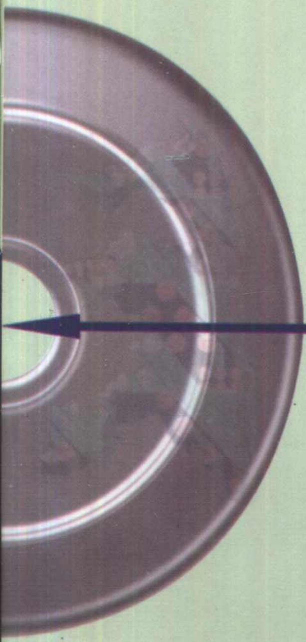
全国高等教育自学考试应试指导丛书

中国计算机函授学院图书编写中心　组编



线性代数
自考应试指导

主　编　孙胜先

副主编　钱泽平

南京大学出版社

中国计算机函授学院图书编写中心　组编

全国高等教育自学考试应试指导丛书

公共课程

线性代数自考应试指导

主　编　孙胜先
副主编　钱泽平

南 京 大 学 出 版 社

内容简介

本书内容紧扣全国考委颁布的“线性代数”自学考试大纲，对考生学习全国考委指定的《线性代数》教材进行了非常到位的辅导，以求解决考生的学习及应试问题.

全书内容分两个部分.第一部分共分五章，和教材一一对应.每章内容又可分为内容概要、常见考题分析与解答、教材中疑难习题分析与解答；第二部分为两套模拟试卷分析与解答.

本书是参加“线性代数”考试的考生必备辅导用书，也可作为进行自考辅导教学教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数自考应试指导/孙胜先主编.—南京：南京大学出版社，2000.9
(全国高等教育自学考试应试指导丛书)
ISBN 7-305-01642-X

Ⅰ.线... Ⅱ.孙... Ⅲ.线性代数-高等教育-自学考试-自学参考资料
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 45972 号

书　　名　线性代数自考应试指导
主　　编　孙胜先
副 主 编　钱泽平
责任编辑　王　勇
出版发行　南京大学出版社
地　　址　南京汉口路 22 号　邮编　210093　电话　025-3593695
印　　刷　合肥学苑印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　850×1168 1/32　印　张　6.25　字　数　162 千字
版　　次　2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷
定　　价　12.00 元
ISBN 7-305-01642-X/O·254

组编前言

国家教育部考试中心决定，于2000年开始全国高等教育自学考试正式使用新编的大纲和教材。

为适应新调整的考试计划及密切配合新大纲新教材开展助学辅导，中国计算机函授学院利用多年积累的自考教学辅导资源和经验，全面系统地剖析了有关各门课程新大纲和教材的内容体系，重新组织编写了一套“全国高等教育自学考试应试指导”丛书，推向全国，以满足考生之急需，适应社会之需要。

这套丛书堪称“通关必读”，丛书的作者都在书中融入了自己多年从事自考教学辅导的直接经验，他们既是本专业的教授，又是自考辅导的专家，二者集于一身，使该套丛书极具实用性和针对性；精心组织、细心筹划、用心编撰，从而确保该套丛书质量上乘。

编写该套丛书的指导思想是，切实解决考生自学应试中的三个问题：

(1)在自学过程中起到答疑解惑作用，帮助考生顺利阅读、掌握教材内容；

(2)帮助考生抓住课程重点、难点，不入迷津；

(3)帮助考生理清课程主线，建立清晰的知识结构体系，在掌握知识点的前提下，沉着应战，顺利过关。

对于广大应试者而言，请一位好“教师”，找一位好“辅导”，尤为重要。这套“自学考试指导”丛书，可望成为你攻克一门又一门课程，克服一个又一个难关的良师益友；帮助你扫清学习中的障碍，增强你的必胜信心，伴随你走向成功的彼岸。

我们真诚地为广大考生奉献这份精品、真品。愿广大考生早成夙愿。

2000年1月

编者的话

本书是针对全国高等教育自学考试《线性代数》教材进行应试指导的一本书。

作为一本应试指导的书，应该解决学习及应试这两个问题。本书紧扣考试大纲，综合课程特点，根据多年的辅导经验，紧紧围绕这两个问题进行了内容安排。

在每章的内容概要部分，总结出了该章的主要考试内容，既方便考生的复习，又便于平时的查阅；在常见考题分析与解答部分，笔者分析了历年考题的题型及考核知识点的分布情况，总结出了一些典型试题，并给出了必要的分析与解答，以求让考生学会举一反三，体会出什么是万变不离其宗，从而做到以不变应万变，这样就不会在考试中被不同形式出现的考题所迷惑；在疑难习题分析与解答部分，对教材中的课后疑难习题进行了分析与解答，解决了考生无法解决而又无师可问的问题，这样就能帮助考生顺利地完成课后练习；在模拟试题分析与解答部分，给出了两套完整的试卷，以便让考生了解考试的全貌。

