

陀螺仪实用理论

[苏联]Б. В. 布尔加科夫著



国防工业出版社

內 容 簡 介

本书《陀螺仪实用理論》的作者是苏联力学领域中已故的著名学者B. B. 布尔加科夫通訊院士。第一版出版于1939年，被认为是陀螺仪实用理論方面的奠基性著作。

本书共分六章。前五章所討論的是具体問題，作者的意图是要給出陀螺导航仪以及其他陀螺裝置的实用理論。閱讀这些材料只需要具有一般理論力学課程的知識。第六章叙述基于准确方程的一般理論。

正文后有附录三篇，是出书后作者的一些科学論文，这些文章曾部分地发表于杂志中。附录1讲述形体軸繞动短軸的振动与陀螺理論中的常量变更法。这是作者博士論文中的一章。这篇論文曾引起許多关于陀螺仪、稳定性理論、振动理論、以及調节理論等的研究工作。附录2为陀螺仪表誤差的积累，附录3为关于动力陀螺地平仪的理論。

书末有参考文献的詳細目录。

本书适用于有关陀螺仪应用方面的工程师与科学研究人員閱讀。

陀 螺 仪 实 用 理 論

呂茂烈、秦泰信、孟鎮江、董秋泉、肖尙彬等譯

*

國防工業出版社 出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第 074 号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印張 11 280千字

1961年5月第一版 1964年7月第二次印刷 印数：5,601—6,650册

統一书号：15034·484 定价：(科八-1) 2,00元

陀螺仪实用理论

〔苏联〕B. B. 布尔加科夫著

吕茂烈、蔡泰信、孟镇江、董秋泉、肖尙彬等译



国防工业出版社

內 容 簡 介

本书〔陀螺仪实用理論〕的作者是苏联力学领域中已故的著名学者B. B. 布尔加科夫通訊院士。第一版出版于1939年，被认为是陀螺仪实用理論方面的奠基性著作。

本书共分六章。前五章所討論的是具体問題，作者的意图是要給出陀螺导航仪表以及其他陀螺裝置的实用理論。閱讀这些材料只需要具有一般理論力学課程的知識。第六章叙述基于准确方程的一般理論。

正文后有附录三篇，是出书后作者的一些科学論文，这些文章曾部分地发表于杂志中。附录1讲述形体軸繞勁矩軸的振动与陀螺理論中的常量变更法。这是作者博士論文中的一章。这篇論文曾引起許多关于陀螺仪、稳定性理論、振动理論、以及調节理論等的研究工作。附录2为陀螺仪表誤差的积累，附录3为关于动力陀螺地平仪的理論。

书末有参考文献的詳細目录。

本书适用于有关陀螺仪应用方面的工程师与科学研究人員閱讀。

陀 螺 仪 实 用 理 論

呂茂烈、秦泰信、孟鎮江、董秋泉、肖尙彬等譯

*

國防工業出版社 出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第 074 号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印張 11 280 千字

1961年5月第一版 1964年7月第二次印刷 印数：5,601—6,650册

統一书号：15034·484 定价：（科八-1）2,00元

目 录

第一版前言	4
引論	5
第一章 陀螺摆	16
第二章 傅科陀螺仪	93
第三章 无定位陀螺仪的应用	101
第四章 陀螺罗盘	112
第五章 直接式陀螺稳定器	199
第六章 以准确方程为依据的一般理論	220
附录 1	266
附录 2	332
附录 3	345
参考文献	350

第一版前言

作者的目的是和书名相一致，是討論陀螺导航仪表以及其他陀螺装置的工作原理。因此，这里不叙述剛体动力学的一般理論与經典的积分情形。在本书引論中仅給出了关于对称陀螺仪一般性质的知識，沒有这些知識是不可能建立实用理論的。其他一般性問題放在最后一章中。这种安排是为了便于那些希望尽快地讀到具体問題的讀者利用本书。

正文角上方括号中的数字是指书末文献目录中序号。在引用式子时，在同一章內仅指出它括号中的序号；在其他情形下則在式子的序号前还写上章次。

引 論

§1 高速自轉对称陀螺仪及其基本性质

設剛體的一點 O 用某種方式固定，而對於這點的慣性橢球是一個旋轉型橢球，則這剛體稱為对称陀螺仪。对称橢球的軸 Oz 稱為形体軸 (圖 1)。在技術應用上，為了保證陀螺仪能繞它的一個點自由轉動，常採用卡尔登支架。最簡單形狀的卡尔登支架 (圖 2) 是

