科學圖書大庫

HILBERT第十問題

譯者　李國偉　校閱　劉世超

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

HILBERT第十問題

譯者　李國偉　校閱　劉世超

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員

編輯人　林碧鑾　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十二年 七月 一 日初版

HILBERT第十問題

定價 ~~新台幣 10 元 港幣 2~~ 元

內[illegible]為基價 0.60 元

譯者　李國偉　美國北加羅林那州DUKE大學研究

校閱　劉世超　中央研究院數學研究所研究員

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱第3261號 電話783686號

發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鑾　郵政劃撥帳戶第15795號

印刷者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段151號　電話979739號

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再邀承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千册，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘册，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘册，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衞星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審愼從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘册，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尙需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，賡卽出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

序

一九七二年 J.R. Shoenfield 教授在 Duke 大學曾對 Hilbert 第十問題做了六次專題演講，這份講義就是以我當時記的筆記爲基礎所寫成的。但是論證發展的程序曾加以適當的更動，並且增補了許多細節。我寫這份講義的動機有二：

(一) Hilbert 第十問題是一個有意義又有趣味的問題，但七十年間有關的文獻散在各種刊物中，却不是每個人都能輕易接觸到的。Shoenfield 教授的處理法不僅系統明白，而且每一步驟幾乎都簡化爲初等數學的方法，即使對數學邏輯較陌生的人也不難了解，因此願寫成較完備的中文講義以供國內的朋友參考。

(二) 數學邏輯發展至今天，早已超出舊日所謂「討論思想法則」的範圍。事實上數學邏輯中的許多概念都逐漸成爲處理數學問題的重要工具。Hilbert 第十問題便是一個絕佳的例子：初等數學邏輯與初等數論的結合便解決了原來十分深奧的問題。願這份講義能幫助讀者體會到數學邏輯這種深刻的意義。

如果讀者想對講義中所應用的數學邏輯概念做進一步的認識，第六章中提到的幾本書都是最好的參考書籍。

謝謝劉世超先生校閱我的原稿並指正多處錯誤，同時願以此書的完成感謝劉先生最先爲我開啓邏輯學之門。

李 國 偉
謹識於 Duke 大學
民國六十一年七月二十日

目　錄

第一章 導 言

一九〇〇年，國際數學家會議 (International Congress of Mathematicians) 在法國巴黎召開，當時全世界公認最了不起的數學家 Hilbert 發表了一篇著名的演講提出了二十三個尚未解決的重要數學問題。Hilbert 說：「從探討這些問題中，吾人可預期科學的進展。」此處所謂科學當然主要是指數學本身。事實上。二十世紀初期數學的發展確實在多方面受到 Hilbert 問題的影響。但隨著時間的進行與數學內部許許多多新領域的開拓，數學家們對 Hilbert 的問題已不如最初那麼熱心了。尤其是大部分問題在不算太長的時間中都陸續解決掉，剩下的也就愈顯得不像是在現有的知識基礎上能解答了。

Hilbert 問題涉及的範圍十分廣，從數學基礎到理論物理的公設化；從凸體的簡單幾何性質到七次以上方程式根的形式；從李氏群到變分法；有關於分解有理系數有理函數爲平方和的問題；也有決定超越數或代數數的問題。其中絕大部分光問題的陳述都需要相當長的文字，只有第十問題的敍述出奇的簡短：

「10. 決定**戴氏方程式** (Diophantine Equations) 的可解性。

已知一戴氏方程式由任意個數未知元及整數係數構成，試求一方法於有限次運算之後，決定此方程式能否在整數中求得解。」

但這個問題却在 Hilbert 提出七十年後，方才由蘇俄青年數學家Matijasevič（原文：Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ）得到最後的解答。另外需要一提的是美國邏輯學家 J. Robinson 的研究成果對於此問題的解決有極重要的影響，Matijasenič 的解答是負面的，也就是說 Hilbert 所要求的方法是不可能存在的。本書就是要利用初等數學邏輯的觀念以及簡單的數論結果陳述Matijasevič 的論證。

