高等学校教学用書

材料力学
習題課指导

下　册

M. B. 盧宾宁著

高等教育出版社

高等学校教学用書

材料力学習題課指导

下册

M. B. 盧宾宁著
天津大学材料力学教研室譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國立机器制造書籍出版社（Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы）出版的 М. В. 盧宾寧（М. В. Рубинин）著"材料力学習題課指導"下册（Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов, часть II）1953年第二版增訂版譯出的。原書經苏联文化部前高等教育署審定作为高等工業学校教学参考書。

本書研究材料力学問題的解題方法和技術，可作机器制造高等学校学生作为材料力学理論教程的补充教材。

原書分为上下二册，中譯本亦分上下册出版。上册內容包括：支座反力，拉伸（压縮），扭轉，靜矩及慣性矩，点的应力狀态，等直梁的弯曲等六篇，共三十二章。下册內容包括：求彈性系統位移的能量法，靜不定系統，复雜应力狀态下的強度計算，薄壁容器，厚壁筒，各种弯曲，以及运动構件的应力計算等，共十四章。

参加下册翻譯的有嚴宗达（第一章）、蕭为（第二章）、苏翼林（第三章、第十一章及第十四章）、蔣靖（第四、五章）、畢学濤（第六章）、陈家征（第七章）、高瑞亭（第八章及第十三章一部）、沈繼芬（第九章）、楊慶齡（第十章及第十三章一部）、羨若愷（第十二章前半部）、楊海元（第十二章后半部）、賈有权（第十三章后半部）。校訂者为嚴宗达、苏翼林，最后審閱者为蔣靖國、嚴宗达及賈有权。

材料力学習題課指导

下　册

M. B. 盧宾宁著

天津大学材料力学教研室譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海市印刷三廠印刷　新華書店總經售

書號 15010·214　開本 850×1168 1/32　印張 11　字數 280,000

一九五六年十一月上海第一版

一九五六年十一月上海第一次印刷

印數 1—7,500　定價（10）¥1.60

作者的話

机械和机器制造各專業適用的材料力学普通教程各課題的研究在“材料力学習題課指導”下册就告結束了。

和上册一样，这本書的目的也在使学生容易学習和掌握这一門普通工程环節中最复雜的科目，使他慣於鑽研書本，發展他独立研究材料的熟練技巧。

在現在这第二版中，关於縱橫弯曲的一章大大的擴展了，並重新加了按極限平衡法來決定結構的承載能力一章。

在手稿的付印准备中，考慮了審閱意見和許多材料力学教研組以及几位个人所提意見中的批評和希望。对此書第二版的所有意見都可送交出版社，作者將非常感激。

下 册 目 錄

作者的話
第一章 求彈性系統位移的能量法……1
§ 1. 概論……1
§ 2. 能量法的理論基礎……1
§ 3. 虛功方程式的合理形式……7
§ 4. 求彈性系統位移时虛位移原理的利用……8
§ 5. 位移計算例題……10
§ 6. 按維力沙金法計算積分 $\int_0^l \overline{M} M_I \, dx$……11
§ 7. 弯矩圖的面積及重心計算的一些实际説明……16
§ 8. 例題……19
§ 9. 相对位移……26
§ 10. 相对位移計算例題……28
§ 11. 溫度位移……32
§ 12. 按 A. A. 波波夫的方法計算摩尔積分……34
§ 13. 習題……42
第二章 靜不定系統……44
§ 14. 一般概念及解題的基本观念……44
§ 15. 具有“多余”支座約束的系統……45
§ 16. 内部靜不定系統(閉合輪廓)……46
§ 17. 例題(内部“多余”約束;溫度的影响)……58
§ 18. 連續(多跨)梁……68
§ 19. 三力矩方程式的展开形式……70
§ 20. 例題……73
§ 21. 習題……82
第三章 在复雜应力狀态下的強度計算……84
§ 22. 机械試驗及構件強度的估計……84
§ 23. 在簡單(單向的)应力狀态下強度的估計……84
§ 24. 关於复雜应力狀态的概念……85

§ 25. 在复雜应力状态下強度的估計……85
§ 26. 相当微体，相当应力 σ_{9K8}……86
§ 27. 強度理論，相当性的条件，強度条件……87
§ 28. 例題……96
§ 29. 習題……125