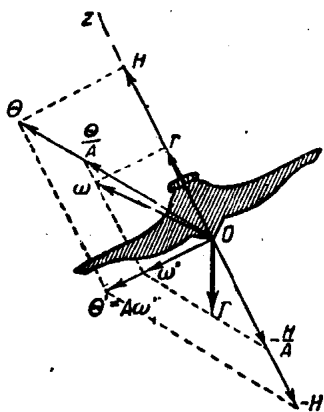


圖 1 对称陀螺仪。

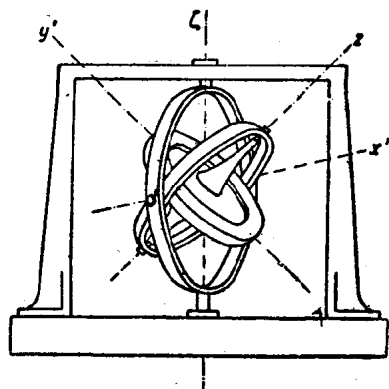


圖 2 在卡尔登支架上的陀螺仪。

由兩個環構成的，而且陀螺仪可以繞形体軸 x 相對於內環轉動，內環可以繞軸 x' 相對於外環轉動，而外環則可以繞軸 ζ 相對於固定底座轉動。軸 x' 既垂直於 x ，又垂直於 ζ ，而且所有這三根軸相交於一點，該點就是這裡的固定點。

由於慣性橢球是對稱的，任何通過點 O 並與 Oz 垂直的軸都是慣性主軸，而且陀螺仪對於所有這樣的軸的轉動慣量都是同一數值 A 。對於形体軸的轉動慣量用 C 代表。因為一般技術應用中的陀螺仪多少有些像圓盤，所以，對於它們來說， $C > A$ ，而慣

性橢球則是扁平的。陀螺儀繞支點 O 的運動，在每一瞬時都可看作以某一瞬時角速度 ω 所進行的轉動。我們把 ω 分解為沿着形體軸與垂直於形體軸的分量。第二個分量的長度用 ω' 代表，而第一個分量的代數值則用 r 代表；同時，軸 Oz 上第一分量所順沿的方向應儘可能取為正向。分量 ω' 可以認為是形體軸轉動的瞬時角速度，而 r 則是陀螺儀繞形體軸的自轉角速度。

陀螺儀的動矩（動量主矩） Θ 由分量 $\Theta' = A\omega'$ 與 $H = Cr$ 組成，前者具有與 ω' 相同的方向，後者則是沿着軸 z 。量 H 稱為陀螺儀的自轉動矩。

設 x, y 是兩根彼此垂直同時又垂直於 z 的軸，它們與後者組成了右手坐標系。如果 p, q 代表了矢量 ω' 在這兩軸上的投影，那末， $\Theta_x = Ap$ 與 $\Theta_y = Aq$ 就是 Θ' 的對應投影。顯然，三面角 xyz 本身的角速度在軸 x 與 y 上的投影也應當等於 p 與 q ，只是它在軸 z 上的投影 r' 一般並不等於 r ，因為軸系 x 與 y 可以繞軸 z 轉動。

根據動量矩定理，矢量 Θ 的端點的速度按大小與方向等於作用於陀螺儀的外力矩 M 。寫出軸 x, y, z 上投影形式的動矩方程時，我們應當考慮到這樣的事實：例如，沿着軸 x ，除表示投影 Θ_x 變化速度的導數 $\frac{d\Theta_x}{dt}$ 外，還有速度 qH 與 $r'\Theta_y$ ，產生這兩速度的原因分別是 H 以角速度 q 繞軸 y 的轉動與 Θ_y 以角速度 r' 繞軸 z 的轉動；上述三個速度之和應當等於 M 在軸 x 上的投影。對另外兩軸進行類似的討論，我們得到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Theta_x}{dt} + qH - r'\Theta_y &= M_x, \\ \frac{d\Theta_y}{dt} + r'\Theta_x - pH &= M_y, \\ \frac{dH}{dt} + p\Theta_y - q\Theta_x &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

