

经济应用数学基础(一)

微积分

(题解)

中国人民大学数学教研室 编

中央广播电视大学出版社

经济应用数学基础(一)

微 积 分

(题 解)

解

中央广播电视大学出版社

经济应用数学基础 (一)

微 积 分

(题 解)

中国人民大学数学教研室 编

*

中央广播电视大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
国防科工委印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张 8.5 184千字
1983年3月第1版 1983年4月第1次印刷
印数 1—340,000

书号: 13300·1 定价: 0.75元

前 言

经济应用数学基础《微积分》已作为中央电视大学经济类数学教材。为了便于同学作完习题订正时参考，我们编了这本习题解答。

由于我们水平不高，时间比较仓促，书中一定有不少缺点和错误，请广大读者提出批评指正。

中国人民大学数学教研室

1982年 9 月

目 录

习题一.....	(1)
习题二.....	(23)
习题三.....	(49)
习题四.....	(87)
习题五.....	(123)
习题六.....	(157)
习题七.....	(189)
习题八.....	(211)
习题九.....	(235)

习 题 一

1. 按下列要求举例:

- (1) 一个有限集合;
- (2) 一个无限集合;
- (3) 一个空集;
- (4) 一个集合是另一个集合的子集。

解 (1) 一个有限集合: 如 $\{x | x^3 - x^2 - 2x = 0\}$ 。

(2) 一个无限集合: 如 $\{x | x = \frac{1}{2^n}, n \text{ 为正整数}\}$ 。

(3) 一个空集: 如 $\{x | x^2 + 2 = 0, x \in R\}$ 。

(4) 一个集合是另一个集合的子集: 例如设 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x | |x| \leq 5\}$, 那么有 $A \subset B$, 即 A 是 B 的子集。

2. 用集合的构造式表示下列集合:

- (1) 大于 5 的所有实数集合;
- (2) 大于 20 的正整数集合;
- (3) 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 内部一切点的集合。

解 (1) $\{x | x > 5, x \in R\}$

(2) $\{x | x > 20, x \text{ 是整数}\}$

(3) $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 25, x, y \in R\}$

3. 下列集合哪个是空集 ϕ :

$A = \{x | x + 1 = 1\}$ $B = \{x | x > 1 \text{ 且 } x < 1\}$ $C = \{\phi\}$

解 $A = \{x | x + 1 = 1\} = \{0\} \neq \phi$

$B = \{x | x > 1 \text{ 且 } x < 1\} = \phi$

$$C = \{\phi\} \neq \phi$$

4. 写出 $A = \{0, 1, 2\}$ 的一切子集。

解 $A = \{0, 1, 2\}$ 的子集有:

$$A_1 = \{0\}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{0, 1\}, A_5 = \{0, 2\}, \\ A_6 = \{1, 2\}, A_7 = \{0, 1, 2\}, A_8 = \phi.$$

5. 如果 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2\}$, 下列各种写法, 哪些是对的? 哪些不对?

$$1 \in A, 0 \in B, \{1\} \in A, 1 \subset A, \{1\} \subset A, 0 \subset A, \{0\} \subset A, \{0\} \subset B, A = B, A \supset B, \phi \subset A, A \subset A.$$

解 写法对的有: $1 \in A, 0 \in B, \{1\} \subset A, \{0\} \subset A, A \supset B, \phi \subset A, A \subset A.$

写法不对的有: $\{1\} \in A, 1 \subset A, 0 \subset A, \{0\} \subset B, A = B.$

6. 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$, 求
(1) $A \cup B$, (2) $A \cap B$, (3) $A \cup B \cup C$, (4) $A \cap B \cap C$,
(5) $A - B$.

$$\text{解 } (1) A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$(2) A \cap B = \{1, 3\}$$

$$(3) A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(4) A \cap B \cap C = \{1, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \phi$$

$$(5) A - B = \{2\}$$

7. 如果 A 表示某单位会英语的人的集合, B 表示会日语的人的集合, 那么, $A', B', A - B, (A \cup B)', (A \cap B)'$ 各表示什么样人的集合?

