题(5)符号化为 $p\wedge q$.(6),(7)两命题均为简单命题,因而分别符号化为 p 和 q 即可.

定义 1.3 设 p,q 为任意二命题.复合命题"p 或q"称作 p 与q 的**析取式**,记作 $p\vee q$, $\vee$ 称为**析取联结词**.

$p\vee q$ 的逻辑关系为p 与q 中至少一个成立,因而 $p\vee q$ 为真当且仅当p 与q 中至少一个为真.

在例 1.2(3)中, 设 p:2 是素数,q:4 是素数.则 $p\vee q$ 表示 2 或 4 是素数.由于 p 的真值为 1,所以 $p\vee q$ 的真值为 1.而在(8)中,设 r:6 是素数,s:8 是素数.由于 r,s 的真值均为 0,所以 $r\vee s$ 的真值为 0.

析取联结词$\vee$的逻辑关系是明确的,但自然语言中的"或"具有二义性,用"或"联结的命题,有时具有相容性,有时又具有排斥性,因而在使用联结词$\vee$时要注意区分.请看下例.

【例 1.4】 将下面命题符号化.

(1) 谢丹生于 1972 年或 1973 年.

(2) 吕小洲学过德语或法语.

(3) 派老王或老李中的一人去上海开会.

解 本例中,(1),(3)中的或是排斥的,而(2)中的或是相容的.因而(2)可符号化为 $p\vee q$,其中 p 表示吕小洲学过德语,q 表示吕小洲学过法语.只有吕小洲既没学过德语,也没学过法语时,此命题才是假的.其他情况下均为真.在(1)中,设 r:谢丹生于 1972 年,s: 谢丹生于 1973 年.r,s 的联合真值情况有且仅有 3 种情况: 同假;r 真,s 假;r 假,s 真.不会出现同真的情况,因而可以符号化为 $r\vee s$. $r\vee s$ 为真当且仅当r,s 中一个为真另一个为假.在(3)中,设 t: 派老王到上海开会,u: 派老李到上海开会.t,u 的联合真值情况有 4 种: 同真,同假,一真一假(两种情况).如果也符号化为 $t\vee u$,就可能派 2 人去开会,因而不能符号化为 $t\vee u$.可以使用多个联结词,符号化为$(t\wedge\neg u)\vee(\neg t\wedge u)$.此复合命题为真当且仅当 p,q 中一个为真,一个为假,它很准确地表达了(3)的含义.

定义 1.4 设 p,q 为二命题.复合命题"如果 p,则 q"称作 p 与q 的**蕴涵式**,记作 $p\rightarrow q$.称 p 是蕴涵式的**前件**,q 是蕴涵式的**后件**.$\rightarrow$称作**蕴涵联结词**.

$p\rightarrow q$ 的逻辑关系是,q 是p 的必要条件,或 p 是q 的充分条件.$p\rightarrow q$ 为假当且仅当p 为真且q 为假.在使用蕴涵联结词$\rightarrow$时,应注意以下几点.

1. 在自然语言里，特别是在数学中，q 是 p 的必要条件有不同的叙述方式，如“只要 p 就 q”，“p 仅当 q”，“只有 q 才 p”等都可以符号化为 $p\rightarrow q$ 的形式.

2. 在自然语言里，“如果 p，则 q”中的 p 与 q 往往有某种内在联系，而在数理逻辑里，p 与 q 不一定有什么内在联系.

3. 在数学和其他自然科学中，“如果 p，则 q”往往表示的是前件为真，后件为真的推理关系.但在数理逻辑中，当 p 为假时，$p\rightarrow q$ 为真.

在下例中，这 3 点注意事项都有所体现，请注意区分.

【例 1.5】 将下列命题符号化.

(1) 若 $3+3=6$，则地球是运动的.

(2) 若 $3+3\neq 6$，则地球是运动的.

(3) 若 $3+3=6$，则地球是静止不动的.

(4) 若 $3+3\neq 6$，则地球是静止不动的.

(5) 只要 a 是 4 的倍数，a 就是 2 的倍数.

(6) a 是 4 的倍数，仅当 a 是 2 的倍数.

(7) 除非 a 是 2 的倍数，a 才能是 4 的倍数.

(8) 除非 a 是 2 的倍数，否则 a 不是 4 的倍数.