應當指出，這些方程不只適用於對稱陀螺儀，對於慣性橢球不是旋轉型的剛體，也是正確的。如果把 Θ_x, Θ_y 用它們的值 Ap ,

● 角速度矢量總是認為沿着對應的軸，其指向應該使得沿此矢量而站立的觀察者看到的轉動是按逆時針方向進行的。關於力矩我們也遵從這一規則。

Aq 代入, 那末我們將得到仅适合于对称陀螺仪的方程:

$$\left. \begin{aligned} A\left(\frac{dp}{dt} - qr'\right) + Hq &= M_x, \\ A\left(\frac{dq}{dt} + r'p\right) - Hp &= M_y, \\ \frac{dH}{dt} &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

、与 Θ 端点的速度按大小相等方向相反的矢量, 是陀螺仪慣性力的主矩; 它是陀螺仪对于那些借以傳遞力矩 M 的外部物体的阻抗。

从方程 (2) 看到, 这慣性力矩的組成中包含了下列分量:

1) 力矩

$$-A\left(\frac{dp}{dt} - qr'\right), \quad -A\left(\frac{dq}{dt} + r'p\right),$$

它們与自轉 r 无关, 因而, 如果停止自轉, 使陀螺仪变成一个摆, 但与此同时迫使形体軸在每一已知瞬时占据和以前一样的位置, 那末这些力矩仍維持原值。所述这两力矩是由角速度 ω' 所决定, 它們是矢量 $\Theta' = A\omega'$ 之端点的迴轉速度的投影, 这速度垂直于軸 z 。

2) 由轉动 p, q 所引起的 H 端的迴轉速度

$$Hp, \quad -Hq;$$

它們的几何和 Γ 就是由轉动 ω' 所引起的 H 端的迴轉速度, 或者, 也可以这样說, 它是由轉动 ω 所引起的 (因为轉动 r 并不給予矢量 H 的端点以任何速度)。这力矩仅在出現自轉时才产生, 并表示了特殊的慣性阻抗, 它是陀螺仪当其形体軸方向改变时所产生出来的, 并称为陀螺力矩。从图 1 我們看到: 当陀螺仪以瞬时角速度 ω 轉动时所产生的陀螺力矩, 等于 $H\omega' = H\omega \sin(H, \omega)$, 垂直于包含自轉动矩 H 与矢量 ω 的平面, 并指向这样一边, 从这边看过去这力矩有使第一矢量趋向于与第二矢量相重合之势。

3) 分量

$$-\frac{dH}{dt} = -C \frac{dr}{dt}$$

它沿着軸 z , 表示陀螺仪对改变其自轉速度的慣性阻抗。

为了闡明在技术应用上有极其重要意义的陀螺力矩的概念，我們指出，如果要使上面所說明的沒有自轉的想像运动变回有自轉的真实运动，那末，除了那些为了产生自轉所必需的对于形体軸的力矩外，还应当附加主动力或新約束的反作用力矩来平衡所产生的陀螺力矩。举例說，这可以利用一些作用在形体軸上，并垂直于作用点之速度的力来实现，初看起来，这是令人惊异与出乎意料的。然而，可以用质点曲綫运动中所产生的离心力来作比拟，这种力也应当由垂直于速度方向而作用的主动动力或約束力来平衡。

作为例子，我們来考察飞机上因有轉动质量而引起的陀螺效应，这种效应在发动机为轉动式的情形下最为突出。如果螺旋桨有三叶或四叶，那末可把对称陀螺仪看作是轉动质量（在双叶的情形下問題較為复杂）。設螺旋桨是右旋的；自轉动矩矢量 H 是順着飞机纵軸而向前。向左轉弯（左盘旋）时，飞机获得的角速度矢量 ω 指向上方。陀螺力矩有使矢量 H 趋向于与矢量 ω 重合之势，因而它将迫使飞机头部仰起（爬高）。与此类似，右盘旋时，飞机有头部下沉（俯冲）的趋势；爬高时，飞机有向右轉的趋势，而俯冲时，则有向左轉的趋势。消除这种現象的唯一方法是靠适当的駕駛来平衡陀螺力矩。