解 A' 表示不会英语的人的集合,

B' 表示不会日语的人的集合,

$A - B$ 表示会英语不会日语的人的集合,

$(A \cup B)'$ 表示不会英语也不会日语的人的集合,

$(A \cap B)'$ 表示不是既会英语又会日语的人的集合, 即英、日两种语言都会的人除外, 其它的人的集合。

8. 如果 $A = \{x | 3 < x < 5, x \in R\}$, $B = \{x | x > 4, x \in R\}$,
求 (1) $A \cup B$, (2) $A \cap B$, (3) $A - B$.

解 (1) $A \cup B = \{x | x > 3, x \in R\}$

(2) $A \cap B = \{x | 4 < x < 5, x \in R\}$

(3) $A - B = \{x | 3 < x \leq 4, x \in R\}$

9. 如果

$$A = \{(x, y) | x - y + 2 \geq 0, x \in R, y \in R\}$$

$$B = \{(x, y) | 2x + 3y - 6 \geq 0, x \in R, y \in R\}$$

$$C = \{(x, y) | x - 4 \leq 0, x \in R, y \in R\}$$

在坐标平面上标出 $A \cap B \cap C$ 的区域。

解 图 1-1 中阴影区域即
为 $A \cap B \cap C$

10. 如果

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{1, 2, 3\},$$

$$B = \{2, 4, 6\},$$

求 (1) A' , (2) B' , (3) $A' \cup B'$,

(4) $A' \cap B'$.

解 (1) $A' = \{4, 5, 6\}$

(2) $B' = \{1, 3, 5\}$

(3) $A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

(4) $A' \cap B' = \{5\}$

11. U, A, B 同第 10 题, 验证 $A - B = A \cap B'$.

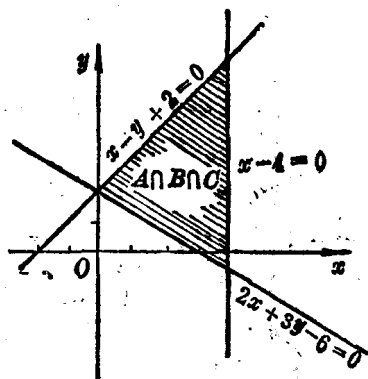


图 1-1

解 $A-B=\{1,3\}, A\cap B'=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\},$

$\therefore A-B=A\cap B'$

12. 如果 A 是非空集合, 下列各个等式哪些是对的?
哪些不对?

$A\cup A=A, A\cap A=A, A\cap A=\phi, A\cup\phi=A, A\cup\phi=\phi,$
 $A\cup U=U, A\cap U=A, A\cap\phi=A, A\cap\phi=\phi, A-A=A, A-$
 $A=\phi.$

解 $A\cup A=A$ (对), $A\cap A=A$ (对), $A\cap A=\phi$ (错)
 $A\cup\phi=A$ (对), $A\cup\phi=\phi$ (错), $A\cup U=U$ (对), $A\cap U$
 $=A$ (对), $A\cap\phi=A$ (错), $A\cap\phi=\phi$ (对), $A-A=A$ (错),
 $A-A=\phi$ (对)。

13. 调查了某地区 100 个公社, 其中 70 个公社小麦亩产量在 500 斤以上, 以集合 A 表示这些公社, 40 个公社棉花亩产量在 120 斤以上, 以集合 B 表示这些公社, 小麦亩产在 500 斤以上而棉花亩产在 120 斤以下的有 55 个公社, 试用集合关系表示下列各类公社, 并计算出各类型公社的数目:

(1) 麦、棉两项亩产量均达到上述指标的公社;

(2) 小麦亩产量未达到 500 斤以上而棉花亩产量在 120 斤以上的公社;

(3) 麦、棉中至少有一项达到上述指标的公社;

