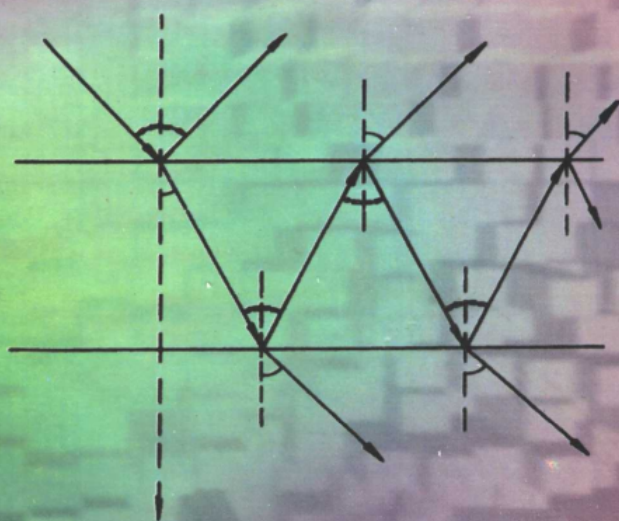


层状媒质中的 电磁场与电磁波

徐建华 编著



石油工业出版社

层状媒质中的 电磁场与电磁波

徐建华 编著

石油工业出版社

层状媒质中的 电磁场与电磁波

徐建华 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书在归纳宏观电磁学基本规律的基础上,严格导出了任意多层水平层状各向同性媒质、多层同轴柱面分层各向同性轴媒质、多层同心球面各向同性分层媒质中直流点电流源、偶极子源、环电流源和线电流源等几种典型场源所激励的电磁场响应的解析解,并讨论了部分分层各向异性媒质中电磁场的求解方法。

该书可供电磁场工程、应用地球物理等专业的大学生、研究生及有关教师和科技人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

层状媒质中的电磁场与电磁波/徐建华编著.

北京:石油工业出版社,1997.9

ISBN 7-5021-2113-7

I. 层...

II. 徐...

III. ①层状结构-媒质-电磁场

②层状结构-媒质-电磁波

IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 19015 号

石油工业出版社出版

(100011 北京安定门外安华里二区一号楼)

石油工业出版社印刷厂排版印刷

新华书店北京发行所发行

*

787×1092 毫米 16 开本 16.125 印张 398 千字 印 1—1100

1997 年 9 月北京第 1 版 1997 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5021-2113-7/TE·1777

定价: 28.00 元

序 一

电磁学在地球物理中是一门不可缺少的学科。人类一直就生活在自然产生的电磁场中，最近也利用了电磁波去探索地球以及宇宙的奥秘。从纯科学角度来看，对于地球的结构、演变、活动，电磁波是极重要的研究工作。从应用方法着眼，电磁波在资源勘探、地下结构的评估、环境污染的发现及防止等方面，也担任了重要的角色。因此，要学习地球物理，电磁学是一门必修的学科。

徐建华博士所著“层状媒质中的电磁场与电磁波”一书，从麦克斯韦方程开始，严谨地导出各项重要的电磁场、电磁波的解析解，举凡反射、散射以及电磁波在多层水平层或圆柱层中的性质，都有详尽的讨论。由于电子计算机的普及，石油勘探正向着勘探仪器模拟及反演方向迅速发展，本书正是为奠定电磁理论基础，作了良好的贡献。

美国休斯顿大学测井研究室已成立 18 年，其经费均赖世界数十家石油公司供给。十几年来，我们一直与中国学界维持互惠的友好关系。我曾数次返回到石油大学（华东）、石油大学（北京）、西安、西南（南充）、江汉、大庆等石油学院讲课。前来本校的访问学者，已有近 20 位：张庚骥、尚海筹、谢明廉、施咸迪、胡启、王域辉、周介文、张玉典、陈福煊、余敏、王天悯、赵新军、朱德怀、尚作源、楚泽涵、刘策（博士后研究员）、李江（同上）、杨国忠、汉泽西诸位。他们大大地助长了本校在测井领域中研究的发展，本人籍此机会对他们表示衷心的感谢。从中国大陆、台湾、香港来的 25 位留学生，也以测井专业在本校获得了硕士、博士等学位，他们优异的研究成果，使得本校的测井研究，继续得到世界石油工业界的支援。最近，徐建华博士在本校作访问学者六个月，在此期间与我们讨论各项测井专题，我们很荣幸能为他在写作这本书上，提供一点帮助。