在无数对可能有的 x, y 軸之中，只有一对軸 x^*, y^* 具有这样的性质：繞軸 z 的角速度 r' 等于零。或者說，如果在某一初始瞬时給定了这一对軸的方向，那末它們在任何已知瞬时的位置都可以单一地由下列条件决定，即：三面角 x^*y^*z 的全角速度按大小与方向等于矢量 ω' 。軸 x^*, y^* 称为无定位軸。可以設想用实物把这些軸被做成十字叉的形式，这十字叉具有一个套在形体軸上的絕对光滑的套筒。形体軸带着套筒运动，然而这时它不会傳給套筒任何力矩 M_z ，因而，如果十字叉連帶套筒的质量完全对称于軸 z ，那末，根据方程（2）中最后一式，它繞这軸轉动的角速度将是一个常量；如果开始时角速度等于零，那末这种情形将继续維持下去，因而軸 x^*, y^* 获得了所需的运动。分量 r 显然可以

看为陀螺仪相对于无定位轴系的转动速度。因为对于这些轴来说， $r' = 0$ ，所以，对应于它们的方程 (2) 写成了特别简单的形式，其中的摆惯性力矩是 $-A \frac{dp}{dt}$ ， $-A \frac{dq}{dt}$ 。

为了得到某些进一步的结论，我们不把瞬时角速度看为分量 ω' 与 r 的几何和，而把它按矢量 Θ 与形体轴的方向分解。为此，我们维持 r 不变而把矢量 ω' 沿这些方向分解。由图 1 上的三角形的相似关系可知，分解结果，所得分量是 $\frac{\Theta}{A}$ 与 $-\frac{H}{A} = -\frac{C}{A} r$ ；全角速度则分解为下列分量：

$$\mu = \frac{\Theta}{A}, \quad v = -\left(\frac{C}{A} - 1\right)r, \quad (3)$$

方向分别沿矢量 Θ 与形体轴。

在分解为分量 ω' ， r 时与分解为分量 μ ， v 时，陀螺仪绕形体轴的转动速度获得了不同的值。对于这一情况，如果作出几条据以计算对应转动所需的辅助轴，就不会再感到惊异了。这些辅助轴须彼此互相垂直，同时又垂直于轴 z 。在第一种分解中，这些轴本身具有角速度 ω' ，这是说，它们就是无定位轴；因此，对应于这轴系而计算出的转动角速度 r ，或许最有资格被认为是陀螺仪自转的度量。然而，如果我们作出在第二种分解时据以计算转动 v 所需的辅助轴系，那末这轴系将具有全角速度 μ ，它们和无定位轴系完全不相重合，而是与后者有相对角速度 $r' = \frac{H}{A} = \frac{C}{A} r = r - v$ 。

我们来考察一种特殊情形：陀螺仪上未作用任何外力矩。这时，矢量 Θ 之端点的速度等于零，因而这矢量本身的大小与方向都不改变。形体轴应以常角速度 $\mu = \frac{\Theta}{A}$ 绕这矢量迴转，所以，它与后者应组成不变的夹角 θ (图 3)。自转动矩 $H = \Theta \cos \theta$ ，因而 r 与 v ，也都是常量。这样，陀螺仪是在以常值角速度绕形体轴转动，而形体轴则与 Θ 的不变方向组成了不变夹角，并且还匀速地绕着它作圆锥运动；陀螺仪的这种运动称为规则进动。

因为瞬时角速度矢量 ω 与矢量 Θ 、形体轴 z 间的夹角都保

持不变，所以瞬軸在陀螺仪本体內与在固定空間所形成的几何軌迹，是两个各以 z 与 Θ 为軸綫的圓錐；如大家所知道的，它們分別称为本体极錐与空間极錐。陀螺仪內在已知瞬时处在瞬軸上的各点的速度等于零；因此，陀螺仪的运动可以想像为本体极錐在空間极錐上的无滑动的滚动。

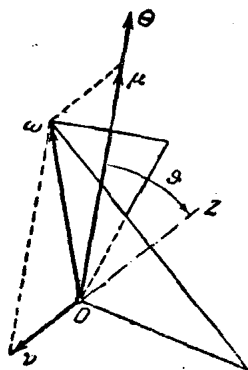


图3 規則进动。

在一般情形下，外力矩 M 并不等于零，因而矢量 Θ 将这样变化：它的端点的速度等于 M ，而形体軸則与以前一样，以角速度 μ 繞着 Θ 旋轉。可以认为，就是在这—情形里，也有形体軸的进动，但是唯一不同的是，矢量 Θ 的作用綫——它起着进动軸的作用并对应地称为动矩軸——将不再固定不动，而是仿佛一直在力求离繞之而旋迴的形体軸滑开。同时，「进动」这一术语，已不再适用于这种振动了。