(9) 只有 a 是 2 的倍数，a 才能是 4 的倍数.

(10) 只有 a 是 4 的倍数，a 才能是 2 的倍数.

解 在(1)—(4)中，令 p:$3+3=6$，q:地球是运动的，在这里，p 与 q 显然没有什么内在联系，但仍可以组成蕴涵式.蕴涵式分别为 $p\rightarrow q$，$\neg p\rightarrow q$，$p\rightarrow\neg q$，$\neg p\rightarrow\neg q$.真值分别为 1，1，0，1.在(5)—(10)中，令 r:a 是 4 的倍数，s:a 是 2 的倍数.(5)—(9)均叙述的是 a 是 2 的倍数是 a 是 4 的倍数的必要条件，因而都符号化为 $r\rightarrow s$. r，s 的真值均可为 0 或 1.但是当 r 的真值为 1 时 s 的真值必定为 1，因而蕴涵式 $r\rightarrow s$ 不会出现前件真后件假的情况.于是，$r\rightarrow s$ 的真值为 1.而在(10)中，将 a 是 4 的倍数看成了 a 是 2 的倍数的必要条件，因而应符号化为 $s\rightarrow r$.因为可能出现 s 为真，r 为假的情况，所以 $s\rightarrow r$ 的真值为 0.比较(5)和(10)，注意这里的“只要”和“只有”是有区别的，在符号化时一定要注意.

定义 1.5 设 p，q 为二命题.复合命题“p 当且仅当 q”称作 p 与 q 的**等价式**，记作 $p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$称作**等价联结词**.

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系是 p 与 q 互为充分必要条件. $p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同.

【例 1.6】 将下列命题符号化，并求其真值.

(1) $2+3=5$ 当且仅当$\sqrt{2}$是无理数.

(2) $2+3=5$ 当且仅当$\sqrt{2}$不是无理数.

(3) $2+3\neq 5$ 当且仅当$\sqrt{2}$是无理数.

(4) $2+3\neq 5$ 当且仅当$\sqrt{2}$不是无理数.

(5) O_1，O_2 两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等.

(6) A，B 两角相等当且仅当它们是同位角.

(7) 杜明是四川人当且仅当沈荣生于 1970 年.

解 在(1)—(4)中，设 p:$2+3=5$，q:$\sqrt{2}$是无理数.(1)—(4)分别符号化为 $p\leftrightarrow q$，$p\leftrightarrow\neg q$，$\neg p\leftrightarrow q$，$\neg p\leftrightarrow\neg q$.由于 p，q 的真值都是 1，因而 $p\leftrightarrow q$ 与$\neg p\leftrightarrow\neg q$ 两边的命题真值相同，

所以它们的真值均为1.而 $p\leftrightarrow \neg q$ 与 $\neg p\leftrightarrow q$ 两边命题的真值均相异,因而它们的真值均为0.

在(5)中,设 p: O_1,O_2 两圆面积相等,q: O_1,O_2 两圆半径相等.命题符号化为 $p\leftrightarrow q$,p 与 q 的真值要由 O_1,O_2 的具体情况而定,但 p,q 的真值相同(同真或同假),因而 $p\leftrightarrow q$ 的真值为1.而在(6)中,若设 p: A,B 两角相等,q: A,B 是同位角,命题也符号化为 $p\leftrightarrow q$.但是 p,q 的真值可以不同,因而 $p\leftrightarrow q$ 的真值要由 p,q 的具体情况而定.类似地,(7)的真值也要根据具体情况而定.

以上定义了5种联结词,组成一个联结词集 $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$,其中 $\neg$ 是一元联结词符,其余的都是二元联结词符.有时也称它们是逻辑运算符.可以规定这些运算符的优先级,本书中规定它们优先级的顺序为 $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$.如果出现的联结词符同级,又无括号时,按从左到右顺序进行运算;若遇有括号时,先进行括号中的运算.例如,$p\rightarrow q\wedge r\rightarrow s$ 与 $(p\rightarrow(q\wedge r))\rightarrow s$ 表达相同的逻辑关系,而 $p\rightarrow q\wedge r\rightarrow s$, $(p\rightarrow q)\wedge r\rightarrow s$, $(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)$ 表达的是互不相同的逻辑关系.