第二章　遞迴可計數關係

Hilbert 第十問題可重述如下：

(H)　求一演算法 (algorithm) 決定已知戴氏方程式是否有整數解。

所謂戴氏方程式就是：

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_n)=0$$

其中 f 爲一整係數多項式。

事實上問題 (H) 等價於下面的簡化形式：

(HN) 求一演算法決定已知戴氏方程式是否有自然數解。

首先假設我們已有 (H) 中要求的演算法，則我們可用以決定已知戴氏方程式 $f(x)=0$ 是否有自然數解。這是因爲 $f(x)=0$ 有自然數解，若且唯若 $f(u^2+v^2+y^2+z^2)=0$ 有整數解：設若自然數 x 爲 $f(x)=0$ 的一解，由 Lagrange 的著名定理（參閱附錄一）x 可表爲四整數 u,v,y,z 的平方和，於是 $f(u^2+v^2+y^2+z^2)=0$ 有整數解；反之，若 u,v,y,z 爲 $f(u^2+v^2+y^2+z^2)=0$ 的整數解，則 $u^2+v^2+y^2+z^2\geqslant 0$ 便爲 $f(x)=0$ 的自然數解。

現設若我們已有 (HN) 中要求的演算法，則我們可用以決定已知戴氏方程式 $f(x)=0$ 是否有整數解。這是因爲 $f(x)=0$ 有整數解若且唯若 $f(x)=0$ 或 $f(-x)=0$ 有自然數解。

以上我們證明了當已知戴氏方程式僅有一未知元時 (H) 與 (HN) 是等價的。事實上用同樣的方法我們可知 (H) 與 (HN) 在一般情形中也是等價的。因此以下我們只要集中精神解決 (HN)，同時爲了簡單起見，下**文所謂戴氏方程式的解一概指自然數解**。並且除了特別聲明外，英文小寫字母 $a,b,c\cdots\cdots,x,y,z$ 一概用以代表自然數。

所謂 **n 元關係** P 便是一個由自然數的某些 n 重組構成的集合，當 $\langle x_1\cdots\cdots, x_n\rangle\in P$ 時，我們通常記爲 $P(x_1,\cdots\cdots,x_n)$.

倘若我們可覓得一演算法，每當 $x_1,\cdots\cdots,x_n$ 爲已知時便可決定 $P(x_1$

$, \cdots\cdots x_n)$為眞或為假，則我們稱P為一**可算關係**。

倘若我們能找到一演算法，每當$x_1, \cdots\cdots, x_n$為已知時：

(a) 若$P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$為眞，則此演算法告訴我們這件事實。

(b) 若$P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$為假，則此演算法繼續操作不停得不出任何結論。我們便稱P為一**半可算關係**。

已知一關係P，則可定義關係$\neg P$如下：

$$(\neg P)(x_1, \cdots\cdots, x_n) \leftrightarrow \neg P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

2.1 命題

(i) 每一可算關係均為半可算關係。

(ii) P是可算關係若且唯若P與$\neg P$均為半可算關係。

(iii) 存有非可算關係的一元半可算關係。

證明

(i) 由定義可知顯然成立。

(ii) 由P是可算關係的定義，可知$\neg P$亦為可算關係。由(i)可知P與$\neg P$均為半可算關係。反之現假設P與$\neg P$均為半可算關係，我們因而有演算法(A)與(B)來決定P與$\neg P$為半可算關係。現假設已知n重組$\langle x_1, \cdots\cdots, x_n \rangle$，我們用$(A)$ (B)創造一演算法來決定P為可算關係，其法如下：

$$\begin{tikzcd}
P(x_1, \cdots\cdots, x_n) & \neg P(x_1, \cdots\cdots, x_n) \\
(A)_{(1)} \arrow[r] & (B)_{(1)} \arrow[dl] \\
(A)_{(2)} \arrow[r] & (B)_{(2)} \arrow[dl] \\
(A)_{(3)} \arrow[r] & (B)_{(3)} \arrow[dl] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