把形体軸的运动有效地表示为由两种运动，即动矩軸的运动与形体軸相对于前者的振动所叠加而成，这一概念，主要是对于快速轉动的陀螺仪而言（这种陀螺仪在技术上是經常要遇到的），說得确切一点，是对于当自轉 r 远大于 ω' 时的一切运动而言。因为，当这一条件成立时，不难指出，形体軸繞动矩軸的振动表现为极其微小的抖动，对于实践來說，这种抖动是没有显著意义的。

事实上，动矩軸与形体軸之間的夹角 ψ 由下式决定：

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A\omega'}{Cr} \quad (4)$$

因为 A 与 C 普通是同一数級的量，所以 ψ 很小；如果考虑到技术应用中的陀螺仪通常是扁平的，对于它們 $C > A$ ，那末我們有 $\operatorname{tg} \psi < \frac{\omega'}{r}$ 。应当指明，这一結論主要是决定于軸 z 是一根慣性主軸，須知，如果它不是慣性主軸，动矩的赤道分量将与 r 有关，

因而不可能作出关于量 Ψ 的大小的一般性結論。

另一方面，当 r 很大时，形体軸繞动矩軸的轉动角速度也是与 r 同一数級的巨大数量：

$$\mu = \frac{\Theta}{A} = \frac{\sqrt{(A\omega')^2 + (Cr)^2}}{A} = \frac{C}{A} |r| \sqrt{1 + \text{tg}^2 \Psi}.$$

由于形体軸繞动矩軸振动的幅度很小，因此在陀螺仪实用理論中，往往不計及这些振动，而其基本問題則在于研究动矩軸的运动，把它看为形体軸本身运动的主要分量。

支配动矩軸运动的基本定理——动矩定理，可按下面方法(图4)表示为所謂进动規律，采用这一形式，有时十分方便。

因为矢量 Θ 的端点的速度按大小与方向等于外力矩 M ，所以它的垂直于动矩軸的分量等于外力矩的对应分量 M'' 。这速度 M'' 可以看作得自以角速度 Ω 的瞬时轉动，其关系式为 $M'' = \Theta\Omega$ 。

可見，作用于陀螺仪的外力矩 M 迫使动矩軸以瞬时角速度

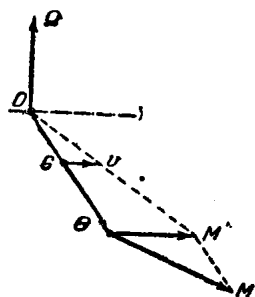
$$\Omega = \frac{M''}{\Theta} = \frac{M \sin(\Theta, M)}{\Theta} \quad (5) \quad \text{图4 进动規律。}$$

繞垂直于平面 Θ, M 的軸轉动；这轉动有使第一矢量 Θ 与第二矢量 M 重合的趋势。

也可以这样說，設取动矩軸上一点 G ，在矢量 Θ 的同一边，并与支点相距为一个长度单位，則此点具有綫速度 $v = 1 \cdot \Omega = \frac{M''}{\Theta}$ ，它平行于矢量 M'' 并与之具有同一方向。

在高速轉动的陀螺仪的情形下，它的角速度的軸向分量远大于赤道分量，因而从上面提出的观点来看，可以认为我們所建立的規律表明了形体軸本身的主要运动。

因为角速度 Ω （等于点 G 的綫速度）与动矩 $\Theta = C|r| \sqrt{1 + \text{tg}^2 \Psi}$ 成反比，所以，当其他条件相同时，自轉动矩越大，則动矩軸的轉动越慢。这种情况可以很好的由得自实验的下



列熟知事实来说明：高速轉动的陀螺仪对于作用于其上的干扰力具有极大的頑抗性（不順从性）。

現在，設点 E 是形体軸 z 的正向，并与支点相距一个长度单位。我們把这个点 E 称为陀螺仪的頂点（尖鋒）。

为了决定陀螺仪对于某一以陀螺仪支点 O 为原点的固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的位置，可以