考试的顺利通过，就如同绿茵场上的临门一脚，要想进球，就得抓住机会，做到稳、准、狠。考前的复习冲刺阶段，对于考生的考试成绩显得尤为重要，正所谓临阵磨枪，不快也光。相信考生通过对这本书的学习，一定能够在最后的迎考准备阶段，做到事半功倍、顺利闯关。

编　者

2000 年 6 月

目　　录

第一部分

内容概要与典型题解

“内容概要”高度概括每章的考核内容，以帮助考生有的放矢地去掌握有关内容；“典型题解”是具有代表性的题，书中通过“分析”和“解答”具有“代表性”的试题形式，反映出自学考试线性代数试题的深浅度，有利于考生把握尺度，顺利过关．在本部分中，将按线性代数的考试大纲来组织相关内容，分成以下五个章节：

第 1 章　矩阵和行列式

第 2 章　向量空间

第 3 章　矩阵的秩与线性方程组

第 4 章　特征值与特征向量

第 5 章　实二次型

在每一章中，都将围绕相关内容提炼出考核知识点，对每个知识点不像教材那样详细讲解，而是给出结论性的提示，这是本书最具特色的地方．考生只需掌握有关知识点，再结合书中典型题解，便可迅速了解相关内容的考题形式、深度、广度和难度．当然，同一问题可能会以不同题型出现，但这不过是一种命题技巧而已．

本书汇集了从历年线性代数试卷中挑选出的大量典型试题和笔者本人认为值得注意的问题．这些问题不敢说今后定然考到，但是基本上覆盖了线性代数自学考试的全部内容．

第 1 章　矩阵和行列式

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，是现代科学技术不可缺少的数学工具. 学习本章，应掌握矩阵及各种类型矩阵的定义及运算法则，熟练掌握逆矩阵的判定和求法，学会正确运用矩阵的初等变换；了解行列式的概念，掌握行列式的性质；会运用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

1.1　内容概要

1. 矩阵

(1) 矩阵的定义

$m \times n$ 个元素排成 m 行、n 列的一个 $m \times n$ 的数表，称为 $m \times n$ 矩阵.

当 $m = n$ 时，称为 n 阶方阵. 用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示矩阵，如：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{或} A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

(2) 单位矩阵

主对角线上的元素都是 1，而其它元素全为零的 n 阶方阵称为 n

阶单位矩阵,记为 E 或 I.单位矩阵的形状如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) 上(下) 三角矩阵

一个 n 阶方阵,如果它主对角线以下的元素全等于零($a_{ij} = 0, i > j$),即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称 A 为上三角矩阵;同样,若 A 的主对角线以上元素全为零($a_{ij} = 0, i < j$),则称 A 为下三角矩阵.

(4) 对角矩阵

一个 n 阶方阵,如果主对角线以外的元素全为零,则称此矩阵为对角矩阵.对角矩阵的形状为:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n},$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ 时,称 A 为数量矩阵,此时 $A = \lambda_1 E$.

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵的加减法运算

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$,定义 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n} = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$,并称 C 是 A 与 B 之和.

定义 $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$,显然 $A + (-A) = O$.

矩阵的减法定义为

$A - B = A + (-B)$.

矩阵的加法运算服从于以下几条法则:

1) 交换律 $A + B = B + A$;

2) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $O + A = A + O = A$.

(2) 矩阵的数乘运算

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, k 是一个实数,定义 k 与 A 的乘积为

$$kA = (k\,a_{ij})_{m\times n},$$

即

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

矩阵的数乘运算服从于以下几条法则:

1) $k(A + B) = kA + kB$;

2) $(k + l)A = kA + lA$;

3) $(kl)A = k(lA)$;

4) $1A = A$;

5) $0A = O$.

(3) 矩阵的乘法运算

设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$,定义 $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}.$$

必须注意 A 和 B 只有在 A 的列数等于 B 的行数时才可以相乘.一般来说, $AB \neq BA$.

矩阵乘法的运算服从于以下几条法则:

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$;

3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$, k 为一个实数.