第四章 薄壁容器……127

§ 30. 基本原理……127
§ 31. 容器中任意点的主应力……127
§ 32. 例題……130
§ 33. 習題……141

第五章 厚壁筒……143

§ 34. 基本原理……143
§ 35. 在筒中任意点上的主应力……144
§ 36. 例題……146
§ 37. 厚壁筒中的初应力……150
§ 38. 組合筒計算的例題……152
§ 39. 習題……158

第六章 曲桿的弯曲……159

§ 40. 基本原理……159
§ 41. 弯曲时的应力和变形公式……163
§ 42. 变形和应力的近似計算法……165
§ 43. 例題……167
§ 44. 習題……177

第七章 变断面梁的弯曲……178

§ 45. 概論……178
§ 46. 漸变断面梁……179
§ 47. 階形变断面梁……193
§ 48. 習題……206

第八章 縱向弯曲……207

§ 49. 結構平衡形式的穩定性……207
§ 50. 直桿的縱向弯曲，臨界力……207
§ 51. 欧拉臨界力值……208
§ 52. 許可压力之計算(按系数 φ 計算)……210
§ 53. 例題……212
§ 54. 習題……219

第九章　縱橫弯曲 …… 220
§55. 基本原理 …… 220
§56. 应力計算 …… 221
§57. 例題 …… 224
§58. 近似的計算方法 …… 229
§59. 例題 …… 231
§60. 習題 …… 233
第十章　运动構件的应力計算 …… 235
§61. 基本原理 …… 235
§62. 例題 …… 235
第十一章　力的冲击作用 …… 243
§63. 动荷重及其分类 …… 243
§64. 不考慮承受荷重物体的質量时变形的計算 …… 243
§65. 例題 …… 246
§66. 考慮承受荷重物体的質量时变形的計算 …… 251
§67. 例題 …… 254
§68. 習題 …… 261
第十二章　交变应力情形下的強度計算 …… 262
§69. 基本原理 …… 262
§70. 应力循环的特性 …… 262
§71. 強度特性 …… 263
§72. 影响構件強度的因素 …… 265
§73. 影响疲劳強度計算的各种因素的实际計算 …… 269
§74. 例題 …… 274
§75. 复雜受力狀态下的疲劳強度条件 …… 279
§76. 習題 …… 286
第十三章　桿件振动时的強度計算 …… 287
§77. 一般概念 …… 287
§78. 振动的形态．振动运动的性質 …… 287
§79. 基本假設 …… 289
§80. 自由度 …… 289
§81. 一个自由度的系統．例題 …… 290
§82. 多自由度的系統．例題 …… 299
§83. 軸旋轉的臨界速度 …… 306
§84. 确定自然頻率的近似解法 …… 314

§85. 習題 …… 323

第十四章 考慮材料塑性变形能力时強度的計算 …… 324

§86. 基本原理 …… 324

§87. 結構的危險(極限)狀态 …… 326

§88. 按照"危險"点的計算和按照極限平衡的計算 …… 326

§89. 按照極限平衡計算的效果 …… 328

§90. 例題 …… 330

§91. 按照極限平衡法厚壁筒的計算 …… 336

§92. 習題 …… 342

附錄 几种鋼的性質 …… 343

俄、英、中文度量衡單位符号对照表 …… 344

第一章　求彈性系統位移的能量法

§1. 概　論

当桿变形时其横断面即產生位移。此等位移可为線位移及角位移（断面轉动）。

断面的線位移在任意方向的投影簡称为断面沿該方向的位移，例如——水平或垂直位移。顯然，总的線位移可由其投影的几何和來得到。

求横断面的位移有很大的理論及实际的意义。不知道一个結構各断面的位移，就不可能判断它的剛度。此外，很多种类的問題，例如靜不定問題，荷重的冲击作用問題，振动問題，都需要会計算各种位移。

§2. 能量法的理論基礎

求位移的能量法適用於在任何外部影响（如荷重的影响，温度的影响）之下的所有彈性系統，因而可完全正确的被称为通法。此法是以虛位移原理的使用为基礎的。

我們看一下虛位移原理的定义：若本身互相約束的点系处於任何力作用之下並保持平衡，則此等力对点系的任意虛位移所作之功等於零；須注意，虛位移可以是任意的位移，但不能破坏系統中各个点間之約束。

