

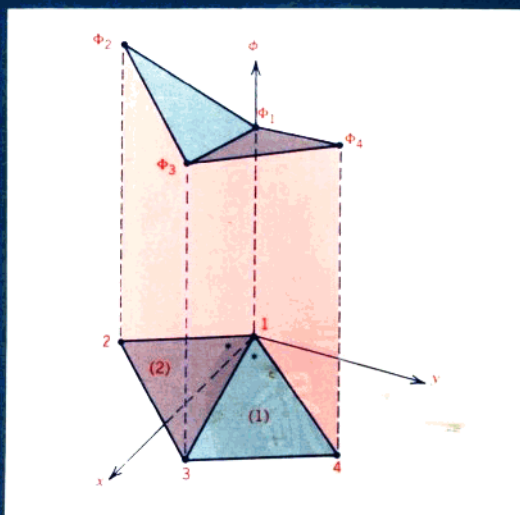
應用有限元素分析

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

(第二版)

原著者：L. J. Segerlind

譯述者：曾 昭 仁



科技圖書股份有限公司

應用有限元素分析

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

(第二版)

原著者：L. J. Segerlind

譯述者：曾 昭 仁

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書名：應用有限元素分析（第二版）
原著者：L J. Segerlind
譯述者：曾昭仁 董建良
發行人：趙國華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市重慶南路一段49號四樓之一
電話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號 0015697-3

七十六年三月初版

特價新台幣 200 元

序

有限元素法，現被廣泛應用於求解工程與物理的微分方程式問題，並為電腦輔助設計的計算基礎。因此，基本的有限元素法，成為解決結構分析、熱傳導與流體力學的工具。

本書包括有限元素法的基本概念及其在分析平面結構、熱傳導的二維連續問題、無旋轉流體與彈性等的應用。課程適於大專較高年級或研究所學生。假設以前尚未修習結構分析與有限元素法等課程。

本書與第一版的主要差別在於新加五章平面結構的分析，練習題也增多，並用 Galerkin 法解決有關場問題等。

內容的安排，是本書的特色，使本書更適於作為教科書。本書共分四篇；基本觀念、場問題、結構與固體力學問題，以及線性與二次元素等。在基本觀念中包括六章，並含研究場問題及 / 或結構與固體力學應用的基本知識。完成基本觀念後，可再研讀第二篇場問題，或第三篇，結構與固體力學問題，這兩篇各自獨立。第四篇，線性與二次元素，包含建立形狀函數與數值積分元素矩陣的一般步驟。該篇可在完成一些連續應用後再修。

本書的安排，可讓教師有三種教法：(1) 由場與固體力學的應用有限元素的一般課程，(2) 強調求解場問題的課程；(3) 強調固體力學問題解的課程。作者所教的課程屬第一類型，計含第一到第十一章，十七，十八，二十三與二十四章，共約四十堂課。

農工與機械工程學生在學習平面結構分析時，需有結構矩陣分析的知識，但實際上沒有時間上這些課程以獲得這方面的內容。結構分析方法基於最小位能原理。彈性問題的有限元素分析可求得其公式。

Galerkin 法，可用來解場問題。因此法可為高年級與研究所新生所接受。Galerkin 法有兩個好處。有關邊界情形的微分可予簡化，並可用一階微分來表示微分方程式。其缺點在於，沒有考慮內部元素

2 應用有限元素分析

的表面問題。但內部元素亦發生在變量公式中當其被正確運用時。

習題作業超過 300 題，大部分章節至少有 10 題，甚至有多於 15 題的。這些習題包含數字計算、解析導數、重要積分的計算以及有關電腦求解問題。

有限元素法必需用數位電腦來完成，因此，本書中列有四個電腦程式。程式可適於初次使用者，並可偵出誤差。這些檢驗十分有用，且可消去大部分的資料輸入誤差。

在此感謝我的MMM 809 級的學生。他們的發問與建議對本書有莫大貢獻，且使本書內容安排更為完整。同時感謝在寫作期間內人 Donna 的耐心。

Larry J. Segerlind.

