大学数学系列教材

大学数学

1

Mathematics

湖南大学数学与计量经济学院组编
主编　黄立宏　戴斌祥

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学系列教材

大 学 数 学

(一)

湖南大学数学与计量经济学院组编

主 编 黄立宏 戴斌祥

高等教育出版社

内容简介

本书是《大学数学》系列教材之一，内容包括集合与映射、一元函数微积分的理论与应用、无穷级数、常微分方程、差分方程等。各节后配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、条理清楚、重点突出、难点分散、例题较多，且在内容取舍上既充分注重了连续量方面的知识内容，又加强了离散量的内容介绍，并较好地处理了连续量与离散量内容之间的关系，使之有机地融合在一起。

本书可作为大学非数学类理工科本科生数学教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.(一)/刘楚中主编.—北京:高等教育出版社,2002.8

非数学类专业本科教材

ISBN 7-04-010818-6

Ⅰ.大… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第031720号

大学数学(一)

湖南大学数学与计量经济学院组 编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京民族印刷厂

开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2002年8月第1版
印　　张	28.5	**印　　次**	2002年8月第1次印刷
字　　数	520 000	**定　　价**	29.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

大 学 数 学 系 列 教 材

湖南大学数学与计量经济学院组编

总主编 刘楚中 **副总主编** 黄立宏

《大学数学》(一) 主编 黄立宏 戴斌祥

《大学数学》(二) 主编 曾金平 李晓沛

《大学数学》(三) 主编 刘楚中 曹定华

《大学数学》(四) 主编 杨湘豫 邓爱珍

《大学数学》(五) 主编 李董辉 曾金平

《大学数学习题集》(附习题解答) 主 编 刘陶文 彭亚新

前　言

本系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自1989年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新，为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务，本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生，以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括《大学数学(一)》(含一元微积分、常微分方程、级数、差分方程等)、《大学数学(二)》(含代数与几何等)、《大学数学(三)》(含多元微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)、《大学数学(四)》(含概率论、数理统计等)、《大学数学(五)》(含数值计算、数学建模、计算机与数学等)、《大学数学习题集》(附习题解答)。整套教材由刘楚中任总主编，黄立宏任副总主

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

编。本册《大学数学(一)》由黄立宏、戴斌祥主编,参加编写的人员有:刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延。

本系列教材编写得到湖南大学教务处的大力支持,在此表示衷心感谢。

湖南大学《大学数学》教材编写组

2001 年 12 月

目　　录

第一章　集合与函数 ······ (1)
第一节　集合与映射 ······ (1)
一、集合及其运算 ······ (1)
二、映射 ······ (5)
习题 1－1 ······ (9)
第二节　函数的概念与基本性质 ······ (10)
一、函数的概念 ······ (10)
二、函数的基本性质 ······ (14)
三、函数的代数运算 ······ (16)
四、反函数 ······ (17)
习题 1－2 ······ (18)
第三节　初等函数 ······ (20)
一、基本初等函数 ······ (20)
二、初等函数 ······ (23)
习题 1－3 ······ (27)
第二章　数列的极限与常数项级数 ······ (29)
第一节　数列极限的概念 ······ (29)
一、数列 ······ (29)
二、数列极限的定义 ······ (30)
习题 2－1 ······ (34)
第二节　数列极限的性质及收敛准则 ······ (35)
一、数列极限的性质 ······ (35)
二、数列的收敛准则 ······ (39)
习题 2－2 ······ (41)
第三节　数列极限的运算 ······ (42)
一、无穷小数列 ······ (42)
二、无穷大数列 ······ (43)
三、数列极限的运算法则 ······ (45)
习题 2－3 ······ (49)