【例1.7】 将下列命题符号化并求真值.

(1) 如果3是合数,则4是素数,并且如果4是素数,则它不能被2整除.

(2) 如果 $2+3>5$ 当且仅当5是合数,则 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是有理数.

解 (1) 设 p:3是合数,q:4是素数,r:4能被2整除,则 p,q,r 的真值分别为0,0,1.命题符号化为 $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow \neg r)$,容易计算出它的真值为1.

(2) 设 p:$2+3>5$,q:5是合数,r: $\sqrt{2}$ 是有理数,s: $\sqrt{3}$ 是有理数.它们的真值分别为0,0,0,0.命题符号化为 $(p\leftrightarrow q)\rightarrow(r\wedge s)$,它的前件真值为1,后件真值为0,所以它的真值为0.

1.2 命题公式与赋值

在上节中,用 $p,q,r\cdots$ 表示确定的简单命题,通常称 $p,q,r\cdots$ 为**命题常项**或**命题常元**,将 $p,q,r\cdots$ 用 $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ 中的某些联结词符按一定的逻辑关系联结起来就是复合命题的符号化形式.简单命题和复合命题都有确定的真值.然而,在数理逻辑中不仅要研究具体的逻辑关系,而更主要的是研究抽象的逻辑关系.首先应对简单命题进行抽象.称真值可以变化的简单陈述句为**命题变项**或**命题变元**,也用 $p,q,r\cdots$ 表示.其实,命题变项 $p,q,r\cdots$ 均为取值0或1的变量.$p,q,r\cdots$ 表示的是常项还是变项应由上下文确定.应该注意的是,命题变项不是命题.

将命题常项和命题变项用联结词和圆括号按一定逻辑关系联结起来的符号串称为**合式公式**,当使用联结词集 $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ 时,合式公式定义如下.

定义1.6 (1) 单个的命题变项(或常项)是合式公式;

(2) 若 A 是合式公式,则 $(\neg A)$ 也是合式公式;

(3) 若 A,B 是合式公式,则 $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)形成的符号串才是合式公式.

合式公式也称为**命题公式**,简称**公式**.

在合式公式的定义中,引进了 A,B 等符号,它们代表任意的公式.在本书中以后出现的 A,B 等符号也均代表任意的公式,不再说明.另外,为方便起见,$(\neg A)$, $(A\wedge B)$ 等的外层括号均可以省去.

根据定义，$((p\wedge q)\vee r)\to s$，$p\to(q\to r)$，$(p\vee q)\wedge r$ 等都是合式公式，而 $p\wedge qr\to s$，$p\wedge q\wedge r)\to s$ 等均不是合式公式.

为了讨论公式的真值变化情况，首先给出公式**层次**的定义.

定义 1.7 (1) 若 A 是单个的命题变项或常项，则称 A 为 0 层合式；

(2) 称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指下列诸情况之一：

① $A=\neg B$，B 是 n 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

③ $A=B\vee C$，其中 B,C 的层次同②；

④ $A=B\to C$，其中 B,C 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 B,C 的层次同②；

易知，$((\neg p\to q)\wedge r)\vee s$ 与 $((p\wedge\neg q\wedge r)\vee s)\to(p\vee q\vee r)$ 分别为 4 层和 5 层公式.

在合式公式中，由于有命题变项出现，因而公式的真值是不确定的. 当将公式中出现的全部变项都解释成具体的命题之后，公式就成了真值确定的复合命题了.

【例 1.8】 给出下面公式两种不同的解释，一种解释使它为真，一种解释使它为假. 公式为：

$$(p\vee q)\to r.$$

解 (1) 将 p 解释成 2 是偶数，q 解释成 3 是偶数，r 解释成 $2+3$ 是偶数. 显然，p、q、r 的真值分别为 1,0,0，故 $(p\vee q)\to r$ 的真值为 0.

(2) p,q 的解释同(1)，将 r 解释成 $2+3$ 为奇数，则 $(p\vee q)\to r$ 的真值为 1.

一般情况下，设公式 A 中含 n 个命题变项，将每个命题变项都指定确定的真值 0 或 1，称为对 A 的赋值或解释. 严格定义如下.