所有固体均可視为許多本身互相約束的質点的集合。在平衡物体的一般情形，所有点均处於內力作用之下，此外，对其中某些点，尙作用

有外力。

由於物体的彈性变形，所有点均產生某种位移。此等位移並不破坏点与点間之約束，因为若去掉使物体变形之原因，則点的相互位置將可完全恢复。因此，按前述之虛位移的意义，物体各点之彈性位移卽可認为是虛位移。在此情形下可得結論：所有加於平衡物体各点之力(包括外力及內力)在各点的任意彈性位移上所作之功之和等於零[①]。

必須注意，我們所談到作功的力系及在其上作功的所有位移，可屬於物体上同一种荷重情况，或不同的兩种荷重情况。重要的僅在於此等荷重情况应为平衡的，而变形应为彈性的。下面的例題卽說明此原理。

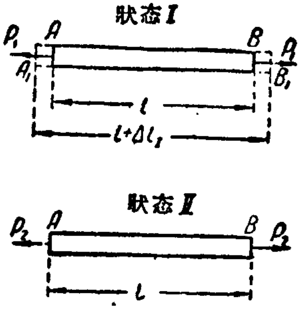

圖 1.

問題 1.

圖 1 中表示同一桿件在兩种不同荷重狀态之下。断面面積为 F，縱向彈性系数为 E。試証明荷重狀态 II 中之外力及內力在荷重狀态 I 中桿断面的位移上所作之总功等於零。

外力之功 力 P_2 是狀态 II 中之外力。其作用点(点 A 及 B)在第一种狀态中將因 P_1 之拉伸而產生位移，同时，此等位移將沿力 P_2 之方向。

$$A_{внеш}=P_2\cdot\overline{AA_1}+P_2\cdot\overline{BB_1}=P_2(\overline{AA_1}+\overline{BB_1})=P_2\Delta l_{\mathrm{I}}。$$

此处 Δl_{I} 为在狀态 I 中桿之伸長，因为我們僅考慮彈性变形，故

$$\Delta l_{\mathrm{I}}=\frac{P_1 l}{EF},$$

因而

$$A_{внеш}=P_2\frac{P_1\cdot l}{EF}。$$

① 此处，和在全書中其他各处一样，假設微小变形原理是正确的，卽假設实际的彈性变形極为微小，以至於在求反力及內力时，可仍用結構的未变形的簡圖。

内力之功　在桿拉伸的情形下，在各横断面上之内力均可化为一个合力——縱向（法向）力N。在狀态 II 中桿的断面上我們有

$$N_{\mathrm{II}}=\text{常数}=P_2。$$

为了計算分佈於整个結構上的内力之功，必須利用積分法：先計算長度为 dz 的單元体上之功，再对所得之式沿整个長度上進行積分。

在圖 2 中示出在兩种荷重狀态之下同一桿的單元体 $a—b—c—d$（圖2, a 及 a_1），以便計算此單元体在狀态 II 中產生之内力及在狀态 I 中断面 $a—b$ 及 $c—d$ 所作的相应位移。

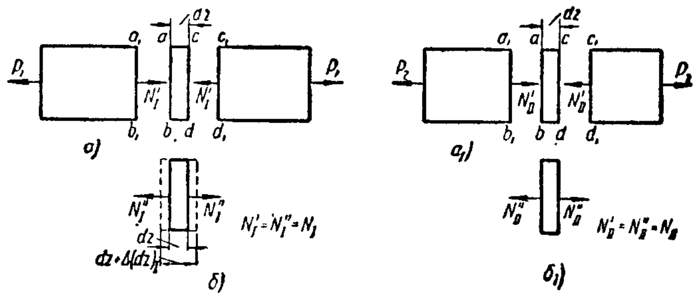

圖　2.

为了避免确定符号的錯誤，应注意，在圖2, $б_1$ 中力 N''_{II} 是桿的兩側对所研究單元体 dz 的作用，至於單元体本身之内力，我們將在圖2, a_1 中看到：力 N'_{II} 即为單元体 dz 对於与之相連接的桿的兩段的作用。