最后，我深切希望两地的学术交流，能继续不断。

美国休斯顿大学教授

测井研究室主任 沈良玘

1997 年 2 月

序 二

众所周知，电磁工程的主要任务就是以电磁波为载体，去传输已知的信息（如语音、图象、数据等），或去获取未知的信息（如雷达目标的方位与特征信息，地物、地貌和地下资源信息等）。但在大多数情形下，电磁波传播的媒质是非均匀的，在给定精度条件下常可用分层介质来模拟，如地层、大气层和电离层。在地球物理探测中，背景介质和待反演的目标区域也是这样的非均匀介质。

分层介质场与波的问题已有数十年的研究历史。从经典的解析方法到射线近似方法，一直到基于电磁场微分方程和电磁场积分方程的数值方法，事实上也反映出整个电磁学的发展史。这是因为非均匀问题从来就是电磁学最具挑战性的研究领域。近十多年来，伴随着计算机技术的迅猛发展，电磁学数值方法，特别是高效数值方法获得了引人注目的进步，为非均匀介质与波的分析提供了有力的工具。

但是，电磁学的所有近代方法的研究、开发与应用，总是以经典电磁理论为基础的，非均匀介质中场与波的分析也是如此。特别是有关专业的大学生、研究生和这一领域的研究人员，首先打下电磁学的坚实基础是十分重要的。徐建华博士通过踏实、严谨的工作，撰写出“层状媒质中电磁场与电磁波”一书正是非均匀电磁学的一本基础著作，它可供电磁工程、地球物理探测、微波遥感和应用物理等专业的教师及大学生、研究生参考，也可供有关研究人员阅读和参考，我衷心希望此书的问世能对非均匀电磁学的传播和研究起到积极的促进作用。

中国电子科技大学教授 聂在平
1997年3月 于成都

前 言

在电磁场工程、应用地球物理等电磁场与电磁波的应用领域中，一方面所涉及的部分模型具有水平层状分层、柱面分层和球面分层特征，另一方面一些非均匀模型可用上述分层媒质模型来逼近。因此，系统地分析上述层状媒质中的电磁场与波具有很强的实用价值。此外，研究任意多层分层媒质中的电磁场与波也可为研究完全非均匀媒质中的场与波奠定基础。

全书共分九章，前三章是后续各章的基础。第一章主要讨论了电磁场的两个限定因素——微分方程和边界条件；第二章讨论了全空间均匀媒质中直流点电流源、偶极子源、环电流源及线电流源等几种典型场源的电磁场解，实质上是给出了分层媒质中源区中的一次场项；第三章研究了单界面上电磁波满足的基本规律，并引出了阻抗变换规律。第四章至第六章及第九章实际上是研究了各种分层媒质对有关电磁场、电磁波的散射问题，即第四章为任意平面分层半空间上的源，第五章为任意多层圆柱体对电磁场与波的散射，第六章为任意多层球体对电磁波的散射，第九章为楔体对电磁场与波的散射。第七章和第八章分别讨论了将相应场源置于水平分层媒质和柱面分层媒质中任意位置时的电磁场解。

本书的主要两个特点是：（1）所研究的物理模型中媒质的介电常数、磁导率和电导率均同时考虑在内，使得本书中的方法及理论公式具有通用性；（2）所考查分层媒质的层数是任意的，可根据实际工程应用的需要由书中相应公式编程计算即可。

作者的学术生涯曾得到过多位专家、学者的指教与帮助，他们是：

作者硕士、博士阶段的导师、中国科学院院士、电子科技大学校长刘盛纲教授严谨的治学作风给作者留下了深刻印象，所受到的熏陶将会使作者终身受益；

作者在美国休斯顿大学电子工程系进修时，得到了沈良玟教授的悉心指教与帮助，沈良玟教授审阅了书稿并为本书作序纪念；

博士生导师、电子科技大学副校长聂在平教授对作者的研究工作多次给予了指导与帮助，审阅本书书稿后也欣然为本书作序；

作者的研究工作多次得到过博士生导师、石油大学张庚骥教授、冯启宁教授、尚作源教授的指导与帮助；

在本书的写作过程中，江汉石油学院胡文宝教授、吴锡令教授、江汉测井研究所储昭坦高级工程师、美国休斯顿大学的刘策博士、美国西方阿特拉斯地球物理公司的周强博士、肖加奇博士对本书的完成提供了许多帮助；

