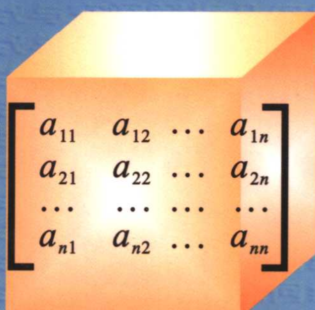
国家工科数学课程教学基地系列教材

线性代数与空间解析几何同步学习指导

电子科技大学应用数学学院　编



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

电子科技大学出版社

“国家工科数学课程教学基地”系列教材

线性代数与空间解析几何同步学习指导

电子科技大学应用数学学院 编

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何同步学习指导/电子科技大学应用数学学院编．—成都：电子科技大学出版社，2002.9
ISBN 7—81065—953—7

Ⅰ．线…　Ⅱ．电…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教学参考资料②立体几何：解析几何-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 073890 号

线性代数与空间解析几何同步学习指导

电子科技大学应用数学学院　编

出　　版：电子科技大学出版社
（成都建设北路二段四号，邮政编码 610054）
责任编辑：徐守铭
发　　行：新华书店
印　　刷：成都科星印务有限公司
开　　本：850×1168　1/32　　印张　8.375　字数　209 千字
版　　次：2002 年 9 月第一版
印　　次：2002 年 9 月第一次印刷
书　　号：ISBN 7—81065—953—7/O・43
印　　数：1—6000 册
定　　价：14.00 元

内 容 提 要

本书是根据教育部《关于高等工业院校线性代数课程的教学基本要求》和《全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写的，并与“十五”国家级规划重点教材《线性代数与空间解析几何》（电子科技大学应用数学学院编，高等教育出版社出版）的内容相同步。每章的内容分为四个部分：(1)基本要求；(2)内容提要；(3)典型题例；(4)检测题。

本书内容全面，例题典型，融入了编者多年的教学经验，是工科本科各专业学生结合课程学习、复习和参加研究生入学统考的难得的参考资料，也可作为成教、自考等各类学生学习该课程的参考书。

前　言

本书是根据教育部《关于高等工业院校线性代数课程的教学基本要求》和《全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写的。本书的编写思想是，帮助大学生在学习线性代数与空间解析几何时，进一步深入理解基本概念，掌握基本理论和基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书的特色是，紧扣大纲，突出重点，加强基础，重视综合，总结题型，启迪思维，注重应用，体现线性代数与空间解析几何的有机结合。本书共分七章，每章的内容分为四个部分：（1）基本要求；（2）内容提要；（3）典型例题；（4）检测题。

本书内容全面，例题典型，融入了编者多年的教学经验，并与“十五”国家级规划重点教材《线性代数与空间解析几何》（电子科技大学应用数学学院编，高等教育出版社出版）的内容相对应，分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，是大学生学习线性代数与空间解析几何的得力助手。同时，还选编了近三年电子科技大学《线性代数与空间解析几何考试题》供学生复习参考。

本书是工科本科各专业学生结合课程学习、复习和参加研究生入学统考的难得的参考资料，也可作为成教、

自考等各类学生学习本课程的参考书。

本书是电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列教材之一，各章的撰写者分别是：钟守铭（第一、二章），黄廷祝（第四、六章），成孝予（第五、七章），李卷澜（第三章及第六章中空间解析几何部分），附录部分由刘金水选编。

限于编者水平，疏漏之处，敬请批评指正。

编　者

2002 年 9 月

目　　录

第一章　矩阵及其初等变换

第二章　行　列　式

第三章　几何空间

第四章　n 维向量空间

第五章 特征值与特征向量

第六章 二次型与二次曲面

第七章 线性空间与线性变换

第一章　矩阵及其初等变换

一、基本要求

1. 理解矩阵的概念，掌握单位矩阵、对角矩阵、对称矩阵、反称矩阵及其性质；

2. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及其各种运算规律；

3. 熟练掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵；

4. 理解逆矩阵的概念，熟练掌握逆矩阵的性质，掌握用初等变换求逆矩阵；

5. 了解分块矩阵，掌握分块矩阵的运算．

二、内容提要

1. 矩阵的定义

由 mn 个数排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$表示第 i 行第 j 列的元，i 称为 a_{ij}的行指标，j 称为 a_{ij}的列指标．