(4) 麦、棉两项均未达到上述指标的公社。

解 (1) 麦、棉两项均达到上述指标的公社集合为 $A\cap B$, 数目为 $70-55=15$ (个);

(2) 小麦未达到指标而棉花达到指标的公社集合为 $B-A$ (或 $A'\cap B$), 公社数目为 $40-15=25$ (个);

(3) 麦、棉中至少有一项达到指标的公社集合为 $A\cup B$,

公社数目为 $70+40-15=95$ (个) (或 $55+15+25=95$ (个))，

(4) 麦棉两项均未达到指标的公社集合为 $(A \cup B)'$ ，公社数目为 $100-95=5$ (个)。

用文氏图 (图 1-2) 表示如下：

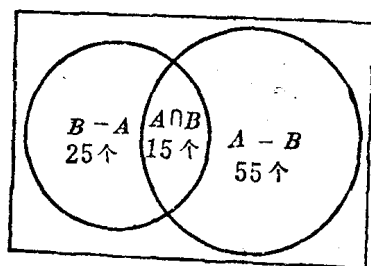


图 1-2

14. 如果 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e\}$, $C=\{d,e,f\}$,
验证 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

解 $A \cap (B \cup C) = \{a,b,c,d\} \cap \{c,d,e,f\} = \{c,d\}$
 $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{c,d\} \cup \{d\} = \{c,d\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

15. 用第7题的集合 A 与集合 B , 验证摩根律。

解 A 表示会英语的人的集合。 B 表示会日语的人的集合。

(1) $\because (A \cup B)'$ 表示不会英语也不会日语的人的集合，

$A' \cap B'$ 也表示不会英语也不会日语的集合，

$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$

下面文氏图中斜线区域 (图 1-3) 即表示 $(A \cup B)'$ 或

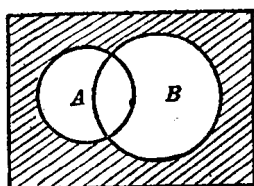


图 1-3

$$A' \cap B'.$$

(2) $\nabla (A \cap B)'$ 表示不是既会英语又会日语的人的集合,

$A' \cup B'$ 表示不会英语或不会日语的人的集合, 即英、日两种语言都会的人除外, 其它人的集合,

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$$

下面文氏图中斜线区域 (图1-4) 即表示 $(A \cap B)'$ 或 $A' \cup B'$.

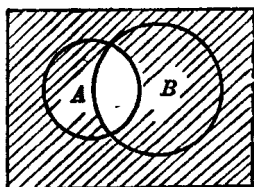


图 1-4

16. 用集合运算律证明:

$$X \cup (X \cap Y)' \cup Y = U$$

$$\begin{aligned} \text{证 左边} &= X \cup (X \cap Y)' \cup Y \\ &= X \cup (X' \cup Y') \cup Y \\ &= (X \cup X') \cup (Y' \cup Y) \\ &= U \cup U = U = \text{右边} \end{aligned}$$

17. 解下列不等式:

$$(1) x^2 < 9, (2) |x-4| < 7, (3) 0 < (x-2)^2 < 4.$$

$$(4) |ax-x_0| < \delta (a>0, \delta>0, x_0 \text{ 为常数})$$

$$\text{解 } (1) x^2 < 9$$

$$\sqrt{x^2} = |x| < 3, \therefore -3 < x < 3$$

$$(2) |x-4| < 7, -7 < x-4 < 7, \therefore -3 < x < 11.$$

$$(3) 0 < (x-2)^2 < 4$$

$$0 < |x-2| < 2 \quad |x-2| < 2 \quad (\text{且 } x \neq 2)$$

$$\therefore 0 < x < 4 \quad (\text{且 } x \neq 2)$$

$$\text{即 } 0 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 4.$$

$$(4) |ax-x_0| < \delta, a>0, \delta>0, x_0 \text{ 为常数}$$

$$\begin{aligned} -\delta &< ax - x_0 < \delta \\ x_0 - \delta &< ax < x_0 + \delta \end{aligned}$$

即

$$\frac{x_0 - \delta}{a} < x < \frac{x_0 + \delta}{a}$$

18. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leq 3$, (2) $|x-2| \leq 1$, (3) $|x-a| < \varepsilon$ (a 为常数, $\varepsilon > 0$), (4) $|x| \geq 5$, (5) $|x+1| > 2$.