應用有限元素分析

目 錄

序

第一篇 基本觀念

第一章 導 論

1.1 邊界值問題的解.....	4
1.2 數值解的積分公式.....	6
1.3 位能公式.....	12
1.4 有限元素法.....	12
1.5 目的與安排.....	14
1.6 習 題.....	15

第二章 一維線性元素

2.1 分割區域成各元素.....	19
2.2 線性元素.....	20
2.3 連續分段圓滑方程式.....	24
2.4 符號的註解.....	25
2.5 習 題.....	25

第三章 有限元素解例

3.1 加權函數.....	31
3.2 加權剩餘積分.....	33
3.3 積分的計算.....	35
3.4 簡支樑分析.....	37

2 應用有限元素分析

3.5 矩陣符號.....	40
3.6 習題.....	41

第四章 元素矩陣：GALERKIN 公式

4.1 元素矩陣.....	45
4.2 直接剛性法.....	49
4.3 簡支樑分析.....	50
4.4 大域剛性矩陣的性質.....	53
4.5 計算的一般流程.....	56
4.6 習題.....	56

第五章 二維的元素

5.1 二維的格子.....	57
5.2 線性三角形元素.....	62
5.3 雙線性矩形元素.....	67
5.4 連續分段圓滑式.....	72
5.5 習題.....	73

第六章 座標系

6.1 區域座標系.....	77
6.2 自然座標系.....	80
6.3 矩形元素.....	83
6.4 三角形元素：面積座標.....	83
6.5 連續性.....	89
6.6 習題.....	91

第二篇 場問題

第七章 二維場方程式

7.1 主宰微分方程式.....	99
------------------	----

7.2	元素矩陣的積分	101
7.3	元素矩陣：三角元素	105
7.4	元素矩陣：矩形元素	108
7.5	習 題	111

第八章 非圓形斷面的扭轉

8.1	一般原理	115
8.2	方形桿的扭轉	117
8.3	剪應力分量	121
8.4	扭轉力矩的計算	124
8.5	正方形桿的電腦解法	125
8.6	習 題	128

第九章 微分的邊界條件：點源與淵

9.1	微分的邊界條件	133
9.2	元素積分的計算	136
9.3	點源與點淵	140
9.4	習 題	143

第十章 無旋轉流動

10.1	理想流體的流動	145
10.2	地下水流動	148
10.3	電腦例題	149
10.4	習 題	154

第十一章 由傳導與對流的熱傳遞

11.1	一維散熱片	159
11.2	組合牆	164
11.3	二維散熱片	166
11.4	長的二維體	168

4 應用有限元素分析

11.5	電腦例題	172
11.6	習題	174

第十二章 聲波振動

12.1	一維的振動	183
12.2	二維振動	187
12.3	習題	190

第十三章 軸對稱場問題

13.1	微分方程式	191
13.2	軸對稱元素	192
13.3	GALERKIN法	194
13.4	元素矩陣	197
13.5	微分的邊界條件	200
13.6	習題	204

第十四章 時間相關場問題；理論考慮

14.1	GALERKIN法	207
14.2	一致公式	208
14.3	成團公式	210
14.4	在時間內的有限差解法	214
14.5	桿的熱傳導	217
14.6	習題	220

第十五章 時間相關場問題：實際考慮

15.1	實質真實性	223
15.2	數值振盪	224
15.3	成團或一致公式	228
15.4	二維元素	231
15.5	微分的邊界條件	234

15.6 習 題	235
----------	-----

第十六章 二維場問題用電腦程式

16.1 方程式	237
16.2 程式列式	238
16.3 習 題	241

第三篇 結構與固體力學

第十七章 軸向力構件

17.1 一維模型	263
17.2 最小位能原理	264
17.3 應變能方程式	265
17.4 軸向力構件系	268
17.5 矩陣符號	272
17.6 習 題	273

第十八章 元素矩陣：位能公式

18.1 軸向力元素	275
18.2 軸向力構件系	279
18.3 一般公式	280
18.4 內 力	282
18.5 習 題	283

第十九章 構架元素

19.1 結構模式	285
19.2 元素矩陣	286
19.3 樞接構架的分析	289
19.4 習 題	295

第二十章 樑元素

20.1	結構模式	301
20.2	應變能力方程式	303
20.3	位移方程式	304
20.4	元素剛性矩陣	306
20.5	靜不定樑的分析	308
20.6	習題	312

第二十一章 平面框構元素

21.1	結構模式	319
21.2	元素剛性矩陣	320
21.3	內力	323
21.4	習題	326

第二十二章 彈性理論

22.1	應力、溫度與Hooke定律	331
22.2	應變 - 位移方程式	333
22.3	元素矩陣	334
22.4	應力分量	338

第二十三章 二維彈性

23.1	平面應力與平面應變	339
23.2	位移方程式	341
23.3	元素矩陣	344
23.4	元素應力	351
23.5	電腦程式的討論	352
23.6	習題	357

第二十四章 軸對稱彈性

24.1	圓柱座標定義	361
24.2	軸對稱彈性	363
24.3	元素矩陣	364
24.4	表面負載	367
24.5	習 題	370

第二十五章 結構與固體力學用電腦程式

25.1	程式 FRAME	375
25.2	FRAME 的例題	387
25.3	程式 STRESS	389
25.4	STRESS 的例題	400

第四篇 線性與二次元素

第二十六章 元素形狀函數

26.1	區域節點編號	409
26.2	計算形狀函數	411
26.3	一維元素	412
26.4	三角形元素	413
26.5	四邊形元素	416
26.6	習 題	420