定义 1.8 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在公式 A 中的全部**命题**变项，给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个**赋值**或**解释**. 若指定的一组值使 A 的值为 1，则称这组值为 A 的**成真赋值**. 若使 A 的值为 0，则称这组值为 A 的**成假赋值**.

本书中，含 n 个命题变项的命题公式的赋值形式做如下规定：

(1) 设 A 中含的命题变项为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$（$\alpha_i$ 为 0 或 1）是指 $p_1=\alpha_1,p_2=\alpha_2,\cdots,p_n=\alpha_n$.

(2) 若出现在 A 中的命题变项为 $p,q,r\cdots$，赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots$ 是指 $p=\alpha_1,q=\alpha_2,\cdots$，即按字典顺序赋值.

例如，在公式 $(\neg p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)$ 中，011（$p_1=0,p_2=1,p_3=1$），101（$p_1=1,p_2=0,p_3=1$）都是成真赋值，其余的赋值都是成假赋值. 在公式 $(p\wedge\neg q)\to r$ 中，011（$p=0,q=1,r=1$）为成真赋值，100（$p=1,q=0,r=0$）为成假赋值.

含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变项的公式 A 共有 2^n 个赋值. 将公式 A 在所有赋值之下取值情况列成表，称为 A 的**真值表**. 构造真值表的具体步骤如下：

(1) 找出公式中所含的全部命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$（若无下角标就按字典顺序给出），列出所有可能的赋值（2^n 个）；

(2) 按从低到高的顺序写出各层次；

(3) 对应各赋值，计算公式各层次的值，直到最后计算出公式的值.

【例 1.9】 求下列命题公式的真值表.

(1) $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$;

(2) $(p \rightarrow (q \vee p)) \vee r$;

(3) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$.

解

表 1.1　$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ 的真值表

$p\ \ q\ \ r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
0 0 0	1	0	1
0 0 1	1	0	1
0 1 0	0	0	1
0 1 1	0	0	1
1 0 0	1	1	0
1 0 1	1	1	1
1 1 0	0	0	1
1 1 1	0	0	1

表 1.2　$(p \rightarrow (q \vee p)) \vee r$ 的真值表

$p\ \ q\ \ r$	$q \vee p$	$p \rightarrow (q \vee p)$	$(p \rightarrow (q \vee p)) \vee r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	1	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	1	1

表 1.3　$\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$ 的真值表

$p\ \ q\ \ r$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \wedge q$	$\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	0	0	0

表 1.1—1.3 都是按构造真值表的步骤一步一步地写出的，这样构造真值表不容易出错. 如果比较熟练，有些层次可不列出. 由真值表可以看出，公式(1)的 8 个赋值中，除了 100 是成

假赋值外，其余的都是成真赋值．而(2)无成假赋值，(3)无成真赋值．根据公式在各种赋值下的取值情况，可将命题公式分为3类，定义如下．

定义 1.9 设 A 为一命题公式．

(1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真，则称 A 为**重言式**或**永真式**；

(2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假，则称 A 为**矛盾式**或**永假式**；

(3) 若 A 不是矛盾式，则称 A 是**可满足式**．

由定义可以看出，重言式是可满足式，但反之不真．用真值表可以判断公式的类型：若真值表的最后一列全为1，则公式为重言式；若最后一列全为0，则公式为矛盾式；若最后一列既有1又有0，则公式为非重言式的可满足式．在例1.9中，(1)为可满足式，(2)为重言式，当然也是可满足的，(3)是矛盾式．用真值表判断公式的类型方法简单易行，但当命题变项较多时，计算量大．在下两节中还要介绍其他方法．

1.3 等值演算

给定 n 个命题变项，按合式公式的形成规则可以形成无穷无尽多的命题公式，但在这些无穷无尽的公式中，有些具有相同的真值表．这些公式的真值表的最后一列只有有限种不同的情况．例如，$n=2$ 时，$p\to q$，$\neg p\lor q$，$\neg(p\land\neg q)$，$(p\to q)\land(\neg p\lor p)\cdots$，表面看来，它们具有不同的形式，但它们的真值是相同的，即在4个赋值00，01，10，11下，均有相同的真值，也就是它们的真值表的最后一列是相同的．对于任意的含 p,q 两个命题变项的公式来说，在以上4个赋值的每个赋值下，公式只能取值0或1，因而2个命题变项共可产生 $2^{2^2}=16$ 种不同的取值情况．一般地，n 个命题变项只能生成 2^{2^n} 个真值不同的公式．这就存在着如何判断哪些公式具有相同真值的问题了．设公式 A,B 均含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，若 A,B 具有相同的真值，则 $A\leftrightarrow B$ 的真值总为1，即 $A\leftrightarrow B$ 为重言式．下面给出 A 与 B 真值相同的严格定义．