第一步即為(A)演算$P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$的第一步。
第二步為(B)演算$\neg P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$的第一步。
第三步為(A)演算$P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$的第二步。
第四步為(B)演算$\neg P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$的第二步。

……………………………

如此往返，如上圖所示，因P與$\neg P$中必有且僅有一爲眞，由半可算關係的定義可知演算法$(A)(B)$中的一個必在有限步後得到結論，因此我們的往返演算法必在有限步後得到同樣結論，所以P爲一可算關係。

(iii) 所有決定一元半可算關係的演算法可排爲一序列$(A)_0$，$(A)_1$，$(A)_2$，…………。其法如下（校閱者對此有所註釋，見附錄五）：

每一特定的演算法均可用文字，數字與標點符號來描述。譬如我們用英文，阿拉伯數字及英文標點來描述演算法，則我們總共用的符號數目是有限的，我們可把這些符號依一定次序排列，稱爲**字母次序**。同時每一演算法可視爲由此等符號組成的有限長度序列，現在我們可把所有由此等符號組成的有限長度序列排成一序列：B_0爲空序列B_1到B_t爲所有一個元素的序列，依字母次序排列之。再次爲所有兩個元素的序列，如編字典法依字母次序排列，然後是三個元素的序列，………，所有決定半可算關係的演算法均將出現於上述的序列中，因此它們本身也可排爲一序列。

現定義二關係如下：

$P(n,k)\leftrightarrow$引用演算法$(A)_n$計算k可得到結論。

$Q(n)\leftrightarrow P(n,n)$

則Q爲一半可算關係。已知n，用$(A)_n$計算n。由Q的定義可知，若$Q(n)$爲眞則$(A)_n$在有限次後可得到此結論；若$Q(n)$爲假則$(A)_n$繼續操作不停，無法得到任何結果。

若我們能證明$\neg Q$不爲半可算關係，則由(ii)可推得Q不爲可算關係。

設若$\neg Q$爲半可算關係，則我們可找到某一演算法$(A)_k$來決定$\neg Q$的半可算性。於是對於所有自然數n，$\neg Q(n)$爲眞若且唯若引用$(A)_k$計算n時可得到結論。因此特別當$\neg Q(k)$爲眞若且唯若$(A)_k$計算k時可得到結論。但由Q的定義，上述的等價關係即爲$\neg Q(k)$爲眞，若且唯若$Q(k)$爲眞，顯然爲一矛盾。

已知關係P與Q，則可定義下列各關係：

$(P\vee Q)(x_1,\cdots\cdots,x_n)\leftrightarrow P(x_1,\cdots\cdots,x_n)\vee Q(x_1,\cdots\cdots,x_n)$

$(P\&Q)(x_1,\cdots\cdots,x_n)\leftrightarrow P(x_1,\cdots\cdots,x_n)\&Q(x_1,\cdots\cdots,x_n)$

$(\exists P)(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})\leftrightarrow(\exists y)P(y,x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})$

$(\forall_{\leqslant}P)(z,x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})\leftrightarrow(\forall y)(y\leqslant z\rightarrow P(y,x_1,\cdots\cdots,x_{n-1}))$

若Φ爲一由關係組成的集合，P爲Φ中任意一關係，假設Q有如下的定義：

$$Q(x_1, \cdots\cdots, x_n) \leftrightarrow P(x_{i_1}, \cdots\cdots, x_{i_k})$$

此處$i_1, \cdots\cdots, i_k$均由$1, \cdots\cdots, n$中取出，則$Q \in \Phi$，我們稱Φ**與變元無關**。

下面爲幾個可能的Q的定義法：

$$Q(x, y) \leftrightarrow P(y, x)$$
$$Q(x, y) \leftrightarrow P(x)$$
$$Q(x) \leftrightarrow P(x, x)$$

所有**遞迴可計數**(recursively enumerable，以下簡寫爲RE）關係組成的集合是滿足RE1）—RE3）的最小集合Φ：

RE1）Φ與變元無關；

RE2）$x=0$，$x=1$，$x=y$，$x+y=z$，$x \cdot y=z$諸關係均在Φ中；

RE3）若P與Q均在Φ中，則$P \vee Q$，$P \& Q$，$\exists P$，$\forall_{\leqslant} P$亦均在Φ中。

由以上的定義可知欲證集合Ψ包含了所有遞迴可計數關係，只需要證明Ψ滿足RE1）—RE3）。

2.2 命題，所有RE關係均爲半可算關係

證明：令Φ爲所有半可算關係組成的集合，我們要證明Φ滿足RE1）—RE3）：

RE1）顯然爲眞

RE2）也顯然爲眞，因爲我們從初等算術便知如何計算加法與乘法

RE3）可分別討論如下：

首先我們已擁有決定P與Q爲半可算關係的演算法（A）與（B），並且已知$x_1, \cdots\cdots, x_n$：

(i) 決定$P \& Q$的演算法可爲：先演算$P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$然後演算$Q(x_1, \cdots, x_n)$。

(ii) 決定$P \vee Q$的演算法可用命題（2.1）中的往返法，如圖示：

$$\begin{tikzcd}
P(x_1,\cdots\cdots,x_n) & Q(x_1,\cdots\cdots,x_n) \\
(A)_{(1)} \arrow[r] & (B)_{(1)} \arrow[dl] \\
(A)_{(2)} \arrow[r] & (B)_{(2)} \arrow[dl] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

(iii) 決定$\exists P$的演算法可用圖示的對角線往返法：

$$\begin{tikzcd}
P(0,x_1,\cdots,x_{n-1}), & P(1,x_1,\cdots,x_{n-1}), & P(2,x_1,\cdots\cdots x_{n-1}) & \\
(A)^0_{(1)} \arrow[d] & (A)^1_{(1)} \arrow[r] & (A)^2_{(1)} \arrow[dl] & \\
(A)^0_{(2)} \arrow[ur] & (A)^1_{(2)} \arrow[dl] & (A)^2_{(2)} \arrow[r] & {} \\
(A)^0_{(3)} \arrow[d] & (A)^1_{(3)} \arrow[ur] & (A)^2_{(3)} & \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

其中$(A)^i_{(j)}$，指演算法(A)用以計算$P(i,x_1,\cdots\cdots x_{n-1})$時的第$j$步。

(iv) 決定$\forall\leqslant P$的演算法可用下法：第一階段用(A)演算$P(0,x_2,\cdots\cdots,x_n)$，第二階段用$(A)$演算$P(1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$，……，第$x_1+1$階段用$(A)$演算$P(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$。

讀者可輕易驗證(i)－(iv)中諸演算法確實可決定$P\vee Q$，$P\&Q$，$\exists P$，$\forall\leqslant P$的半可算性。

到目前爲止，我們雖已知道若干關於可算關係與半可算關係的性質，但是我們並未淸楚定義決定這些關係的演算法，因此我們所有的論證只是基於我們對演算法的直覺了解。但是RE關係却有明確的定義，才算是眞正的數學對象。由命題(2.2)我們可知這類數學對象已包含在基於直覺的半可算關係中，因此要使半可算關係成爲數學對象，我們可斷然認定所有半可算關係均爲RE關係，這就是

Church學說： 關係P爲半可算關係若且唯若P爲RE關係。

關於 Church 學說的本質在最後一節中還要加以說明。

第三章　戴氏關係及Matijasevic定理

我們稱關係P爲**戴氏關係**若P有如下的定義：

$$P(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow(\exists y_1)\cdots(\exists y_k)(f(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k)=0)$$

其中f爲一多項式。

下列爲一些重要的戴氏關係：

$$x\leqslant y\leftrightarrow(\exists z)(x-y+z=0)$$
$$x<y\leftrightarrow(\exists z)(x-y+z+1=0)$$
$$x\geqslant y\leftrightarrow(\exists z)(-x+y+z=0)$$
$$x>y\leftrightarrow(\exists z)(-x+y+z+1=0)$$
$$x\mid y\leftrightarrow(\exists z)(x\cdot z-y=0)$$
$$x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ z)\leftrightarrow(\exists w)(w^2z^2-x^2+2xy-y^2=0)$$

如果我們能找到問題(HN)中的演算法，則所有戴氏關係均爲可算關係，因此要得到Matijasevič的結果，我們必須證明存有非可算關係的戴氏關係。已知存有非可算關係的半可算關係，而半可算關係即爲RE關係，因此要達到上述的目的，我們只需證明下一定理：

3.1 **定理**(Matijasevič)，所有RE關係均爲戴氏關係

證明：令Φ爲所有戴氏關係構成的集合，我們要證明Φ滿足RE1)－RE3)

RE1)：設P爲一戴氏關係。

$$\begin{aligned}Q(x_1,\cdots\cdots,x_n)&\leftrightarrow P(x_{i_1},\cdots\cdots,x_{i_k})\\&\leftrightarrow(\exists z_1)\cdots(\exists z_l)(f(x_{i_1},\cdots\cdots,x_{i_k},z_1,\cdots\cdots,z_l)=0)\end{aligned}$$

$$\leftrightarrow (\exists z_1)\cdots(\exists z_l)(g(x_1,\cdots\cdots,x_n,\ z_1,\cdots\cdots z_l)=0)$$

其中$i_1,\cdots\cdots,i_k$取自$1,\cdots\cdots,n$，f爲定義P的多項式，因變元$x_{i_1},\cdots\cdots,x_{i_k}$均在變元$x_1,\cdots\cdots,x_n$中出現，所以，$f$可看爲由變元$x_1,\cdots\cdots,x_n,z_1,\cdots\cdots,z_l$構成的多項式$g$，由此得證$Q$亦爲爲戴氏關係，也就是說$\Phi$與變元無關。

RE2):顯然成立。

RE3): 設P與Q均爲戴氏關係。

(i)　$\exists P$可輕易證得爲戴氏關係。

(ii)　$(P\vee Q)(x_1,\cdots\cdots,x_n)\leftrightarrow P(x_1,\cdots\cdots,x_n)\vee Q(x_1,\cdots\cdots,x_n)\leftrightarrow(\exists y_1)\cdots(\exists y_r)(f(x_1,\cdots\cdots,x_n,y_1,\cdots\cdots y_r)=0)\vee(\exists z_1)\cdots\cdots(\exists z_s)(g(x_1,\cdots\cdots,x_n,z_1,\cdots\cdots z_s)=0)\leftrightarrow(\exists y_1)\cdots(\exists y_r)(\exists z_1)\cdots\cdots(\exists z_s)(f(x_1,\cdots\cdots,x_n,y_1,\cdots\cdots,y_r)=0\vee g(x_1,\cdots\cdots,x_n,z_1,\cdots,z_s)=0)$

$\leftrightarrow(\exists y_1)\cdots(\exists y_r)(\exists z_1)\cdots\cdots(\exists z_s)(f(x_1,\cdots\cdots,x_n,y_1,\cdots\cdots,y_r)\cdot g(x_1,\cdots\cdots,x_n,z_1,\cdots\cdots,z_s)=0)$

其中f與g分別爲定義P與Q的多項式，而上面一系列等價關係的成立是因爲Φ與變元無關，於是可爰用量詞前置運算法(參閱附錄二)。

(iii)同法可知

$(P\&Q)(x_1,\cdots\cdots,x_n)\leftrightarrow(\exists y_1)\cdots\cdots(\exists y_r)(\exists z_1)\cdots\cdots(\exists z_s)((f(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots\cdots,y_r))^2+(g(x_1,\cdots,x_n,z_1,\cdots\cdots,z_s))^2=0)$

3.2 主要引理: 若P爲戴氏關係，則$\forall_{\leqslant}P$亦爲戴氏關係

我們將在第五章中證明主要引理(3.2)，於是定理(3.1)因而得證

第四章　戴氏關係的三個引理

為了證明主要引理（3.2），我們需要三個重要的引理，在敘述這三個引理之前，先定義一些概念。

所謂 **n 元函數**即為由自然數 n 重組的集合到自然數的映像，以後所謂**函數**均為某 n 元函數的簡稱。

若函數 F 滿足

$$F(x_1, \cdots\cdots, x_n) = y$$

為變元 $x_1, \cdots\cdots, x_n, y$ 的戴氏關係，則我們稱 F 為一**戴氏函數**。顯然多項式所定義的函數均為戴氏函數。

令 $a \geqslant 1$ 為一固定的自然數，我們稱一序列 $\{x_n\}$ 為**關於 a 的正規序列**（簡稱**正規序列**），若

$$x_{n+2} = 2a\,x_{n+1} - x_n$$

注意：

(i) 對於任意自然數 u, v，均存有唯一的正規序列由 u, v 開始，也就是說有正規序列 $u, v, \cdots\cdots$。

(ii) 正規序列的線性組合仍然為正規序列。

(iii) 將一正規序列的頭 k 項丟掉，剩下的仍然是一正規序列。

由 (i) 可知存有唯一的正規序列由 $0, 1$ 開始，稱此序列為 $\{y_m(a)\}$，並在 a 給定時，簡寫 $y_m(a)$ 為 y_m。並定義 $y_m(a) = 0$ 若 $a = 0$.

4.1 **引理** (Matijasevič, 1970) $y_m(a)$ 是變元 m 與 a 的戴氏函數。

4.2 **引理**(J. Robinson, 1952) z^n 是變元 z 與 n 的戴氏函數。

4.3 **引理**(M. Davis, H. Putnam, J. Robinson, 1961) $\prod_{n=1}^{k}(x+ny)$ 是變元 x, y, k 的戴氏函數。

本章中我們要證明由引理(4.1)可推得引理(4.2),由引理(4.2推得引理(4.3),在第五章中我們將證明引理(4.1)。

下面一個定理將幫我們大量減化戴氏關係與戴氏函數的定義法:

4.4 **定理**:若關係 P 的定義法為

$$P(x_1, \cdots\cdots, x_n) \leftrightarrow \_\_\_\_$$

其中"____"可能包含有變元常數&,$\vee$,$\exists$,戴氏函數與戴氏關係,則 P 為一戴氏關係。

證明:如果"____"中出現常數 c,則我們可用常數函數 $f(x_1, \cdots\cdots, x_n) = c$ 取代,我們知道常數函數均為戴氏函數。

如果"____"中出現戴氏函數 F,我們知道

$$R(x_1, \cdots\cdots x_n, y) \leftrightarrow F(x_1, \cdots\cdots, x_n) = y$$

為一戴氏關係,則可將

$$\_\_\_\_\_\_ F(A_1, \cdots\cdots, A_n) \_\_\_\_$$

改寫為

$$\_\_\_\exists_y(R(A_1, \cdots\cdots, A_n, y) \,\&\, \_\_\_y\_\_\_)\_\_$$

如此變形後的關係仍與原有的"____"等價。

由上面的論證我們把定理簡化到"____"中只含變元,&,$\vee$,$\exists$ 與戴氏關係的情況。

現用歸納法於"____"的長度,以證明定理的簡化形。

當"____"長度為1時,它必為 $R(x_{i_1}, \cdots\cdots, x_{i_k})$,$R$ 為一戴氏關係,由RE1)可知 $P(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ 為一戴氏關係。

若"____"為"$\underset{1}{\_\_\_} \,\&\, \underset{2}{\_\_\_}$",或為"$\underset{1}{\_\_\_} \vee \underset{2}{\_\_\_}$",則由歸納法假設與RE3,可知"____"為戴氏關係。