采用大家所熟知的欧拉角（图 5）。可是，在技术应用中，采用与一般形式略有不同的这种方法的变种较为方便。前两个角度，我們采用了陀螺仪頂点 E 在以坐标原点为中心的单位球面上的經度 α 与緯度 β 。

角 α 是在平面 $\xi\eta$ 內按逆时针方向繞軸 z 計

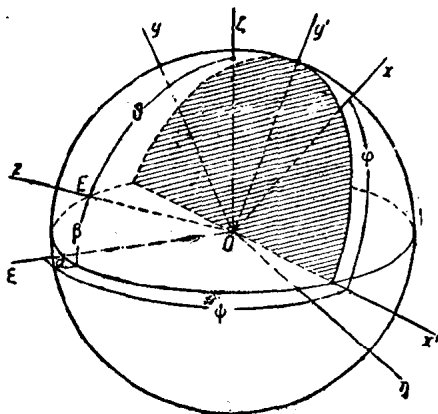


图 5 欧拉角。

量，由軸 ξ 出发量到軸 z 在平面 $\xi\eta$ 上的投影；角 β 是形体軸 z 与平面 $\xi\eta$ 所成的角度，以处在軸 ζ 正端一方为正。設 x, y 是陀螺仪赤道平面內某两根互相垂直，并与陀螺仪相固連的軸，它們与軸 z 組成了右手坐标系。此外，在赤道平面內另取一对軸 x', y' ，并稱它們为賴柴耳軸。这甲， x' 是平面 $\xi\eta$ 与 xy 的交綫，它的正向是这样規定的：使得观察者在这一端看来，可以看到由軸 ζ 到軸 z 的轉动是按逆时针方向进行的；軸 y' 垂直于軸 z 与 x' ，并与之組成右手坐标系。軸 x' 称为节綫，軸 y' 称为橫軸。角 φ 是在平面 xy 內計量的，由軸 x' 按逆时针方向繞軸 z 量至軸 x ，我們以这个角度作为决定陀螺仪位置的三个角度的最后一个。

軸系 x', y', z 与軸系 ξ, η, ζ 所成角度的余弦，列于下表：

	ξ	η	ζ
x'	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
y'	$-\cos \alpha \sin \beta$	$-\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \beta$
z	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$

(6)

如果取 ψ, θ 如图 5 所示, 并由关系式 $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha, \theta = \frac{\pi}{2} - \beta$ 与 α, β 相連系, 那末角 ψ, θ, φ 构成了一組参数, 普通称为欧拉角, 虽然欧拉本人取这些角度时稍有不同。

但是, 角 α, β 便于用来研究技术应用中所常遇到的、形体軸繞固定方向的微小振动, 这固定方向可取为軸 ξ 。角 α, β 两者应当都是小角。如果忽略它們的平方与乘积, 那末表 (6) 写成:

	ξ	η	ζ
x'	$-\alpha$	1	0
y'	$-\beta$	0	1
z	1	α	β

(7)

現在我們来求三面角 $x'y'z$ 的角速度。矢量 β 指向軸 x' 的負端, 而这軸 x' 則垂直于角 β 的平面。矢量 α 指向軸 ζ 的正端, 因此, 它在軸 y' 上的投影为 $\alpha \cos \beta$, 在軸 z 上的投影为 $\alpha \sin \beta$ 。这样一来, 賴柴耳軸系 $x'y'z$ 的全角速度在这些軸本身上的投影分别是:

$$p' = -\dot{\beta}, q' = \dot{\alpha} \cos \beta, r' = \dot{\alpha} \sin \beta. \quad (8)$$

因而方程 (2) 对于这些軸写成

$$\left. \begin{aligned} A(\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) + H\dot{\beta} &= M_{y'}, \\ A(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) - H\dot{\alpha} \cos \beta &= -M_{x'}, \\ \frac{dH}{dt} &= M_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这里自轉 r 是由矢量 ϕ (方向垂直于平面, 即是沿着軸 z) 与矢量 α 在軸 z 上的投影所合成, 即有:

$$H = Cr, \quad r = \dot{\phi} + \dot{\alpha} \sin \beta. \quad (10)$$

我們再来考察 α, β 是小角的情形, 得近似式

$$p' = -\dot{\beta}, q' = \dot{\alpha}, r' = 0 \quad (8a)$$

与

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_y', \\ A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= -M_x', \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$\dot{H} = M_z, \quad (9b)$$