第四节 常数项级数的概念和性质 …… (50)
一、无穷级数的概念 …… (50)
二、级数收敛的必要条件 …… (53)
三、收敛级数的基本性质 …… (54)
习题 2-4 …… (56)
第五节 常数项级数敛散性判别法 …… (56)
一、正项级数敛散性判别法 …… (56)
二、交错级数及其敛散性判别法 …… (62)
三、任意项级数及其敛散性判别法 …… (63)
习题 2-5 …… (66)
第三章 函数的极限与连续性 …… (67)
第一节 函数的极限 …… (67)
一、$x \to \infty$ 时,函数的极限 …… (67)
二、$x \to x_0$ 时,函数的极限 …… (69)
三、函数极限的性质 …… (73)
四、$x \to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的左右极限 …… (74)
习题 3-1 …… (75)
第二节 无穷小量、无穷大量 …… (76)
一、无穷小量 …… (76)
二、无穷大量 …… (80)
习题 3-2 …… (82)
第三节 函数极限的运算 …… (83)
一、极限的运算法则 …… (83)
二、极限运算举例 …… (84)
习题 3-3 …… (87)
第四节 函数极限存在性定理 …… (87)
一、夹逼定理 …… (87)
二、函数极限与数列极限的关系 …… (88)
三、柯西收敛准则 …… (90)
习题 3-4 …… (90)
第五节 两个重要极限 …… (91)
一、$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ …… (91)
二、$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ …… (94)

习题 3－5 …… (97)
第六节　无穷小量的比较 …… (97)
一、无穷小量比较的概念 …… (97)
二、关于等价无穷小量的性质和定理 …… (98)
习题 3－6 …… (100)
第七节　函数的连续性 …… (101)
一、函数连续性的概念 …… (101)
二、函数的间断点 …… (104)
习题 3－7 …… (107)
第八节　连续函数的性质 …… (107)
一、连续函数的基本性质 …… (107)
二、初等函数的连续性 …… (111)
习题 3－8 …… (112)
第九节　闭区间上连续函数的性质 …… (112)
一、闭区间上连续函数的性质 …… (112)
二、函数的一致连续性 …… (117)
习题 3－9 …… (118)
第十节　函数项级数 …… (119)
一、函数项级数的一般概念 …… (119)
二、幂级数 …… (121)
习题 3－10 …… (126)
第四章　一元函数的导数和微分 …… (127)
第一节　导数的概念 …… (127)
一、导数的引入 …… (127)
二、导数的定义 …… (128)
三、导数的几何意义 …… (133)
四、可导与连续的关系 …… (134)
习题 4－1 …… (135)
第二节　求导法则 …… (137)
一、函数四则运算的求导法则 …… (137)
二、复合函数的求导法则 …… (139)
三、反函数的求导法则 …… (141)
四、基本导数公式 …… (142)
五、隐函数的求导法则 …… (144)

六、取对数求导法 …… (145)
七、参数方程的求导法则 …… (145)
习题 4－2 …… (147)
第三节 高阶导数…… (149)
习题 4－3 …… (152)
第四节 微分及其运算…… (153)
一、微分的概念 …… (153)
二、微分与导数的关系 …… (154)
三、微分的几何意义 …… (156)
四、复合函数的微分及微分公式 …… (156)
五、高阶微分 …… (158)
习题 4－4 …… (159)
第五节 微分中值定理…… (160)
一、罗尔中值定理 …… (160)
二、拉格朗日中值定理 …… (163)
三、柯西中值定理 …… (166)
习题 4－5 …… (167)
第六节 洛必达法则…… (168)
一、$\frac{0}{0}$型不定式 …… (168)
二、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式 …… (170)
三、其它不定式 …… (172)
习题 4－6 …… (174)
第七节 泰勒公式…… (175)
一、泰勒公式 …… (175)
二、函数的泰勒展开举例 …… (179)
习题 4－7 …… (182)
第五章 一元函数的积分…… (183)
第一节 定积分的概念…… (183)
一、曲边梯形的面积 …… (183)
二、定积分的概念 …… (184)
三、定积分的性质 …… (187)
习题 5－1 …… (192)
第二节 定积分的基本定理…… (192)