第二十七章 元素矩陣

27.1	改變積分內的變數	423
27.2	數值積分技巧	427
27.3	積分舉例	431
27.4	計算 $[B]$	433
27.5	表面積分的計算	436

27.6	習題	438
------	----	-----

第二十八章 等向參數用電腦程式

28.1	$[K^{(e)}]$ 與 $\{f^{(e)}\}$ 的電腦計算法	441
28.2	曲線邊界	443
28.3	解時間相關的場問題	444
28.4	電腦程式 ISOFLD	445
28.5	電腦例題	459

附錄 I	參考書目	465
------	------	-----

附錄 II	矩陣符號	467
-------	------	-----

附錄 III	矩陣方程式的微分	469
--------	----------	-----

附錄 IV	修正方程式組	473
-------	--------	-----

IV.1	穩態方程式	473
------	-------	-----

IV.2	時間相關方程式	474
------	---------	-----

附錄 V	部分習題答案	477
------	--------	-----

第一篇 基本觀念

前六章，是有限元素法應用的基本觀念。這些章節在進修應用章節前應先講解。

第一章 導 論

有限元素法 (finite element method), 是用來求解工程問題。計分兩部分：第一部分用離散元素 (discrete elements) 求得接點位移與架構的構件力 (member force)。第二部分用連續元素 (continuum element) 以求熱傳導、流體力學與固體力學問題的近似解。使用離散元素的公式，稱為“結構的矩陣分析 (matrix analysis of structures) 可得與架構的古典分析相同結果。第二部分是要求得稱為節點 (node) 的特定點之參數值 (parameters)。一般有限元素電腦程式，對此兩部分均可解出。故有限元素法，可兼指離散元素與連續元素兩種。

有限元素法結合一些數學觀念，以產生線性或非線性方程組。通常方程式組有 20 到 20,000 或更多的方程式。故若無大型電腦求解，就沒有多大實際價值。

我們無法說出有限元素法自何時開始，因其基本觀念早在一百五十年或更久發現。目前的方法，是由對結構分析到連續體的研究而起。因太空探險的需要，發展多功能的電腦程式，並使有限元素法更為完整，並用於飛機、飛彈、太空器等的設計。

有限元素法可應用於由不同材料與混合邊界所形成的不規則形體。並用於穩態 (steady-state) 及時間相依 (time dependent) 並包含非線性材料問題。使用者輔助 (user-independent) 的程式與分析結果並列在圖上的程式，一樣都可得到由形狀定義的點 (shape-defining points)，有限數目形成的格子 (grid)，以供更深入的研究。

有限元素法，是電腦輔助設計程式 (computer-assisted design program) 的計算基礎。因電腦輔助設計的應用日增，使工程師必需具有有限元素法的常識。

1.1 邊界值問題的解

由微分方程式所主宰的實際問題的最佳解法是求得其解析解。但解析解並不易求出。若考慮的區域是不規則形，就很難描述其邊界。由不同材料所組成的物體，其區域很難用數學描述。含有異向性物質 (anisotropic materials) 的問題與含非線性項的方程式，一樣很難求出其解析解。

通常，用數值法求出其近似解。所有數值解都可產生獨立參數的離散點 (discrete points) 值。完整的答案過程，即為重複改變參數求解的過程。雖是離散點的答案，但仍可提供重要的分析資料。

求微分方程式的數值解要用幾個步驟，分成下列三個基本部分：
(1)有限差分法 (finite difference method)；(2)變分法 (variational method) 及(3)加權剩餘值法 (weight a residual)。下列為小節，簡單討論此三法。

1.1.1 有限差分法

使用差分方程式 (difference equation)，有限差分法可得近似的主宰微分方程式的導數。此法在求解熱傳導與流體力學與邊界與座標軸平行的二維區域十分有用。但當區域為曲面或不規則的邊界時，此法變得冗長，且無合適的電腦程式。

1.1.2 變分法

變分法 (variational method)，是對函數作積分而得一數目。每個新函數可產生一新數目。產生最小數目的函數，有滿足特定微分方程式的特性。為明悉其觀念，考慮下列積分

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{D}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - Qy \right] dx \quad (1.1)$$

給一特定方程式 $y = f(x)$ 時，印算出 Π 值。可看出如何產生 Π 的最小數值的特定方程式 $y = g(x)$ ；為下列微分方程式的解：