比較圖 2, a_1 及 2, $б$，可以看出，力 N'_{II} 及在狀态 I 中断面 $a—b$ 与 $c—d$ 之位移具有相反的方向，同时，此二断面的总位移等於單元体之伸長 $\Delta(dz)_{\mathrm{I}}$。在此种情形

$$dA_{внут}=-N'_{\mathrm{II}}\cdot\Delta(dz)_{\mathrm{I}}。$$

因
$$\Delta(dz)_{\mathrm{I}}=\frac{N''_{\mathrm{I}}dz}{EF},$$

故

$$A_{внут}=-\int_0^l N'_{II}\frac{N''_I\,dz}{EF}。\qquad (1.1)$$

代入 $N''_I=P_1$ 及 $N'_{II}=P_2$，得

$$A_{внут}=-\frac{P_2P_1}{EF}\int_0^l dz=-P_2\frac{P_1l}{EF}。$$

总功　狀态 II 中之力在狀态 I 中之位移上之总功將为

$$A=A_{внеш}+A_{внут}=P_2\frac{P_1l}{EF}-P_2\frac{P_1l}{EF}=0。$$

当然，这个結果正是如所預期的，因为狀态 I 中之位移对於狀态 II 中力的作用点而言是虛位移，而成平衡的各力在任意虛位移上之功等於零。

問題 2.

圖 3 表示同一桿件在兩种不同荷重狀态之下。断面对中性軸之慣性矩为 $J_{н.о}$，縱向彈性系数为 E。試証明狀态 II 中之力在狀态 I 中各断面之位移上之功等於零。

狀态 II 中之外力在狀态 I 之位移上之功　狀态 II 中之外力为

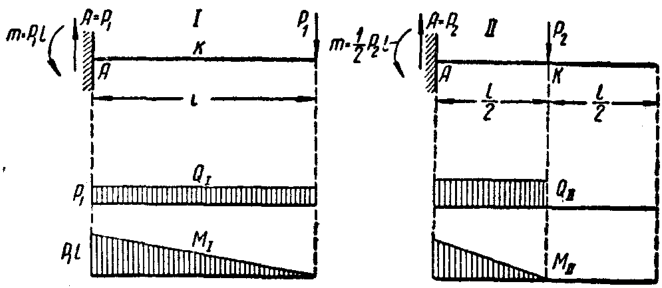

圖 3.

作用力 P_2 及支座反力：$A=P_2$ 与 $m=\frac{1}{2}P_2l$。

首先应注意，反力之功已知其等於零，因支座断面 A 旣無線位移

又無角位移①。

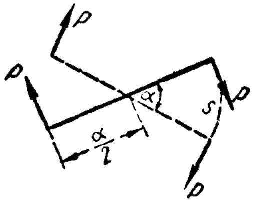

圖 4.

为了計算作用力 P_2 之功，应求桿在荷重狀态 I 之下断面 K 之垂直位移。現用解析法求此位移。对距支座距离为 z 之断面可得

$$M_{из}=-P_1l+P_1z,$$

故

$$EJy''=-P_1l+P_1z;$$

$$EJy'=-P_1lz+P_1\frac{z^2}{2}+C;$$

$$EJy=-P_1l\frac{z^2}{2}+P_1\frac{z^3}{6}+C\cdot z+D。$$

利用桿之固定条件，卽：(1)当 $z=0$ 时，$y'\approx\alpha=0$ 及 (2)当 $z=0$ 时，$y=0$，得 $C=D=0$。

故

$$EJy_к=-P_1l\frac{(0.5l)^2}{2}+P_1\frac{(0.5l)^3}{6}=-\frac{5}{48}P_1l^3。$$

我們得到断面 K 之位移是向下的，故 P_2 力之功將为正的：

$$A_{внеш}=P_2\frac{5}{48}P_1l^3\frac{1}{EJ_{н.о}}=\frac{5}{48}P_1P_2\frac{l^3}{EJ_{н.о}}。$$

狀态 II 中之內力在狀态 I 之位移上之功　桿的每一横断面上之內力可化为切力 Q_{II} 及弯矩 M_{II}。用計算可証明，力 Q 所作之功与弯矩所作之功相較通常甚为微小，故可略去不計②。

在圖 5, $б$ 及 $б_1$ 中表示在圖 5, a 及 a_1 的兩种荷重狀态之下桿的同一單元体 $a—b—c—d$；在狀态 II 中此單元体之內力卽为弯矩 M_{II}；在