一、原函数与积分上限函数 …………………………………… (193)
二、微积分的基本公式 ………………………………………… (196)
习题 5-2 ………………………………………………………… (197)
第三节　原函数的求法与不定积分……………………………… (198)
一、不定积分的概念和性质 …………………………………… (198)
二、求不定积分的方法 ………………………………………… (201)
三、有理函数的积分 …………………………………………… (214)
四、三角函数有理式的积分 …………………………………… (218)
五、积分表的使用 ……………………………………………… (221)
习题 5-3 ………………………………………………………… (222)
第四节　定积分的计算…………………………………………… (223)
一、定积分的换元法 …………………………………………… (223)
二、定积分的分部积分法 ……………………………………… (227)
习题 5-4 ………………………………………………………… (230)
第五节　广义积分………………………………………………… (231)
一、无穷积分 …………………………………………………… (231)
二、瑕积分 ……………………………………………………… (235)
三、Γ 函数 ……………………………………………………… (239)
*四、广义积分的收敛原理 ……………………………………… (241)
五、广义积分的柯西主值 ……………………………………… (242)
习题 5-5 ………………………………………………………… (243)
第六章　一元微积分的应用………………………………………… (245)
第一节　函数的单调性与凸性…………………………………… (245)
一、函数的单调性 ……………………………………………… (245)
二、函数的凸性 ………………………………………………… (248)
习题 6-1 ………………………………………………………… (252)
第二节　函数的极值和最值……………………………………… (252)
一、函数的极值 ………………………………………………… (252)
二、拐点与导函数极值点之间的关系 ………………………… (256)
三、最优化问题 ………………………………………………… (257)
习题 6-2 ………………………………………………………… (260)
第三节　函数图形的描绘………………………………………… (262)
一、渐近线 ……………………………………………………… (263)
二、函数图形的描绘 …………………………………………… (264)

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

习题6-3 ……………………………………………………… (267)
第四节 函数展开为幂级数……………………………………… (268)
一、幂级数的解析性质 ………………………………………… (268)
二、函数展开为幂级数 ………………………………………… (270)
三、函数幂级数展开式的应用举例 …………………………… (277)
习题6-4 ……………………………………………………… (278)
第五节 平面图形的面积……………………………………… (279)
一、建立定积分数学模型的微元法 …………………………… (279)
二、平面图形的面积 ………………………………………… (281)
习题6-5 ……………………………………………………… (286)
第六节 体积…………………………………………………… (287)
一、平行截面面积为已知的立体体积 ………………………… (287)
二、旋转体的体积 …………………………………………… (289)
习题6-6 ……………………………………………………… (291)
第七节 弧长及旋转体的侧面积……………………………… (292)
一、弧长的概念 ……………………………………………… (292)
二、弧长的计算 ……………………………………………… (292)
三、弧微分的几何意义 ……………………………………… (296)
四、旋转体的侧面积 ………………………………………… (297)
习题6-7 ……………………………………………………… (298)
第八节 曲率…………………………………………………… (299)
习题6-8 ……………………………………………………… (303)
第九节 微积分在物理学中的应用…………………………… (303)
一、相关变化率 ……………………………………………… (303)
二、变力作功 ………………………………………………… (304)
三、液体静压力 ……………………………………………… (307)
四、质量分布不均匀的线状体的质量 ………………………… (309)
习题6-9 ……………………………………………………… (309)
第十节 微积分在经济学中的应用…………………………… (310)
一、边际函数 ………………………………………………… (310)
二、函数的弹性 ……………………………………………… (311)
三、增长率 …………………………………………………… (312)
习题6-10 …………………………………………………… (313)
第七章 常微分方程……………………………………… (314)

第一节　微分方程的基本概念……………………………………………(314)
习题 7-1 ……………………………………………………………(318)
第二节　一阶微分方程…………………………………………………(318)
一、变量可分离方程 ……………………………………………………(319)
二、齐次方程 …………………………………………………………(320)
三、可化为齐次方程的方程 ……………………………………………(322)
四、一阶线性微分方程 …………………………………………………(323)
五、伯努利方程 …………………………………………………………(326)
习题 7-2 ……………………………………………………………(328)
第三节　几类可降阶的高阶微分方程……………………………………(329)
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程……………………………………(329)
二、$y''=f(x,y')$型的微分方程 ……………………………………(331)
三、$y''=f(y,y')$型的微分方程 ……………………………………(332)
四、可利用参变量降阶的方程……………………………………………(334)
习题 7-3 ……………………………………………………………(335)
第四节　线性微分方程解的结构与幂级数解法…………………………(335)
一、线性微分方程解的结构 ……………………………………………(335)
二、线性微分方程的幂级数解法 ………………………………………(340)
习题 7-4 ……………………………………………………………(344)
第五节　高阶常系数线性微分方程………………………………………(345)
一、特征方程与特征根 …………………………………………………(345)
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法 ……………………………(346)
三、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 …………………………(348)
四、n 阶常系数齐次线性微分方程的解法 …………………………(352)
五、n 阶常系数非齐次线性微分方程的解法 ………………………(354)
习题 7-5 ……………………………………………………………(356)
第六节　欧拉方程………………………………………………………(357)
习题 7-6 ……………………………………………………………(360)
第七节　常系数线性微分方程组…………………………………………(360)
习题 7-7 ……………………………………………………………(363)
第八章　常差分方程……………………………………………………(365)
第一节　差分与差分运算………………………………………………(365)
一、差分的基本概念 ……………………………………………………(365)
二、差分运算的性质 ……………………………………………………(366)

三、几个基本定理 …………………………………………… (370)
习题 8-1 ……………………………………………………… (375)
第二节　常差分方程的基本概念与差分方程模型……………… (375)
一、常差分方程的基本概念 ……………………………… (375)
二、差分方程模型 ………………………………………… (377)
习题 8-2 ……………………………………………………… (379)
第三节　一阶线性差分方程……………………………………… (380)
一、一阶齐次线性差分方程 ……………………………… (380)
二、一阶非齐次线性差分方程 …………………………… (382)
习题 8-3 ……………………………………………………… (388)
第四节　高阶线性差分方程……………………………………… (388)
一、线性差分方程解的结构 ……………………………… (388)
二、常系数齐次线性差分方程 …………………………… (392)
三、常系数非齐次线性差分方程 ………………………… (395)
习题 8-4 ……………………………………………………… (400)
第五节　差分方程组……………………………………………… (400)
一、用差分方程组表示的数学模型 ……………………… (400)
二、常系数线性差分方程组的求解方法 ………………… (402)
习题 8-5 ……………………………………………………… (404)
附录　积分表……………………………………………………… (405)
一、含有 $ax+b$ 的积分 ………………………………… (405)
二、含有$\sqrt{ax+b}$的积分 …………………………… (405)
三、含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分 ……………………………… (406)
四、含有 $ax^2+b(a>0)$的积分 ………………………… (406)
五、含有 $ax^2+bx+c(a>0)$的积分 ……………………… (407)
六、含有$\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$的积分 …………………… (407)
七、含有$\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$的积分 …………………… (408)
八、含有$\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$的积分 …………………… (408)
九、含有$\sqrt{\pm ax^2+bx+c}(a>0)$的积分……………… (409)
十、含有$\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$或$\sqrt{(x-a)(b-x)}$的积分 ……… (410)
十一、含有三角函数的积分 ……………………………… (410)
十二、含有反三角函数的积分 …………………………… (412)

十三、含有指数函数的积分 …………………………………… (412)
十四、含有对数函数的积分 …………………………………… (413)
十五、含有双曲函数的积分 …………………………………… (413)
十六、定积分 ………………………………………………… (413)
习题答案……………………………………………………… (415)

第一章　集合与函数

集合与函数的概念在中学数学里已有介绍，但由于集合是集合论中的基本概念，集合论是现代数学的基础，而函数是高等数学中研究和讨论的主要对象，因此，在本教材中，我们从介绍集合与函数的概念开始.

第一节　集合与映射

一、集合及其运算

1. 集合及其表示法

集合是一个最原始的概念，要给集合下一个严格的数学定义是件相当困难的事.通常，所谓**集合**(简称集)是指具有某种确定性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的**元素**.

习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.用 $a\in A$ 表示a 是集A 中的元素，读作"a 属于A"；用 $a \overline{\in} A$(或 $a \notin A$) 表示 a 不是集A 中的元素，读作"a 不属于A".含有限个元素的集合称为**有限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$；既不是有限集又不是空集的集合称为**无限集**.