2. 矩阵的线性运算

设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}$$

为两个 $m\times n$ 矩阵，k 为一个数，则矩阵的线性运算为

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

$$kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

注：当 $k\neq0$ 时，kI 称为数量矩阵，其中 I 是单位矩阵．

3. 线性运算的性质

(1)加法交换律　　$A+B=B+A$

(2)加法结合律　　$(A+B)+C=A+(B+C)$

(3)零矩阵的作用　　$A+O=O+A=A$

(4)负矩阵的作用　　$A+(-A)=O$

其中

$$-A=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{bmatrix}$$

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

(6)乘法结合律 $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

(7)分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

(8)分配律 $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

在线性运算的 8 条性质中，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，k,l 为数，$\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 阶零矩阵．由这 8 条性质还可推出如下结果：

(1)$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$

(2)$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(3)$k\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$

(4)减法的定义 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

4. 矩阵的乘法及其性质

(1)矩阵乘法的定义：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{bmatrix}$$

则由元

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$

组成的 $m\times s$ 矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$.

(2)矩阵乘法的性质

结合律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ $\quad k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ $\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

单位矩阵的作用 $\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$

一般说来，交换律不存在，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

方阵的幂 设 k 为正整数，$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}(k=2,3,\cdots)$，$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$，方阵的幂具有的性质是： $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{m+k}$， $(\boldsymbol{A}^m)^k=\boldsymbol{A}^{mk}$.

方阵的多项式 设

$$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则称

$$f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$$

是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式.

方阵的多项式满足：设 $f(\boldsymbol{A})$、$g(\boldsymbol{A})$都是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，有

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$$

5. 转置矩阵及其性质

转置矩阵的定义：设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

如果将 $\boldsymbol{A}$ 的行、列交换后，所得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^T$，即

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

转置矩阵的性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(3) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$，一般地，有

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^T = \boldsymbol{A}_s^T\boldsymbol{A}_{s-1}^T\cdots\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T$$

(4) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$

两个特殊矩阵：

(1)对称矩阵　$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$

(2)反称矩阵　$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$

6. 矩阵的初等变换

(1)矩阵中某两行元互换位置；

(2)用非零的常数乘以矩阵的某一行的全部元；

(3)矩阵某一行元的 k 倍加到另一行．

以上三种变换都称为矩阵的初等行变换．将上面(1)、(2)、(3)中的“行”换成“列”就是矩阵的初等列变换．矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换．

7. 矩阵的等价

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

矩阵的等价的性质：**反身性**　$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$

对称性　$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$

传递性　$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$

8. 方程组与求解法

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 称为非齐次线性方程组，$AX=\boldsymbol{0}$ 称为齐次线性方程

组，其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad 0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=(A,b)\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若 $d_{r+1}=0$，则 $AX=b$ 有解．此时，当 $r=n$ 时，有惟一解；当 $r<n$ 时，有无穷多个解．若 $d_{r+1}\neq 0$，则 $AX=b$ 无解．

$AX=0$ 有非零解的条件是 $r<n$.

9．初等矩阵

对单位矩阵任作一次初等变换得到的矩阵就称为初等矩阵，即

$$
\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\\ \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \\
\end{matrix}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{i}(c) = \begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& c &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\\ \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ \\ \\
\end{matrix}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{ij}(c) = \begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 & \cdots & c && \\
&&& \ddots & \vdots && \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}
\begin{matrix}
\\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\
\end{matrix}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{ij}(c)=\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & \vdots & \ddots & & & \\
& & c & \cdots & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix} \\
\qquad\qquad\text{（第 } i \text{ 列）（第 } j \text{ 列）}
\end{array}
$$

10. 逆矩阵的定义及其性质

逆矩阵的定义：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵的性质：

若以下的逆矩阵都是存在的，则有

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\quad(k\neq 0)$;

(3) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，一般地有 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{-1}=\boldsymbol{A}_s^{-1}\boldsymbol{A}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$;

(4) $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$.

11. 利用初等变换求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

由于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过有限次初等变换化为单位矩阵，故求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的方法为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1})$$

或

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

12. 分块矩阵

以子矩阵为元的矩阵称为分块矩阵．求分块矩阵的加、数乘、乘法运算时，与矩阵的加、数乘、乘法运算对应一致，特别是求分块对角矩阵的逆矩阵时，可把它化为求对角元的子矩阵的逆．

13. 几个等价结论

$\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\cong \boldsymbol{I}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积．

三、典型例题

例 1 设 $\boldsymbol{X}$ 是实 $n\times 1$ 矩阵，试证：(1) $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\geqslant 0$；(2) $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.

证 (1) 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{X}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，于是

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant 0$$

(2) 必要性：设 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=0$，即有

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$$

显然有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.