① 力在線位移上作功而力矩在角位移上作功。后者可由圖 4 很好說明，圖中 $m=P\cdot a$ 表为力偶之形式，当力偶轉一角 α 时所作之功

$$A=2Ps=2P\frac{a}{2}\alpha=Pa\alpha=m\alpha。$$

② 提醒一下：在使用方程式 $y''=\frac{M_{из}}{EJ}$ 时，亦未考慮切力之影响。

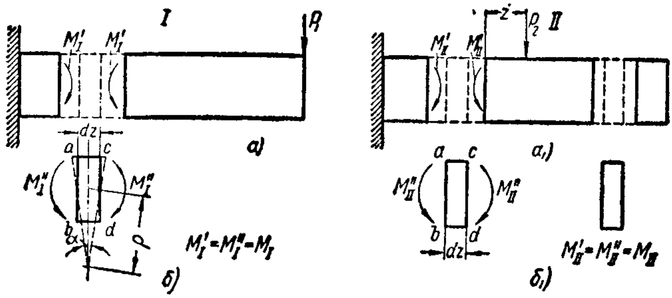

圖 5.

狀态 I 中与之相应的位移为断面 $a—b$ 与 $c—d$ 之轉角。力矩与轉角相乘卽得出功(見第 5 頁脚註及圖 4)。

在力矩与相应的轉角相乘之先,应該看一下二者的方向。須注意,在第二种狀态中單元体 dz 之內力並未表示在圖 5, $б_1$ 中(此处表示的乃是桿对單元体的作用),而在圖 5, a_1 中力矩 M'_{II} 卽为微体 dz 对於与之相連接的桿的兩段的作用。 比較圖 5, a_1 及圖 5, $б$, 我們知道力矩 M'_{II} 与断面 $a—b$ 及 $c—d$ 之轉角有相反的方向,因而

$$dA_{внут} = -M'_{II}\alpha_1 - M'_{II}\alpha_2。$$

此处 α_1 为断面 $a—b$ 之轉角, α_2 为断面 $c—d$ 之轉角。但由圖 5, $б$, 顯然,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

因而

$$dA_{внут} = -M'_{II}\alpha。$$

由該圖可見: $ds = \rho\alpha$, 此处 ρ 为中性纖維的曲率半徑, 又 $ds = dz$;

故 $$\alpha = \frac{dz}{\rho}$$

我們有 $$dA_{внут} = -M'_{II}\alpha = -M'_{II}\frac{dz}{\rho}。$$

現以 $\frac{1}{\rho} = \frac{M''_{I}}{EJ_{н.о}}$ 代入得

$$dA_{внут} = -M'_{\mathrm{II}} \frac{M''_{\mathrm{I}}\, dz}{EJ_{н.о}}。$$

此种情形下

$$A_{внут} = -\int_s M'_{\mathrm{II}} \frac{M''_{\mathrm{I}} dz}{EJ_{н.о}}。\qquad (1.2)$$

为了積分，必須將 M_{I} 及 M_{II} 以变量 z 表示(按条件 $EJ_{н.о}=$ 常数)。在我們情形下桿的右半段因 $M_{\mathrm{II}}=0$，故積分等於零，而对左半段在寫出 $M_{\mathrm{I}}=f_1(z)$ 及 $M_{\mathrm{II}}=f_2(z)$ 之表示式时，自桿之中点計算 z 較为方便。故 $M_{\mathrm{I}}=P_1(0.5l+z)$ 及 $M_{\mathrm{II}}=P_2\cdot z$

$$A_{внут} = -\frac{1}{EJ_{н.о}}\int_0^{\frac{l}{2}} P_2\cdot z\cdot P_1(0.5l+z)dz = -\frac{P_2P_1}{EJ_{н.о}}\cdot\frac{5}{48}l^3。$$

狀态 II 中之力在狀态 I 之位移上之总功

$$A = A_{внеш} + A_{внут} = \frac{5}{48}P_1P_2\frac{l^3}{EJ_{н.о}} - \frac{P_2P_1}{EJ_{н.о}}\cdot\frac{5}{48}l^3 = 0。$$