解 (1) $|x| \leq 3$

$$\{x | |x| \leq 3\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(2) $|x-2| \leq 1$

$$\{x | |x-2| \leq 1\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$$

(3) $|x-a| < \varepsilon$ (a 为常数, $\varepsilon > 0$)

$$\{x | |x-a| < \varepsilon\} = \{x | a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

(4) $|x| \geq 5$

$$\{x | |x| \geq 5\} = \{x | x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5\} = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

(5) $|x+1| > 2$

$$\{x | |x+1| > 2\} = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$$

$$= (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

19. 用区间表示下列点集, 并在数轴上表示出来:

(1) $I_1 = \{x | |x+3| < 2\}$ (2) $I_2 = \{x | 1 < |x-2| < 3\}$

解 (1) $I_1 = \{x | |x+3| < 2\}$

$$I_1 = \{x | |x+3| < 2\} = \{x | -5 < x < -1\} = (-5, -1)$$

(图1-5)

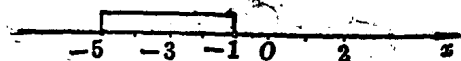


图 1-5

$$(2) I_2 = \{x | 1 < |x-2| < 3\}$$

$$I_2 = \{x | 1 < |x-2| < 3\} = \{x | |x-2| > 1 \text{ 且 } |x-2| < 3\}$$

$$= \{x | -1 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 5\} = (-1, 1) \cup (3, 5)$$

(图1-6)

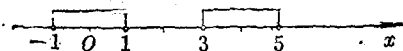


图 1-6

20. 如果 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$, 求 $A \times B$.

解 $A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c)\}$

21. 如果 $X = Y = \{3, 0, 2\}$, 求 $X \times Y$.

解 $X \times Y = \{(3, 3), (3, 0), (3, 2), (0, 3), (0, 0), (0, 2), (2, 3), (2, 0), (2, 2)\}$

22. 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$, 作出由 X 到 Y 的关系 $R = \{(x, y) | x > y\}$ 的图形.

解 $R = \{(x, y) | x > y\} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$
图形如下 (图1-7):

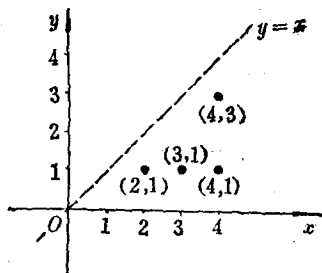


图 1-7

23. X, Y 均为全体正实数集合, 作出由 X 到 Y 的

关系 $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 25\}$ 的图形。

解 $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 25, x > 0, y > 0\}$, 图形如下 (图1-8),

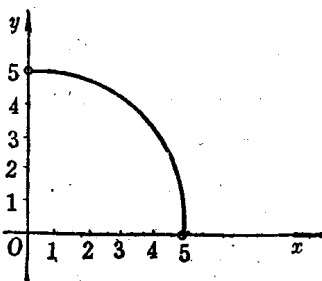


图 1-8

24. 设 $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$, 写出下列集合 R 的元素:

(1) 由 X 到 Y 的关系 $R, x \geq y$.

(2) 由 X 到 Y 的关系 $R, y = x^2$.

解 (1) $R = \{(x, y) | x \geq y\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(2) $R = \{(x, y) | y = x^2\} = \{(1, 1), (2, 4)\}$

25. 设 $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, 求: $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 8)\} = \{(x, y) | y = x^3, x \in X, y \in Y\}$ 的反关系 R^{-1} .

解 $R^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (8, 2)\} = \{(y, x) | x = \sqrt[3]{y}, x \in X, y \in Y\}$.