江汉石油学院的刘迪仁老师反复校对了书稿并验证了公式。

借此机会，作者对上述学者表示最诚挚的谢意！

作者的研究工作得到了国家自然科学基金委员会、中国石油天然气总公司科技局的资助，在此深表谢意！

作 者

1997年3月

目 录

1 电磁场理论基础	1
1.1 麦克斯韦方程的微分形式与状态方程	1
1.2 对偶性原理	4
1.3 场量波动方程及其平面波解	7
1.4 位函数及其波动方程	11
1.5 TE 极化波与 TM 极化波	14
1.6 麦克斯韦方程的积分形式与边界条件	17
1.7 齐次标量波动方程的解	21
2 均匀媒质中的源	25
2.1 标量格林函数	25
2.2 非齐次波动方程的积分解	27
2.3 张量格林函数	29
2.4 均匀媒质中的点源	30
2.5 时谐线电流源	32
2.6 回线电流源	33
3 平面波的反射和折射	38
3.1 反射波与折射波的传播方向	38
3.2 导电媒质中透射波的等效波矢量	40
3.3 反射波和折射波场幅值的普遍关系	44
3.4 特殊情况下的反射与折射	47
3.5 电磁波的波阻抗	49
3.6 垂直入射多层媒质的反射与阻抗变换关系	51
3.7 斜入射多层媒质的反射与阻抗变换	54
4 多层平面媒质半空间上的源	59
4.1 位函数解的基本构成	59
4.2 垂直偶极子源	63
4.3 水平回线源	65
4.4 水平磁偶极子源	68
4.5 水平有限长导线源	72
4.6 水平线电流源	76
4.7 各向同性层状地层地表上的直流点电流源	79
4.8 各向异性层状地层地表上的直流点电流源	84
4.9 均匀各向异性媒质半空间上的垂直偶极子源	88
4.10 均匀各向异性媒质半空间上的水平偶极子源	91
5 电磁场中的圆柱异常体	96
5.1 均匀横向静态场中的圆柱体	96

5.2	均匀交变磁场中的圆柱体	99
5.3	无限长圆柱体对垂直入射平面波的散射	103
5.4	无限长圆柱体对斜入射平面波的散射	108
5.5	多层同轴圆柱体对垂直入射平面波的散射	112
5.6	多层同轴圆柱体对斜入射平面波的散射	116
5.7	多层同轴圆柱体对线源场的散射	120
5.8	多层同轴导电圆柱体外的直流点电流源	122
5.9	多层同轴圆柱体对偶极子场的散射	126
5.10	任意截面柱体散射场的近似数值解	131
5.11	各向异性圆柱体对外场的响应	133
6	电磁场中的球体	138
6.1	球坐标系中亥姆赫兹方程与拉普拉斯方程的基本解	138
6.2	均匀静态场中的球体	142
6.3	均匀交变磁场中的导电导磁性球体	144
6.4	多层球体散射场的一般形式及球面波阻抗变换关系	146
6.5	同心球体对平面波的散射	151
6.6	同心球体对径向偶极子场的散射	157
6.7	同心球体对横向偶极子场的散射	161
7	水平层状媒质中的源	166
7.1	双界面水平层状导电媒质中直流点源的镜像法	166
7.2	多层导电媒质中的直流点电流源	170
7.3	双界面层状媒质中的垂直偶极子源	172
7.4	双界面层状媒质中的水平偶极子源	177
7.5	多层媒质中的偶极子源	183
7.6	多层媒质中的水平圆环电流源	188
8	多层圆柱面层状媒质中的源	190
8.1	多层同轴导电媒质轴线上的点电流源	190
8.2	多层同轴导电媒质中任一点的点电流源	191
8.3	多层同轴媒质轴线上的轴向偶极子源	193
8.4	多层同轴媒质中任一点的轴向偶极子源	196
8.5	多层同轴媒质中的线电流源	200
8.6	绕于芯棒上的环电流源	202
9	楔形柱体的边值问题	207
9.1	导电楔形柱体侧面上的点电流源	207
9.2	楔形导体对线电流源的散射	211
9.3	楔形导体对线磁流源的散射	214
附录 A	矢量分析	218
A.1	矢量坐标转换关系	218
A.2	常用矢量恒等式	221

附录 B 拉梅系数与微分算符	224
B.1 正交曲线坐标系的拉梅系数及其算符统一表达式	224
B.2 三种常用坐标系的算符关系	225
附录 C 贝塞尔函数	227
C.1 贝塞尔函数和汉克尔函数	227
C.2 变型贝塞尔函数	231
C.3 球贝塞尔函数	233
附录 D 勒让德多项式与勒让德函数	237
D.1 一般勒让德多项式与勒让德函数	237
D.2 连带勒让德函数	239
附录 E 狄拉克函数	243
参考文献	245

1 电磁场理论基础

本章简单介绍、归纳了电磁场与电磁波各物理量的相互关系、时空关系及其数学语言表达形式——方程；阐述了求解电磁场分布的第二限定因素——边界条件。后续各章将以本章为基础，在不同条件下求解定解问题得出电磁场的各种具体表达形式。

1.1 麦克斯韦方程的微分形式与状态方程

麦克斯韦方程组是对宏观电磁现象普遍规律的高度概括，是电磁学实验定律的数学表达形式。波动方程、亥姆赫兹方程、泊松方程及拉普拉斯方程均为麦克斯韦方程组在不同条件下的具体体现形式。

1.1.1 麦克斯韦方程的微分表达式

在国际单位制下，麦克斯韦方程的微分表达式为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-4)$$

式中 $\mathbf{E}$ 为电场强度 (V/m)， $\mathbf{H}$ 为磁场强度 (A/m)， $\mathbf{D}$ 为电通密度 (电位移矢量) (C/m²)， $\mathbf{B}$ 为磁通密度 (磁感应强度) (Wb/m² 或 T)， $\mathbf{J}$ 为电流密度 (A/m²)， ρ 为电荷密度 (C/m³)。

麦克斯韦的一个重要贡献是在安培环路定律中引入了位移电流项，即式 (1.1-1) 中的第二项，从而解决了时变场中的电流连续性问题 (如电路中的电容器)，揭示了交变电场可以产生磁场的规律。式 (1.1-1) 就是麦克斯韦—安培环路定律的量化关系。

式 (1.1-2) 代表了法拉第电磁感应定律，表明交变磁场可以激发电场。

式 (1.1-3) 和式 (1.1-4) 分别代表了高斯磁场定律和高斯电场定律，表明通量守恒的客观规律。式 (1.1-3) 表明磁通量是连续的，即磁力线是无起始点的，故不存在磁荷；式 (1.1-4) 清楚地表明电通量是由电荷密度产生的。

电流密度与电荷密度间的关系为：电流的发散量等于电荷随时间的减少量。可用连续性方程表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1-5)$$

对于媒质的物理性质不发生突变 (界面) 的空间任一点而言，同一点的场—源、源—源时空关系满足式 (1.1-1) ~ 式 (1.1-5)。

不随时间变化的静电场和静磁场是两种特殊情况。由式 (1.1-1) ~ 式 (1.1-4) 知静电

场为无旋场，场源空间关系为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.1-7)$$

而静磁场是由电流产生的，即

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.1-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1-9)$$

方程 (1.1-1) ~ (1.1-4) 并不是完全相互独立的，由式 (1.1-1)、式 (1.1-2) 和式 (1.1-5) 可导出式 (1.1-3) 和式 (1.1-4)。对式 (1.1-1) 和式 (1.1-2) 两端取散度为

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-10)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-11)$$

由矢量恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ 知上两式恒等于零，利用连续性方程即可导出式 (1.1-3) 和 (1.1-4) 所示的结果。由此可见，仅利用两个旋度方程和一个连续性方程即可构成彼此独立的方程组。

一个矢量有三个空间分量， $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{J}$ 五个矢量共含 15 个分量，加上一个电荷密度标量共有 16 个标量函数，为了完全确定空间中的电磁场分布，需建立 16 个标量方程。而两个矢量旋度方程仅含 6 个标量方程，加上一个标量连续性方程共 7 个方程，还需要建立 9 个方程才能唯一确定电磁场分布函数。

1.1.2 状态方程

前述麦克斯韦方程建立了场源关系，连续性方程反映了两种源之间的关系，若能建立起 $\mathbf{D}-\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}-\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{J}-\mathbf{E}$ 之间的关系，既可结合上述三个独立方程建立起任意两个量之间的联系，三对矢量关系又可包含 9 个标量方程，使得 16 个物理量被唯一确定。三对矢量之间的关系称为状态方程，也称组合关系。

对于自由空间（如真空、空气可近似为自由空间），三对矢量关系是最简单的线性关系。设自由空间中的电通密度、磁通密度和传导电流密度相应为 $\mathbf{D}_0$ 、 $\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$ ，则有

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-12)$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-13)$$

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1-14)$$

式中 ϵ_0 和 μ_0 分别为自由空间的介电常数和磁导率，即代表 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 两对物理量间量纲上的比例关系，其值为 $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{F/m}$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。

对于各向同性的均匀媒质，在外加电磁场 ($\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$) 的作用下，其内部电荷的运动导致媒质的极化（无极分子以位移极化为主，有极分子以转向极化为主）、磁化和传导三种物理过程。媒质中的电通密度为 $\mathbf{D}$ ，磁通密度为 $\mathbf{B}$ ；存在相同 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的真空中的电通密度为 $\mathbf{D}_0$ ，磁通密度为 $\mathbf{B}_0$ 。其差定义为标志媒质物理特性的极化强度 $\mathbf{P}$ 和磁化强度 $\mathbf{M}$ ，即

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-15)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-16)$$

对于线性媒质, $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 平行且成正比, $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{H}$ 平行且成正比, 即有

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-17)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-18)$$

式中 χ_e 和 χ_m 分别为媒质的相对电极化率和相对磁极化率, 组合关系可写为

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-19)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-20)$$

式中 ϵ 和 μ 分别代表媒质的介电常数和磁导率, ϵ_r 和 μ_r 分别称为相对介电常数和相对磁导率。

传导电流可能存在两部分, 一部分是媒质导电作用产生的与电场强度成正比的传导电流 $\sigma \mathbf{E}$; 另一部分可能是一外加电流源 $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$ 。这样, 第三个状态方程可写为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) \quad (1.1-21)$$

状态方程 (1.1-19) 至 (1.1-21) 含 9 个标量方程, 与式 (1.1-1)、式 (1.1-2) 和式 (1.1-5) 一起构成的 16 个标量方程完全限定了媒质中电磁场的场源时空关系。

上述 ϵ 、 μ 和 σ 是标志媒质电磁特性的三个基本物理参数, 这里近似认为三个参数与电磁场的频率无关 (电性参数随频率变化的特性称为媒质的色散特性), 在大多数工程应用中这种近似是有效的。

对于各向异性媒质, 式 (1.1-19) 至式 (1.1-21) 所示的三对矢量之间不再两两平行, 在直角坐标系中的状态方程为矩阵关系。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \\ \mathbf{G}_y \\ \mathbf{G}_z \end{bmatrix} \quad (1.1-22)$$

$\mathbf{F}$ 矢量可代表 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{J}$; $\mathbf{G}$ 矢量可代表相应的 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{E}$; $\mathbf{C}$ 矩阵为磁导率、介电常数或电导率张量, 即此时的 ϵ 、 μ 不再是标量。各向同性媒质中的电磁参数为标量, 即相当于非对角线元素为零的张量, 因此, 各向同性是各向异性的特例。

1.1.3 麦克斯韦方程的时谐形式

对于角频率为 ω 的正旋电磁场, 任一场或源可表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = R_e[\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \quad (1.1-23)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 为时谐场的幅值函数, 即频率域函数, 相应的 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 为时间域函数, 两者可由傅里叶变换对联系起来。为方便起见, 本书将频率域函数的空间坐标省略。

将式 (1.1-23) 代入式 (1.1-1) 至式 (1.1-5), 得到麦克斯韦方程和连续性方程的时谐形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (1.1-24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (1.1-25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1-26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1-27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + i\omega \rho = 0 \quad (1.1-28)$$