由矩阵的乘法我们可以定义 n 阶方阵的幂

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k个}.$$

矩阵幂的运算服从于以下几条法则:

1) $A^kA^l = A^{k+l}$;

2) $(A^k)^l = A^{kl}$;

3) 对 $k>1$, $(AB)^k \neq A^kB^k$; 只有当 $AB=BA$ 时,

$$(AB)^k = A^kB^k.$$

(4) 矩阵的转置运算

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$n\times m$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的转置矩阵,简称 A 的转置,记作 A' 或 A^T.

矩阵转置运算服从以下几条法则:

1) $(A')'=A$;

2) $(A+B)'=A'+B'$;

3) $(kA)'=kA'$, k 为一个实数;

4) $(AB)'=B'A'$.

一般来说 $A'\neq A$,但当 $A'=A$ 时,则称矩阵 A 是实对称矩阵;当 $A'=-A$ 时,则称 A 是反对称矩阵.

3. 分块矩阵

(1) 分块矩阵的定义

对行、列数较高的矩阵，常常对其采用分块的方法，即用一些横线和纵线将它分划成若干个矩形的子块，以这些子块为元素的矩阵就称为分块矩阵.

(2) 分块矩阵的加法运算

设矩阵 A 与 B 的行数相同，列数相同，采用相同的分块方法有

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix},$$

其中 B_{ij} 与 A_{ij} 的行数相同，列数相同，则

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2r}+B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & A_{s2}+B_{s2} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{bmatrix}.$$

(3) 分块矩阵的数乘运算

$$设\ A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix},$$

k 为任意实数，则

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1r} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{sr} \end{bmatrix}.$$

(4) 分块矩阵的乘法

设 A 为 $m \times l$ 矩阵，B 为 $l \times n$ 矩阵，分块成

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}.$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, b_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数，则

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix},$$

其中 $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} (i = 1,2,\cdots,s, j = 1,2,\cdots,r)$.

(5) 分块矩阵的转置

设

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix},$$

则

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{s1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{1r} & A'_{2r} & \cdots & A'_{sr} \end{bmatrix}.$$

也用 A^{T} 表示矩阵 A 的转量.

(6) 分块对角阵

设 A 为 n 阶方阵,若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零阵子块 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$,其余子块都为零块,即

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ O & O & \cdots & A_S \end{bmatrix},$$

则称 A 为分块对角阵.

4. 行列式

(1) 行列式的定义

对于 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,它的行列式记为 $\det(A)$,也可以记为 $|A|$ 或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式为一个算式,它定义为

$$\det(A) = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数,Σ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 级排列求和.

(2) 行列式的性质

性质 1　行列式和它的转置行列式相等;

性质 2　互换方阵 A 的某两行位置,设所得到的方阵为 B,则

$$|B| = -|A|;$$

性质 3　若方阵 A 中有两行相同,则 $|A| = 0$;

性质 4　用常数 k 去乘 n 阶方阵 A 的某一行,设所得到的方阵为 B,则

$$|B| = k|A|, \qquad |kA| = k^n|A|;$$

性质 5　若方阵 A 中某行各元素都是两个数的和:$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}(j = 1,\cdots,n)$,则 $|A|$ 可以分拆成两个相应行列式的和,即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

性质 6　把方阵 A 的某一行的 k 倍加到另一行上去,设所得到的方阵为 B,则 $|B| = |A|$;

性质 7　设 A,B 为同阶方阵,则

$$|AB| = |A||B|.$$

(3) 行列式按一行(列)展开

在 n 阶行列式 $|A|$ 中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的元素按原来次序所组成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},而称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理1 n阶行列式$|A|$等于它的任一行(列)各元素与它们对应的代数余子式乘积之和,即对于任何$i,j(i,j=1,2,\cdots,n)$,有

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in};$$

或

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.$$

定理2 n阶行列式$|A|$的任一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\quad(k\neq i);$$

或

$$a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=0\quad(s\neq j).$$

(4)n阶范德蒙(Vandermonde)行列式($n\geqslant 2$)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

其中“$\prod$”为连乘号,$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$表示所有的形如$(a_i-a_j)(1\leqslant j<i\leqslant n)$的因子的乘积,如

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

5. 逆矩阵

(1) 逆矩阵的定义

设A是一个n阶方阵,若存在一个n阶方阵B,使得$AB=BA=I_n$,则称B是A的逆矩阵,这时称A为可逆矩阵.记A的逆矩阵为A^{-1},即$A^{-1}=B$.

若矩阵A无逆矩阵,则称A为奇异矩阵;若A有逆矩阵,则称A为非奇异矩阵.