定义 1.10 设 A,B 为二命题公式，若等价式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是**等值的**，记作 $A\Leftrightarrow B$．

在定义中，要注意符号"$\Leftrightarrow$"不是联结词符，它是 A 与 B 等值的一种记法．千万不能将$\Leftrightarrow$与$\leftrightarrow$或$\Leftrightarrow$与$=$混为一谈．

【例 1.10】 用真值表法判断下面二公式是否等值．

$\neg(q\to p)$与$\neg p\land q$．

解 用真值表法判断 $\neg(q\to p)\leftrightarrow(\neg p\land q)$是否为重言式，见表1.4．

表 1.4 $\neg(q\to p)\leftrightarrow(\neg p\land q)$的真值表

p q	$\neg p$	$q\to p$	$\neg(q\to p)$	$\neg p\land q$	$\neg(q\to p)\leftrightarrow(\neg p\land q)$
0 0	1	1	0	0	1
0 1	1	0	1	1	1
1 0	0	1	0	0	1
1 1	0	1	0	0	1

由于真值表的最后一列全为1，所以$\neg(q\to p)\leftrightarrow(\neg p\land q)$是重言式，即 $\neg(q\to p)\Leftrightarrow(\neg p$

$\wedge q)$. 从表 1.4 不难看出, $\neg(q\rightarrow p)\leftrightarrow(\neg p\wedge q)$ 为重言式, 当且仅当在各个赋值下 $\neg(q\rightarrow p)$ 与 $(\neg p\wedge q)$ 的真值均相同. 于是真值表最后一列可省去.

【例 1.11】 判断下列各组公式是否等值.

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$;

(2) $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$.

解 用简化真值表法解此题.

(1)

由表 1.5 可以看出, $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 的真值表相同, 因而它们是等值的, 即

$$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r.$$

表 1.5

p q r	$q\rightarrow r$	$p\wedge q$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$(p\wedge q)\rightarrow r$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	1	1
0 1 0	0	0	1	1
0 1 1	1	0	1	1
1 0 0	1	0	1	1
1 0 1	1	0	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	1	1	1	1

(2)

从表 1.6 可以看出, 000 与 010 使得 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 的真值不同, 因而 $(p\rightarrow q)\rightarrow r\not\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$, 此处 $A\not\Leftrightarrow B$ 表示 A 与 B 不等值.

表 1.6

p q r	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\rightarrow r$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow r$
0 0 0	1	0	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

可以用真值表法验证许多等值式, 其中有些是非常重要的, 它们是布尔代数或逻辑代数的重要的组成部分. 本书中给出 24 个重要等值式, 希望读者牢牢记住它们, 这是学习好数理逻辑的关键之一. 在下面的公式中, A,B,C 仍代表任意的命题公式.

1. 双重否定律

$A\Leftrightarrow\neg\neg A$.

2. 等幂律

$A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$.

3. 交换律

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

4. 结合律

$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

5. 分配律

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

6. 德·摩根律

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

7. 吸收律

$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

8. 零律

$A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$.

9. 同一律

$A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$.

10. 排中律

$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$.

11. 矛盾律

$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$.

12. 蕴涵等值式

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

13. 等价等值式

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

14. 假言易位

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.

15. 等价否定等值式

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$.

16. 归谬论

$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$.

以上给出的24个等值式是最重要、最基本的等值式.由它们可以推演出更多的等值式来.称由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程为**等值演算**.在等值演算中用基本等值式时需要注意以下两点.

1. 由于在公式中出现的 A, B, C 代表任意的命题公式,因而每个公式都是一个模式,它们中的每一个都可以对应无数个同类型的等值式.例如在11式中,A 用 p 代替,得等值式 $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$.$A$ 用 $p \rightarrow q$ 代替得等值式 $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow 0$.于是,矛盾律可以有无数种形式.其他的等值式也有类似情况.