考虑组合关系, 在无源区 ($\mathbf{J}_s=0$) 中, 式 (1.1-24) 可写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} \quad (1.1-29)$$

式中 $i\omega \epsilon \mathbf{E}$ 称为位移电流, $\sigma \mathbf{E}$ 称为传导电流。当 $|\sigma \mathbf{E}| \gg |i\omega \epsilon \mathbf{E}|$ 时, 传导电流起主导作用。

应用地球物理中,多数方法所使用的频率较低,信号主要反映电导率的变化,属于这种情况。而当 $|\sigma E| \ll |i\omega\epsilon E|$ 时,位移电流起主导作用,大气中的无线电信息传输属于该情况。

1.1.4 等效复介电常数与复电导率概念

对于理想无耗绝缘媒质, $\sigma=0$, 式 (1.1-29) 简化为

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.1-30)$$

此时位移电流与电场强度 $\mathbf{E}$ 相位差 $\pi/2$, ϵ 为实数;而对于良导体中的低频电磁场而言, $|\sigma E| \gg |i\omega\epsilon E|$, 式 (1.1-29) 可近似为

$$\nabla \times \mathbf{H} \approx \sigma\mathbf{E} \quad (1.1-31)$$

电导率 σ 为实数时,传导电流 $\sigma\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{E}$ 相位相同。

在传导电流与位移电流数量级相当时,电磁信号既反映电导率的变化,又反映介电常数的变化(当然对于磁性物质,磁导率 μ 的变化也会影响信号的变化),此时有复介电常数或复电导率的提法。在不考虑介电损耗(介电常数的虚部)和传导电流的电位滞后效应(电导率的虚部)时,所谓复介电常数或复电导率是实介电常数与实电导率的相互等效统称。由式 (1.1-29) 有

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} = i\omega\left(\epsilon - \frac{i\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E} \quad (1.1-32)$$

与式 (1.1-30) 比较,可引入等效复介电常数

$$\epsilon^* = \epsilon - i\sigma/\omega \quad (1.1-33)$$

即将电导率等效到介电常数中去。

式 (1.1-29) 又可记为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (1.1-34)$$

与式 (1.1-31) 比较,可引入等效复电导率

$$\sigma^* = \sigma + i\omega\epsilon \quad (1.1-35)$$

即将介电常数看成电导率的一部分。

1.2 对偶性原理

1.2.1 等效磁荷与等效磁流的引入

$\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 分别代表两种性质的场,且两种场之间可以相互激发、相互耦合,物理意义上已存在对称性。从体现场源时空关系的麦克斯韦方程组形式上看, $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 之间以及 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间似乎也呈现出一定的对称性。但是,由于客观上不存在磁荷和磁流,破坏了方程组右端的对称性。

首先从数学角度出发,为了保证方程组的对称性,对应于电荷密度 $\rho_e(\mathbf{r}, t)$ 和电流密度 $\mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t)$ 引入相应假想的等效磁荷密度 $\rho_m(\mathbf{r}, t)$ 和磁流密度 $\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t)$ 。与 ρ_e 、 $\mathbf{J}_e$ 类似, ρ_m 、 $\mathbf{J}_m$ 也是一种场源。若媒质中存在两种源,则总场满足的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \rho_m(\mathbf{r}, t) \quad (1.2-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_e(\mathbf{r}, t) \quad (1.2-4)$$

此时方程组完全对称，场源均存在一一对应关系，这样会使方程的求解过程简化。对应于电流连续性方程，相应的磁流连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_m(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.2-5)$$

1.2.2 电偶极子与磁偶极子

到目前为止，自然界仍未发现磁荷（也称磁单极）和磁流，产生电磁场的根源仍是电荷及其运动所形成的电流，引入磁荷和磁流仅仅是数学处理上的技巧。当某些特殊情况下的电荷、电流源所产生的电磁场和用等效磁荷、等效磁流（磁源）的概念及其数学方程所导出的电磁场相同时，磁荷、磁流则起到了对电荷、电流的宏观等效作用。也只有能找到可等效为磁荷、磁流源的电荷、电流源，引入等效磁荷、磁流才有现实意义。