当然，此結果是如所預期的，因为我們研究的是平衡力系在虛位移上之功。

§3. 虛功方程式的合理形式

在上面研究的兩个例題中很明顯可以看到，若該系統在兩种狀态下的变形是同号的(在兩种情形下都是拉伸，在兩种情形都是凸边朝上的彎曲)，則在一种狀态下的外力在另一种狀态的位移上之功为正的，而內力之功为負的。反之，在兩种狀态下的变形如为異号的，則外力作負功而內力作正功。因而可寫出

$$\pm|A_{внеш}|\mp|A_{внут}|=0 \qquad (1.3)$$

或

$$|A_{внеш}| = |A_{внут}|。\qquad (1.4)$$

現在回想：若我們按圖 2 取

$$\int_0^l N'_{\rm II}\frac{N''_{\rm I}dz}{EF}$$

或按圖 5 取

$$\int_0^l M'_{\rm II}\frac{M''_{\rm I}dz}{EJ_{\text{н.о}}},$$

則我們得到狀态 II 中之內力在狀态 I 的位移上之功。

因为外力及內力之功在数量上相等而在符号上相反，故按圖 2 取

$$\int_0^l N''_{\rm II}\frac{N''_{\rm I}dz}{EF}$$

或按圖 5 取

$$\int_0^l M''_{\rm II}\frac{M''_{\rm I}dz}{EJ_{\text{н.о}}},$$

則我們得到外力之功，卽

$$A_{\text{внеш}}=\int_0^l N_{\rm II}\frac{N_{\rm I}dz}{EF} \tag{1.5}$$

或

$$A_{\text{внеш}}=\int_0^l M_{\rm II}\frac{M_{\rm I}dz}{EJ_{\text{н.о}}}。 \tag{1.6}$$

此处內力上角的附标取消了，这是由於它們的恆等性。

在一般情形，当結構的各断面上旣有弯矩又有法向力作用，並且各段有不同荷重时，应在每段內進行独立的積分，可寫为

$$A_{\text{внеш}}=\sum\int_0^{l_i} M_{\rm II}\frac{M_{\rm I}dz}{EJ_{\text{н.о}}}+\sum\int_0^{l_i} N_{\rm II}\frac{N_{\rm I}dz}{EF}。 \tag{1.7}$$

此式通常称为虛功方程式；此处如取相反的符号則右側卽表示內力之功。

应当着重指出上面寫法的方便处就是 $M_{\rm I}$ 及 $M_{\rm II}$ 所用之符号可按任意的，但对二力矩都是同一的符号規則來确定；此寫法同样適用於法向力 $N_{\rm I}$ 及 $N_{\rm II}$。

§ 4. 求彈性系統位移时虛位移原理的利用

某彈性結構在一种狀态下（卽在一种荷重情形下）之所有力（外力

及內力)在該結構各断面由任意其他荷重情况而生之位移上所作之功可以預知为零,此点可提供一个求位移的有力的方法。实際上,我們有連系同一系統的兩种荷重狀态的虛功方程式。因而,若方程式中有某一值为未知数时,則其值即可由此方程式求出。

应指出,我們恆可作到使所求之位移成为虛功方程式中的唯一未知数。

現在來求某一受有荷重的彈性系統之任意位移 Δ。已給的荷重狀态即为与虛功方程式有关的兩种荷重狀态之一;我們称之为狀态 I。狀态 II 我們可以自行規定,此处选擇(指荷重而言)是沒有任何限制的。我們在系統的狀态 II 中只是規定一个力,此力加在狀态 I 中的我們想求其位移之点上;我們选定此唯一力之方向(垂直,水平,傾斜)与所求位移 Δ 的方向一致,而把力之大小等於一个單位(若 Δ 为角位移則狀态 II 中之荷重將为一个等於一單位之力矩)。

在此种情形下,荷重狀态 II 中之外力在荷重狀态 I 的位移上之功可僅用一項表示(应注意,支座反力之功等於零):

$$A_{внеш}=1\cdot\Delta,$$

此处 1 即为所謂的"單位"力或"單位"力矩,而 Δ 为所求的位移。

此功亦可按照公式(1.7)以內力來表示:

$$A_{внеш}=\sum\int_0^{l_i}\overline{M}_{II}\frac{M_I dz}{EJ_{н.о}}+\sum\int_0^{l_i}\overline{N}_{II}\frac{N_I dz}{EF}$$

(上面的橫線是表示与"單位的"荷重狀态 II 有关各量的符号)。

因而,

$$1\cdot\Delta=\sum\int_0^{l_i}\overline{M}_{II}\frac{M_I dz}{EJ_{н.о}}+\sum\int_0^{l_i}\overline{N}_{II}\frac{N_I dz}{EF}。\tag{1.8}$$

在式(1.8)中唯一的未知数是位移 Δ。此式右側的積分常称为虛功積分或摩尔積分。

应注意,在既受有縱向力又受有弯矩作用的結構中,力 N 所作之