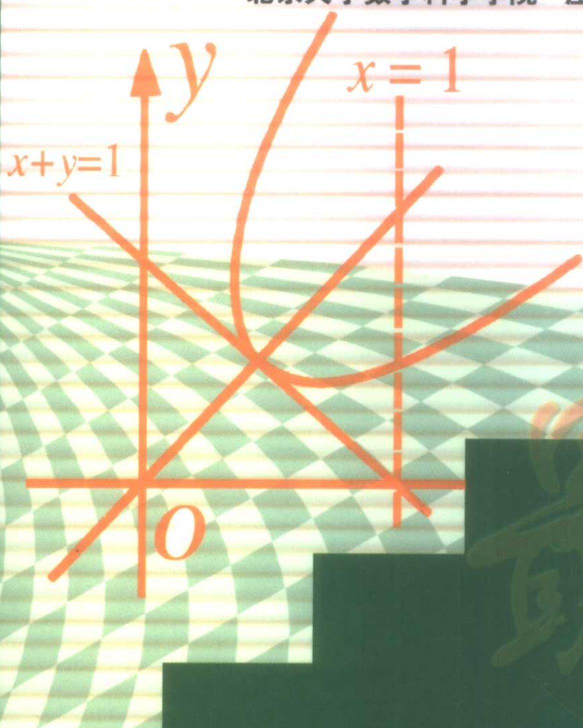
新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

高等数学学习指导

同济五版

高等数学教学与命题研究组　　编
北京大学数学科学学院　庄大蔚　　主审



最新

中国林业出版社

新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

高等数学学习指导

(同济五版)

高等数学教学与命题研究组　编
北京大学数学科学学院　庄大蔚　主审

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/高等数学教学与命题研究组编. - 北京:中国林业出版社,2003.1

ISBN 7-5038-3190-1

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064231 号

高等数学教学与命题研究组

主编: 罗爱兵

编写: 赵修坤 吴娟香 罗爱兵 阳碧云

主审: 庄大蔚

出版 中国林业出版社(100009 北京西城区刘海胡同 7 号)

E-mail cfphz@public.bta.net.cn 电话 66184477

发行 中国林业出版社

印刷 北京林业大学印刷厂

版次 2003 年 1 月第 1 版

印次 2003 年 1 月第 1 次

开本 850mm×1168mm 1/32

印张 15.875

字数 410 千字

印数 1~5 000 册

定价 18.80 元

前言

高等数学是我国高等院校中的一门重要的理论基础课程。它不仅是学习理工科后续课程及在科学领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对学生其他能力的培养也有着重要的作用。如何更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，以及如何帮助学生有效地备考，成为各院校共同关注的问题。

为了配合各院校高等数学的教学与学生的复习、备考，我们依托北京大学等高校强大的师资力量，根据高等学校数学教学大纲以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)的严谨结构组织编写了本书。全稿由北京大学数学科学学院庄大蔚教授主审。

本书的编写特点如下：

(1)本书为高等院校本科、专科、专升本及其他各类在校学生学习高等数学这门课程的同步辅导用书，亦可作为参加自学考试、考研前的复习指南。

(2)本书以图表形式列出了每一章的学习要点和基本知识点及它们之间的相互关系，使读者一目了然，从而对每一部分的内容进行系统掌握。

(3)本书的每一章，不仅涵括了内容与考点、解题方法和常考题型，还特别为读者指出了学习的重点与难点，并对在学习过程中易犯的错误进行了分析，能帮助学生举一反三地掌握这门课程。

(4)本书精心选择例题，按类编排，对各种常考题型及解题思路、方法和技巧进行了详细的分析、总结和归纳，并用专题指导、单独成章的形式对重点进行讲解，使读者能在学习过程中少走弯路。

(5)作为高等数学这门课程的同步辅导，本书为读者精选了大量有针对性的同步测练与提高习题，并按教学计划与进度编排了期中、期末

两种阶段测试题，便于学习者进行阶梯式的自我检测。所有习题难度由低到高，解析由浅入深，注意照顾到不同水平层次的学生。

(6)作为高等数学这门课程的备考指南，本书各章分类编选了近年来相应的考研真题(包括最新真题)并加以解析，还精心组编了若干套全真型考研预测试题，使读者能真正地、全面地衡量自己对这门课程的掌握程度，并对全国硕士研究生入学考试数学试题的形式和难度有一定了解，也便于立志考研的读者有针对性地进行复习和备考。

(7)参加本书编写的编者均为一线教师，具有丰富的教学经验，因此在编写技巧指导和例题讲解等方面均由浅入深、循序渐进且在难度上层次分明，切合不同学习者的实际需要。

在本书的编写过程中，尽管我们精益求精，但由于水平有限，书中难免仍存在不妥或需商榷之处，恳请读者指教。

高等数学教学与命题研究组

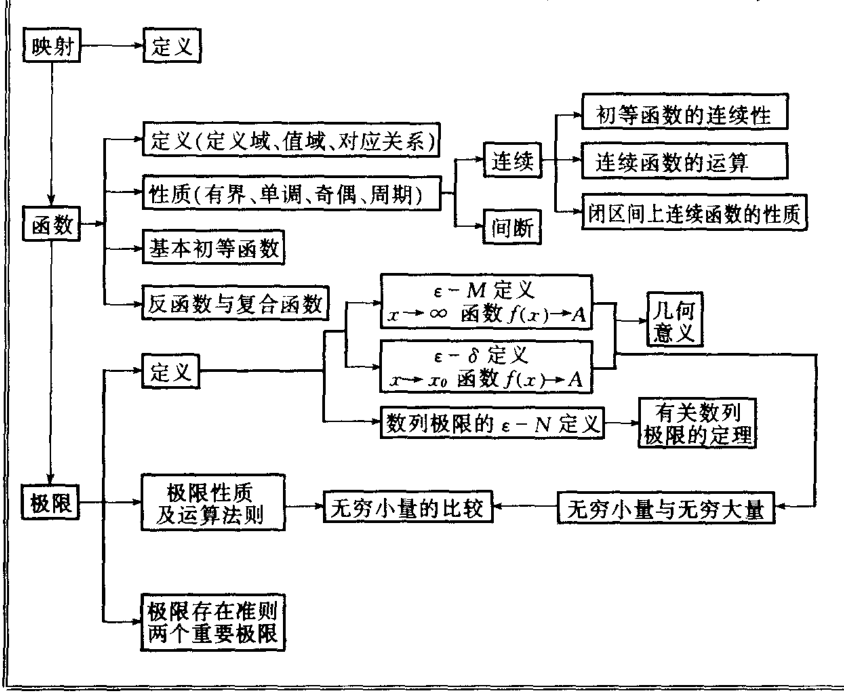
2003年1月

目录

第一章　函数与极限

映射、函数、极限和连续是高等数学的几个最基本的概念，求极限的运算也是高等数学的基本运算之一．为进一步加深对这些概念的理解，本章首先复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数．然后通过典型例题的分析与讨论，介绍求极限、讨论函数连续性的一般方法和一些常用技巧，以及如何利用函数的连续性的性质证明一些命题，为以后各章的学习打下坚实的基础．

〔本章内容总框图〕



第一节　函　数

目的与要求

1. 理解映射、函数的概念，掌握函数的两个基本要素，会求函数的定义域．
2. 掌握函数的单调性、有界性、周期性和奇偶性，并会讨论这些性质．
3. 了解反函数和复合函数的概念，能熟练分析复合函数的复合过程．
4. 熟悉基本初等函数的性质和图形．
5. 了解分段函数的概念，并能画出简单分段函数的图形．
6. 会分析简单实际问题（如几何与物理问题）中的变量关系，建立函数关系．

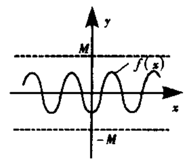
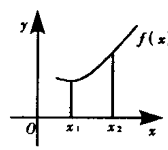
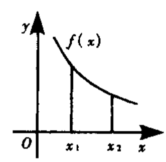
内容与考点

表 1.1.1　函数及相关的概念

名称	定　义	要点	补充说明
映射	设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f: X \to Y$，其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$，而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$	映射应具备三要素；同时应注意像是惟一的，原像不一定惟一	只有单射撑存在逆映射
一一映射	设 $f(x)$ 在 D 上定义，$\forall x_1, x_2 \in D$，若由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$，或由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是一一映射的		不同的 x 对应不同的 y

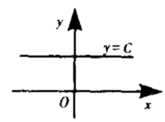
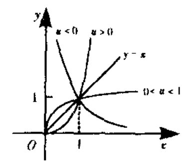
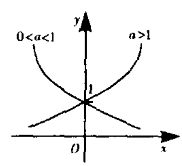
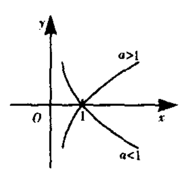
名称	定　　义	要点	补充说明
函数	设数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y = f(x), x \in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$	对应法则；定义域	高等数学中讨论的函数是单值函数，遇到多值函数一般把其分为若干个单值函数
函数的图形	平面上点集 $C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		并非所有的函数都有图形．例如狄利克莱函数：$D(x) = \begin{cases} 1,(x \text{ 为有理数}) \\ 0,(x \text{ 为无理数}) \end{cases}$ 没有图形
复合函数	设函数 $y = f(x)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 D 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$，称为 g 与 f 的复合函数，记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \circ g$	对应法则；定义域；值域	结合律成立：$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ 但交换律不成立，即 $f \circ g \neq g \circ f$
反函数	设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数		$y = f(x)$ 为直接函数，$x = f^{-1}(y)$ 为反函数
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数	两个有限次	
函数的运算	设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 $D_1, D_2, D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算： 和(差) $f \pm g: (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad (x \in D)$ 积 $f \cdot g: (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (x \in D)$ 商 $\frac{f}{g}: (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\})$		

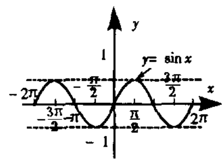
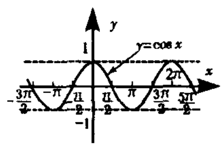
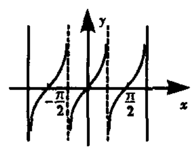
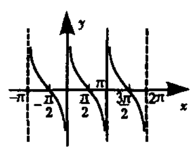
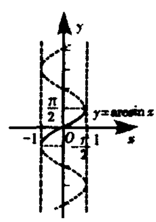
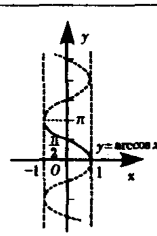
表 1.1.2　函数的几种特性

性质		定　　义	图例或说明
有界性		函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若 $\exists M>0$，$\forall x\in D$，有 $\|f(x)\|\leqslant M$，(或 $\exists m$，M，使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立)，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界函数	 函数 $f(x)$ 的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
无界性		函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若 $\forall M>0$，$\exists x_1\in D$，使得 $\|f(x_1)\|>M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界	例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，取 $x_1=\dfrac{1}{3M}$，则 $f(x_1)=3M>M$
单调性	单调增加	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，$\forall x_1,x_2\in D$，由 $x_1<x_2$，$\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$	
	单调减少	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，$\forall x_1,x_2\in D$，由 $x_1<x_2$，$\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)$	
	若不等号严格成立，则称严格单调增加或减少		
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，x，$-x\in D$，且 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数	图形关于原点对称
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，x，$-x\in D$，且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数	图形关于 y 轴对称

性质	定　　义	图例或说明
周期性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若 $\exists\, l>0$，$\forall\, x\in D$，有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期为 l 的周期函数．若在无穷多个周期中，有最小的正数 l，则称 l 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期，简称周期	

表 1.1.3　基本初等函数

名称	定义及性质	图　　形
常数函数	$y=C(-\infty<C<+\infty)$ 为平行于 x 轴，过点 $(0,C)$ 的直线	
幂函数	$y=x^{u}$（u 为常数） $u>0$ 时，函数 x^{u} 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $u<0$ 时，函数 x^{u} 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=x^{u}$ 与 $y=x^{\frac{1}{u}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^{x}(a>0,a\neq 1),x\in(-\infty,+\infty)$ $a>1$ 时，函数 a^{x} 是严格单调增加的 $0<a<1$ 时，函数 a^{x} 是严格单调减少的	
对数函数	$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时，$y=\log_{a}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加 $a<1$ 时，$y=\log_{a}x$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调下降 若 $a=e$，记 $y=\log_{e}x$ 即 $y=\ln x$	

名称	定义及性质	图　形
三角函数	正弦函数： $y = \sin x \qquad (-\infty < x < +\infty)$ 以 2π 为周期的奇函数	
	余弦函数： $y = \cos x \qquad (-\infty < x < +\infty)$ 以 2π 为周期的偶函数	
	正切函数： $y = \tan x$ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 以 π 为周期的奇函数	
	余切函数： $y = \cot x$ $(x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 以 π 为周期的奇函数	
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$ $\left(-1 \leqslant x \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 单调增加	
	反余弦函数 $y = \arccos x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$ 单调减少	

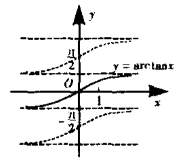
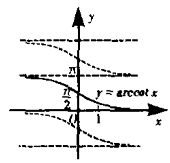
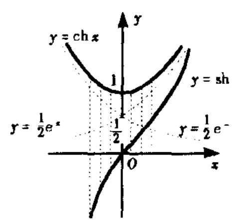
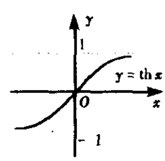
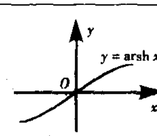
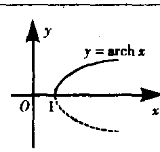
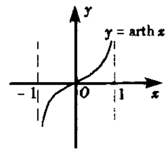
名称	定义及性质	图　　形
反三角函数	反正切函数 $y = \arctan x$ $\left(-\infty < x < +\infty,\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调增加	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ $(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$ 单调减少	

表 1.1.4　双曲函数与反双曲函数

名称	定义及性质	图　　形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 奇函数，图形通过原点且关于原点对称，单调增加	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 偶函数，图形通过点(0,1)且关于 y 轴对称	
双曲正切	$y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 奇函数，图形通过原点且关于原点对称，单调增加	
反双曲正弦	$y = \operatorname{arsh} x$	
反双曲余弦	$y = \operatorname{arch} x$	

名称	定义及性质	图　　形
反双曲正切	$y = \operatorname{arth} x$	

特别提示点

1. 映射的概念，掌握逆映射和复合映射及相应条件．

2. 函数概念的本质特征，是确定函数的两个要素：定义域和对应法则．

3. 两个函数，当其定义域相同，对应法则一样时，那么这两个函数是相等的或相同的．

4. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．应注意，并不是所有函数都具有这些特性．

5. 函数的复合是有条件的，并不是任何几个函数都可以复合成一个复合函数；复合函数的顺序是不能交换的，交换顺序则表示不同的函数．

6. 初等函数可分为代数函数与超越函数两类．分段函数往往不是初等函数．

解题方法

1. 函数的定义域：使函数有意义的一切实数．分段函数定义域是各段定义域的并集．

2. 考察函数的特性一般利用其定义．

3. 复合函数：会进行函数的复合，同时也要能把比较复杂的复合函数分解为几个相关联的简单函数的复合．

常考题型及技巧点睛

△【例 1】 在下列各组函数中，找出两个函数相等的一组：

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$　　(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

(3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$　　(4) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$

分析　两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数，否

则，它们表示两个不同的函数．

解　(1) $y = x^0$ 的定义域为 $x \neq 0$；$y = 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故该组的两个函数不相等．

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x \geqslant 0$；$y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故该组的两个函数也不相等．

(3) 所给两个函数的定义域均为 $x \neq 0$，且对应关系也相同，故该组的两个函数相等．

(4) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为：$\begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$，即　$x \geqslant 3$

而 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为：$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} \geqslant 0 \\ x-2 \neq 2 \end{cases}$，即　$x \geqslant 3$ 或 $x < 2$

故两函数不等价．

注意　函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，这一点很重要．

△【例 2】　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$ 求：

(1) $f(\sin x)$；(2) $f(x+a) + f(x-a)$ $(a > 0)$ 的定义域．

分析　求复合函数的定义域，要注意内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内．

解　(1) 要使 $\sin x$ 的值域包含于 $y = f(x)$ 的定义域内，须有　$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$

由此解得　$2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为　$2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) 函数 $f(x+a)$ 的定义域由不等式 $0 \leqslant x + a \leqslant 1$ 解得　$-a \leqslant x \leqslant 1 - a$

函数 $f(x-a)$ 的定义域由不等式 $0 \leqslant x - a \leqslant 1$ 解得　$a \leqslant x \leqslant 1 + a$

若 $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$，则　$a \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1 - a$，函数 $f(x+a) + f(x-a)$　$(a > 0)$ 的定义域为 $[a, 1-a]$；

若 $a > \dfrac{1}{2}$，则　$1 - a < \dfrac{1}{2}$，函数 $f(x+a) + f(x-a)$　$(a > 0)$ 的定义域为空集．

△【例 3】　设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$，$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leqslant 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$．

分析　这是两个分段函数的复合，其中的关键是确定中间变量的值域．