最能说明等效作用的源是偶极子源，如图 1.1 所示。

图 1.1 (a) 展示了一电偶极子的电力线分布，电偶极子两端聚集有正负电荷，之间存在一电流 I ，电力线起于正电荷、止于负电荷。图 1.1 (b) 表示了磁偶极子的磁力线分布，磁偶极子的起源仍是电荷和电流，如电子自旋或小导线环导致电子旋转运动在环上形成电流 I ，所产生磁场的磁力线是与电流环相绞合的，并且磁力线本身是闭合的。正因为磁力线无起始点，也就不能象电偶极子那样，磁偶极子中并不存在正负磁荷以及与之对应的磁流。但是，图 1.1 (b) 中矩形框外远处的磁力线分布与图 1.1 (a) 中电力线分布完全一致，从宏观上对比两种源，磁偶极子的磁力线相当于矩形框两端存在一对正负源，磁力线起于正、止于负，即等效磁荷，等效磁荷间的内部联系也可等效为一磁流 I_m 。

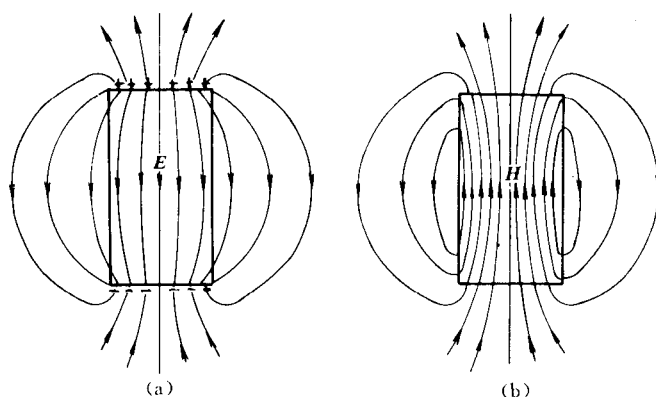


图 1.1 偶极子源的对偶性

(a) 电偶极子；(b) 磁偶极子

电偶极子长度与磁偶极子环大小趋于零时，两种源为点源，且这两种点源是各种发射源的基本单元，如长导线天线可看成无穷多个电偶极子的叠加；大回线源可看成无穷多个环向电偶极子或无穷多个磁偶极子的组合。本书后面章节中将用大量篇幅在不同条件下求

解两种点源的电磁场。

定量描述电、磁偶极子源固有特性的物理量是电偶极矩 $\mathbf{p}$ 和磁偶极矩 $\mathbf{m}$ 。对于人工场源有

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = q d \mathbf{l} \quad (1.2-6)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = I \mathbf{S} \quad (1.2-7)$$

式中 q 为电偶极子电量, I 为磁偶极子上的电流强度, $d\mathbf{l}$ 为电偶极子长度, $\mathbf{S}$ 为磁偶极子环面积。

将电偶极子和磁偶极子点源分别用电极化强度矢量和磁化强度矢量表示为

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}) \quad (1.2-8)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}) \quad (1.2-9)$$

式中 $\delta(\mathbf{r})$ 为狄拉克函数, $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 的量纲分别为 C/m^2 和 A/m 。

式 (1.2-1) ~ 式 (1.2-4) 所示麦克斯韦方程中的源是以电 (磁) 荷、电 (磁) 流形式体现出来的。若要求解电、磁偶极子源产生的场, 需要知道电 (磁) 荷、电 (磁) 流与电 (磁) 极化矢量的关系。他们的关系为

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial q}{\partial t} d \mathbf{l} \delta(\mathbf{r}) = I d \mathbf{l} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.2-10)$$

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mu \frac{\partial \mathbf{m}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.2-11)$$

$$\rho_e(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2-12)$$

$$\rho_m(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2-13)$$

源为时谐源时, 简化办法与上一节完全相同, 用 $i\omega$ 代替微分算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 即可。

1.2.3 对偶关系

将式 (1.2-1) ~ 式 (1.2-4) 所示的场分解为电性源和磁性源分别激发的两部分, 即可设 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_m$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_m$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_m$ 。