且

$$H = Cr, \quad r = \dot{\phi}. \quad (10a)$$

§2 地面上的达尔布三面角

每一以陀螺仪支点 O 为原点的坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 都具有某种本身的运动, 当我们研究陀螺仪相对于这个坐标系的运动时, 应该知道这坐标系的运动。例如, 設坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 固連于地球, 則它将参与地球的轉动, 这运动是应当予以考虑的, 然而地球的平移运动則可忽略, 因为与之有关的加速度是极小的。如果陀螺仪是安装在沿地面运动的载体 (如船舶, 飞机) 上的, 那末还应当考虑这种运动。

設坐标原点 O 以某种方式沿地面运动。設軸 ξ, η 处在水平面內 (这我們将在下面說明), 軸 ζ 則鉛直向上。这样决定的三面角 $O\xi\eta\zeta$, 对于地面來說, 就是达尔布 (Darboux) 在曲面理論中所采用的三面角。我們用 u_1, u_2, u_3 代表三面角的瞬时角速度在軸 ξ, η, ζ 上的投影, R 代表地球半径, 并考察两种情形。

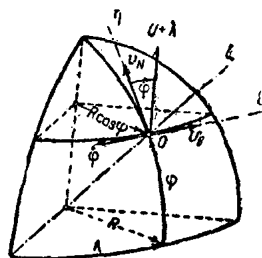


图6 按地理定向軸的
达尔布三面角。

1. 規定軸 ξ, η 的方向为 [地理] 方位的东与北 (图6)。如果 v_E 与 v_N 是载体相对于地球的速度向东向分量与北向分量, λ 与 φ 是經度与緯度, 那末显然有: $u_1 = -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R}$ 。从另一方面, 沿緯綫的速度 v_E 相当于使地球的角速度 U 增加一个数量 $\lambda = \frac{v_E}{R \cos \varphi}$ 。因为地軸的方向是与軸 η, ζ 組成角 $\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi$, 所以我們有:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R} = -\frac{V_N}{R}, \\ u_2 &= (U + \dot{\lambda}) \cos \varphi = U \cos \varphi + \frac{v_E}{R} = \frac{V_E}{R}, \\ u_3 &= (U + \dot{\lambda}) \sin \varphi = U \sin \varphi + \frac{v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi = u_2 \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{其中量} \quad V_E = RU \cos \varphi + v_E, \quad V_N = v_N \quad (12)$$

分别是载体绝对运动的速度的投影，
这绝对运动是由地球转动与载体沿地面所作相对运动两者的合成结果^②。

2. 规定轴 ξ , η 的方向分别沿载体相对于地面运动轨迹的球法线（即处在水平面上的法线，这水平面是地面的切面）与轨迹的切线（图 7）。

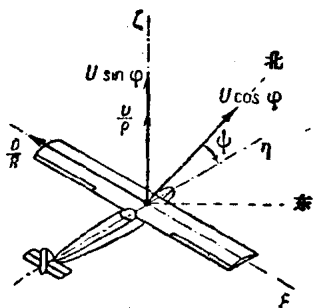


图 7 联在载体轨迹上的达尔布三面角。

我们用 v 代表载体相对于地球运动的速度， ρ 代表轨迹的测地曲率

（当左转弯时为正，右转弯时为负）， ψ 代表轴 η 对于子午线之北向切线的方位角。于是

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -U \cos \varphi \sin \psi - \frac{v}{R}, \\ u_2 &= U \cos \varphi \cos \psi, \\ u_3 &= U \sin \varphi + \frac{v}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

如果取恒星日 T_* 即地球作一整转的时间表示成平均太阳时间，那末

$$T_* = 23 \text{ 小时 } 56 \text{ 分 } 04.091 \text{ 秒} = 86164.091 \text{ 秒}; \quad (14)$$

对于上式中的角速度 U 得到公式：

$$U = \frac{2\pi}{T_*} = 7.2921158 \times 10^{-5} \text{ 1/秒} = 15''.041069 \text{ 1/秒} \quad (15)$$

地球的平均半径，即与地球大小相等的圆球的半径是

$$R = 6371.228 \text{ 公里}. \quad (16)$$

● 在§57中给出了考虑地球扁缩时导出的准确公式。