集合的表示方法有两种：一种是列举法，即把它的所有元素一一列出来，写在一个花括号内.例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集可表示为 $S=\{-1,1\}$.另一种方法是描述法，即指明集合元素所具有的确定性质.将具有性质 $P(x)$ 的对象 x 所构成的集合表示为$A=\{x\mid x$ 具有性质$P(x)\}$.例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集也可表示为 $S=\{x\mid x^2-1=0\}$.

今后，如无特别声明，我们用$\mathbf{N}$表示非负整数集、$\mathbf{Z}_+$或$\mathbf{N}_+$表示正整数集、$\mathbf{Z}$表示整数集、$\mathbf{Q}$表示有理数集、$\mathbf{R}$表示实数集、$\mathbf{C}$表示复数集.

对一非空实数集 A，若存在常数 $M>0$，使对 A 中任何元素x 均有 $|x|\leqslant M$，则称 A 为**有界集**；若对 A 中任何元素x，有 $x\leqslant M$，则称 A 为**有上界**；若对 A 中任何元素x 有$x\geqslant -M$，则称 A **有下界**.

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，数集$\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为**开区间**，记为(a,b)；数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为**闭区间**，记为$[a,b]$；类似地记$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$；$a$ 和b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**.

实数集亦可记为区间$(-\infty,+\infty)$，而$(a,+\infty)=\{x \mid x>a, x\in\mathbf{R}\}$；$(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a, x\in\mathbf{R}\}$等.

由于实数可以用数轴上的点来表示，所以我们常将实数x也称为点x. 在今后的讨论中，我们常常要考虑一个点附近的情况. 例如研究函数不仅仅是讨论它在一点的取值，更主要地是要研究它在这一点附近的变化. 一个点的附近就是"邻域"的概念.

设$x_0\in\mathbf{R}$，对$\delta\in(0,+\infty)$，数集$\{x \mid |x-x_0|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$称为点$x_0$的$\delta$ **邻域**，记作$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta, x\in\mathbf{R}\}$$

点x_0称为这邻域的**中心**，δ称为这邻域的**半径**.

若只考虑x_0附近但不包括点x_0自身，即$U(x_0,\delta)-\{x_0\}$，称之为点x_0的**去心 δ 邻域**，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(x_0,\delta)&=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, x\in\mathbf{R}\}\\&=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).\end{aligned}$$

当不强调邻域的半径时，常将x_0点的邻域与去心邻域分别简记为$U(x_0)$和$\mathring{U}(x_0)$.

另外，$\{x \mid x_0-\delta<x\leqslant x_0, x\in\mathbf{R}\}$称为$x_0$的**左邻域**，记为$U(x_0^-,\delta)$；$\{x \mid x_0\leqslant x<x_0+\delta, x\in\mathbf{R}\}$称为$x_0$的**右邻域**，记为$U(x_0^+,\delta)$. 不强调邻域的半径时，常将左、右邻域分别简记为$U(x_0^-)$和$U(x_0^+)$. 相应地也有去心左、右邻域的概念.

2. 集合的关系及运算

为了表述方便，我们先介绍几个符号.

符号"$\forall$"表示"对于任意的"、"对于所有的"或"对于每一个"；符号"$\exists$"表示"存在". 例如："对于任意的实数a，都存在实数b，使得$a-b=1$"可以写成"$\forall a\in\mathbf{R}, \exists b\in\mathbf{R}$，使得$a-b=1$".

符号"$\Longrightarrow$"和"$\Longleftrightarrow$"表示蕴涵关系. 设S_1和S_2是两个陈述句，它们可以指命题，也可以指条件，$S_1\Longrightarrow S_2$表示"若S_1成立，则S_2也成立"；$S_1\Longleftrightarrow S_2$表示"当且仅当$S_1$成立时$S_2$成立". 例如："若$a\neq0$，则$a^2>0$"可记为"$a\neq0\Longrightarrow a^2>0$"；"$a^2=0$当且仅当$a=0$"可记为"$a^2=0\Longleftrightarrow a=0$".

定义 1 设A和B是两个集合，若$\forall x\in A$，有$x\in B$，则称A是B的**子集**，记为$A\subset B$或$B\supset A$，亦称A包含于B，或B包含A. 若A是B的非空子集，且$\exists y\in B$但$y\overline{\in}A$，则称A是B的**真子集**，也称B真包含A.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com