在理想介质 ($\sigma=0$) 中, $\mathbf{J}_e$ 仅为外加场源时, 电性源及其时谐场的关系为

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e + i\omega \mathbf{D}_e \quad (1.2-14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -i\omega \mathbf{B}_e \quad (1.2-15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_e = 0 \quad (1.2-16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho_e \quad (1.2-17)$$

$$\mathbf{D}_e = \epsilon \mathbf{E}_e \quad (1.2-18)$$

$$\mathbf{B}_e = \mu \mathbf{H}_e \quad (1.2-19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = -i\omega \rho_e \quad (1.2-20)$$

磁性源系统为 (为明显表示对偶关系, 方程顺序进行了调整)

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m - i\omega \mathbf{B}_m \quad (1.2-21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = i\omega \mathbf{D}_m \quad (1.2-22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_m = 0 \quad (1.2-23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_m = \rho_m \quad (1.2-24)$$

$$B_m = \mu H_m \quad (1.2-25)$$

$$D_m = \epsilon E_m \quad (1.2-26)$$

$$\nabla \cdot J_m = -i\omega\rho_m \quad (1.2-27)$$

将式 (1.2-14) ~ 式 (1.2-20) 与式 (1.2-21) ~ 式 (1.2-27) 一一对比, 不难看出存在如下对偶关系

$$\begin{cases} H_e \sim -E_m, E_e \sim H_m, B_e \sim -D_m, D_e \sim B_m \\ J_e \sim J_m, \rho_e \sim \rho_m, \epsilon \sim \mu, \mu \sim \epsilon \end{cases} \quad (1.2-28)$$

即将式 (1.2-14) ~ 式 (1.2-20) 所示的电系统场源关系中的量用式 (1.2-28) 所示的对应量代入即可得到式 (1.2-21) ~ 式 (1.2-27) 所示的磁源系统的场源关系, 反之亦然。

在求解电磁场问题时, 若求出了电性源所激发场的表达式, 则用式 (1.2-28) 所示对偶关系代入电性源的场关系即可得到磁性源所产生的场; 同理求出磁性源场后也很容易得到电性源产生的场。这种性质称为对偶性, 也称二重性, 在求解实际问题中该原理具有重要的实用价值。

值得注意的是, 式 (1.2-28) 所示的对偶关系是在理想介质 ($\sigma=0$, 无感应电流) 条件下导出的。在导电媒质中使用对偶性原理时, 要考虑感应电流影响, 将非源感应传导电流归结到位移电流中去, 即将导电特性等效为介电特性, 此时的介电常数 ϵ 应该用等效复介电常数 ϵ^* 代替。忽略位移电流时, ϵ 用 $-i\sigma/\omega$ 代替, 即 $\sigma \rightarrow i\omega\mu$ 。

感应电流也可称为二次场源, 在导电媒质中均存在。不但电性源激发的电磁场可产生感应电流, 而且磁性源激发的电磁场在导电媒质中也将产生感应电流, 但不存在类似于感应电流的感应磁流。

1.3 场量波动方程及其平面波解

1.3.1 波动方程的导出

交变电磁场具有波动性, 具有波动性质的物理量满足波动方程, 电磁波的场量波动方程可以由麦克斯韦方程组直接导出。在一般媒质 (ϵ 、 μ 、 σ 均不为零) 中, 存在两种源 (J_e 、 ρ_e 和 J_m 、 ρ_m) 时的麦克斯韦方程 (1.2-1) 右端应加入感应电流项 $\sigma E(r, t)$, 考虑组合关系后将麦克斯韦方程式 (1.2-1) ~ 式 (1.2-4) 重写为

$$\nabla \times H(r, t) = J_e(r, t) + \sigma E(r, t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E(r, t) \quad (1.3-1)$$

$$\nabla \times E(r, t) = -J_m(r, t) - \mu \frac{\partial}{\partial t} H(r, t) \quad (1.3-2)$$

$$\nabla \cdot H(r, t) = \frac{1}{\mu} \rho_m(r, t) \quad (1.3-3)$$

$$\nabla \cdot E(r, t) = \frac{1}{\epsilon} \rho_e(r, t) \quad (1.3-4)$$

对式 (1.3-1)、式 (1.3-2) 两端取旋度有

$$\nabla \times \nabla \times H(r, t) = \nabla \times J_e(r, t) + \sigma \nabla \times E(r, t)$$