26. 习题 24 中 (1)、(2) 的关系 R 是不是函数关系?

解 (1) R 不是函数关系。因为对于一个 $x \in X$, 有无限多的 $y \in Y$ 使 $(x, y) \in R$, 故不符合函数定义。

(2) R 不是函数关系。因为有 $3 \in X, 4 \in X$, 而 $3^2 \in Y$,

$4^2 \in Y$, 即 $(3, 9) \in R, (4, 16) \in R$, 故不符合函数定义。

27. 习题 23 中的关系 R 是不是函数关系?

解 关系 R 不是由 X 到 Y 的函数关系 (但如令 $X_1 = \{x \mid 0 < x < 5\} = (0, 5)$, 则 R 是由 X_1 到 Y 的函数关系)。

28. 下列 R 上的关系是不是函数关系?

(1) $R = \{(x, y) \mid y = b\}$, (2) $R = \{(x, y) \mid x = a\}$ 。

解 (1) $R = \{(x, y) \mid y = b\}$ 是 R 上的函数关系。

(2) $R = \{(x, y) \mid x = a\}$ 不是 R 上的函数关系。

29. 确定下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{2x+1}$, (2) $y = \sqrt{1-x^2}$,

(3) $y = \sqrt{x^2-9}$, (4) $y = \frac{1}{x^2-2x}$,

(5) $y = \frac{-5}{x^2+4}$, (6) $y = \lg(3x+1)$,

(7) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$, (8) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 。

解 (1) $y = \sqrt{2x+1}$

$$D(f) = \{x \mid 2x+1 \geq 0\} = \left\{x \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

(2) $y = \sqrt{1-x^2}$

$$D(f) = \{x \mid 1-x^2 \geq 0\} = \{x \mid |x| \leq 1\} = [-1, 1]$$

(3) $y = \sqrt{x^2-9}$

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \mid x^2-9 \geq 0\} = \{x \mid |x| \geq 3\} \\ &= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

(4) $y = \frac{1}{x^2-2x}$

$$D(f) = \{x | x^2 - 2x \neq 0\} = \{x | x \neq 0, x \neq 2\} \\ = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$(5) \quad y = \frac{-5}{x^2 + 4}$$

$$D(f) = (-\infty, +\infty)$$

$$(6) \quad y = \lg(3x+1)$$

$$D(f) = \{x | 3x+1 > 0\} = \left\{x | x > -\frac{1}{3}\right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$(7) \quad y = \arcsin \frac{x-1}{2}$$

$$D(f) = \left\{x | -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1\right\} = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$$

$$= [-1, 3]$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$$

$$D(f) = \{x | 1-x^2 \neq 0 \text{ 且 } x+2 \geq 0\}$$

$$= \{x | x \geq -2 \text{ 且 } x \neq -1, x \neq 1\}$$

$$= [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

30. 下列各题中, 两个函数是否相同? 如果不同, 有何区别?

$$(1) \quad y = \frac{x^2}{x} \text{ 与 } y = x, \quad (2) \quad y = \lg x^2 \text{ 与 } y = 2 \lg x.$$

解 (1) $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$ 是两个不同的函数, 前者定

义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 后者定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) $y = \lg x^2$ 与 $y = 2 \lg x$ 也是两个不同的函数, 前者定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 后者定义域为 $(0, +\infty)$ 。

31. 如果 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 求: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x+1)$ 。

解 $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2$

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 \times (-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{x} + 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = x^2 - x$$

32. 如果 $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x$, 证明: $f(-x) = -f(x)$

证 $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + 3(-x)$

$$= -x^5 + 2x^3 - 3x$$

$$= -(x^5 - 2x^3 + 3x)$$

$$= -f(x)$$

33. 如果 $f(x) = 1 - x^2$, 证明: $f(-x) = f(x)$ 。

证 $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$

34. 如果 $f(x) = a^x$, 证明:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \quad \frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)$$

证 $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = f(x-y)$$

35. 如果 $f(x) = \log_a x$, 证明: