數學第八册目錄

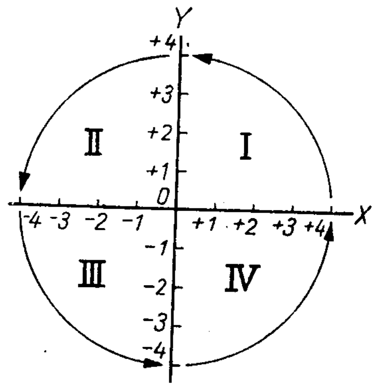
上 册 數

下 册 體

上册　數

直角坐標軸及與軸平行的直線

我們曾經學過幾個例子，說明如何用圖解法將函數表示出來 748
。現在我們要對這種方法作進一步的研究了。我們用兩條互成垂直之直線，即所謂直角坐標軸作爲研究之基礎(參看〔748a〕圖)；我們將此兩軸分別定名爲X軸與Y軸，一般以Y軸作爲“縱軸”，即與圖紙左（或右）邊成平行；以X軸作爲“橫軸”即與圖紙上(或下)邊成平行。（但也可選擇坐標軸的其他任何位置）。



748 a

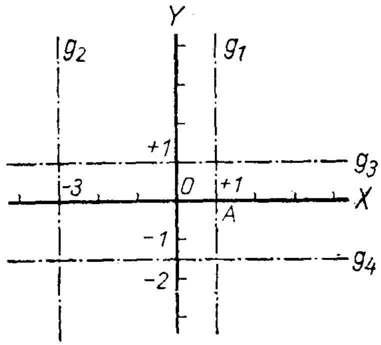
兩軸應作量尺用。因此將每軸分成相等的許多分割，例如半厘米爲一分割（但對Y軸也可選擇與X軸不同的度量單位）。**附記於軸上的只是表示尺度的數目**，而非尺度單位。在兩軸交點上的尺度數目爲零，那是兩軸所共有的。在Y軸上依照慣例，向上排列者爲正數 1, 2,…等，向下者爲負數；在X軸上向右排列者爲正數，向左者爲負數；均以零作原點。X軸之有如此分割，令我們想起第一册中第〔10〕節所講向兩邊無限延長的數字直線，其情況頗爲相同。

假定爲無限大的繪圖平面被二軸分爲四個四分之一（**通稱象限**）；每一象限以二射線爲界，而此二射線相交互成直角；此外，每一象限又可假定無限度的擴大，另成一個範疇。

第一象限是以X軸的正射線和Y軸的正射線爲界，第二象限是以Y軸的正射線與X軸的負射線爲界，第三象限是以X軸和Y軸的負射線爲界，第四象限是以Y軸的負射線與X軸的正射線爲界。象限之編號是依兩軸交點向左旋轉爲順序；參閱

箭頭所示之方向。

如〔748b〕圖所示，我們在坐標軸中畫了四條軌跡，第一條直線 g_1 是當作圖面上每一點的軌跡，這些點與 Y 軸相距有 $x=+1$ 的長度單位；g_1 可視爲 X 軸上（$+1$）分劃的延長線。譬如對於 X 軸的 A 點適用等式 $x=(+1)$，是則此等式也適用於 g_1 直線上任何一點：這些點中每一個點皆與 Y 軸相距 $+1$。這段距離是在 X 軸上量得（此軸即作爲量尺之用）；因此，我們即以等式 $x=+1$ 表示直線 g_1 上每一點與 Y 軸有關的位置。



748 b

初學者務必切實注意：等式 $x=(+1)$ 是指與 Y 軸相距的距離。

直線 g_2 上每一點與 Y 軸相距的遠近等於 X 軸上分劃（-3）的一段。所以對於這直線上每一點均適用等式 $x=(-3)$，而此等式可當作那些點與 Y 軸相距的簡單表示。

g_3 是圖面上與 X 軸相距爲（$+1$）各點的軌跡。這段與 X 軸的距離自然不能在本軸上去量，却用 Y 軸當作量尺以達此目的，其距離爲 $y=(+1)$。務請注意：等式 $y=(+1)$ 是代表與 X 軸相隔的距離！

請各位拿一支尺量一量圖面上某一點與 X 軸的距離！量的時候必將尺放在與 Y 軸平行之處。

現在各位對於 g_4 直線上每一點可以列出正確的等式：$y=(-1.5)$。

總括言之：

x 的大小是表示距 Y 軸的距離，以 X 軸當作量尺量之；y 的大小是表示距 X 軸的距離，以 Y 軸當作量尺量之；x 與 y 都是表示此等距離的尺度數。

我們再說一遍：各位如將平行於 X 軸之直線視作 Y 軸上一個小分劃線之延長線，或將平行於 Y 軸之直線視作 X 軸上一個小分劃線之延長線，則各位便不會搞錯了。

初學者對於這種相互關係常有困惑之感，但如依照以上所講仔細加以分析，定能很快解除這種困惑。但開始量的時候，我們仍可給各位來一個小小的幫助：一經提及量 x 值時，就把小尺放在 X 軸的分劃方向內，通常的放法是 | 。但如要量 y 值時，就把小尺放在 Y 軸的分劃方向內，其位置有如—。

因爲好比 g_4 直線上每一點都適用等式 $y=(-1.5)$，所以由此諸點組成的這條直線自可令其適合 $y=(-1.5)$ 的方程式；換言之，就是說：$y=(-1.5)$ **爲此直線的方程式**；同樣，$x=(-3)$ 爲直線 g_2 的方程式，餘類推。

各位諒必已經看出，大寫字母 X 和 Y 是用來表示軸；而小寫字母 x 和 y 却用來表示與軸相距的一般尺度數。

我們倘若回顧一下以上所講的一切，即可獲得一種特殊而十分重要的結果：我們可在一個所畫的坐標軸內，不以圖畫却以方程式，即純算術的算式，表示一條直線的位置（暫時只討論與軸平行之直線）；反過來說，亦可借助於附有分劃的直角坐標軸，將純算術的方程式設想變成幾何學的圖形。揭發這種數字與體形（及其位置）之間的相互關係，仍爲我們今後研究數學的主要課題；並且研究到愈是高深的部分，則此種關係將使吾人愈爲明白。

習　題 749

1) 在一直角坐標軸內畫下列各直線：

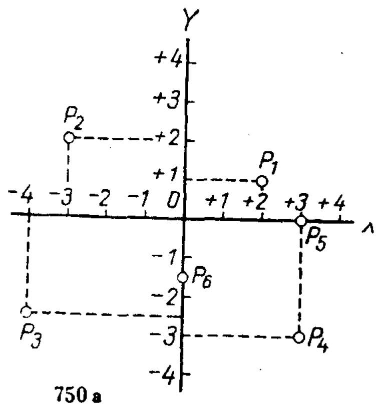
a) $y=(+2.5)$； *b*) $y=(-2.5)$； *c*) $x=(-2.5)$； *d*) $x=(+3.25)$；*e*) $x=(+2.5)$

2) 那一方程式屬於 *a*) 與 Y 軸平行，其距離爲 (-4.2) 之直線； *b*) 與 X 軸平行其距離爲 $(+2.4)$ 之直線？

3) 那一方程式屬於 X 軸，又那一方程式屬於 Y 軸？

在直角坐標軸內決定點的位置

750　在〔750a〕圖內，P_1 點與 Y 軸相距爲 $x_1=(+2)$，與 X 軸相距爲 $y_1=(+1)$；試問該點位於何處？參閱第四册中之〔405〕節！所求之點決定於兩條軌跡，第一條是平行於 Y 軸之直線，其距離爲（+2)，第二條是平行於 X 軸之直線，其距離爲(+1)。（我們再說一遍：在坐標軸上只寫明尺度數，不寫出尺寸之單位）。爲了決定一點在坐標軸內之位置，須畫出決定該點之二軌跡，其交點則以一小圓圈表明之。



750 a

在算術上僅有一條方程式已足顯明表示一直線與一軸平行之性質（參閱〔748〕節）；但爲表示一個點，因其位置之確定有賴於兩條如此的平行線，則非有兩條方程式不可。我們將此二直線，即一條與 Y 軸平行，一條與 X 軸平行者，及其與交點 P_1 的關係，簡單扼要表明如下：

$$\boxed{P_1\begin{cases}x_1=+2\\y_1=+1\end{cases}}$$

或如：P_1 $(x_1=+2；y_1=+1)$。一向多半用以約束相對數之圓括號，爲使各位習慣於不用括號的一般寫法，從現在起我們往往把它去掉了。

P,x 與 y 都有同樣的指數 1，這是提醒我們在它們之間必有聯帶關係存在。

現在不用再加說明，各位當可瞭解〔750a〕圖內其餘各點的意義：

$$P_2\begin{cases}x_2=-3\\y_2=+2\end{cases}\quad P_3\begin{cases}x_3=-4\\y_3=-2.5\end{cases}\quad P_4\begin{cases}x_4=+3\\y_4=-3\end{cases}\quad P_5\begin{cases}x_5=+3\\y_5=0\end{cases}\quad P_6\begin{cases}x_6=0\\y_6=-1.5\end{cases}$$

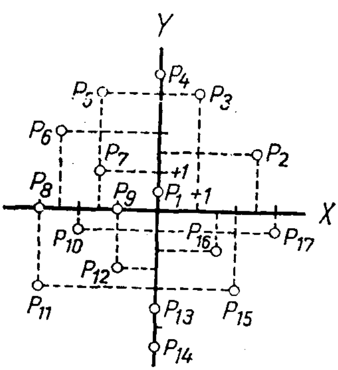
請各位在兩軸之交點附近畫幾個點，並求每一點的 x 值及 y

值！參照上面〔749〕節第三習題！

例如：$P\begin{cases}x=+0.01\\y=+0.01\end{cases}$； 極限：$P\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$爲兩軸之交點。

此外我們還要認識幾個新名詞：一個點的 x 值（比較準確的說法是：在 X 軸上量得該點與 Y 軸相距的尺度數）稱爲此點的**橫標**(Abszisse)。一個點的 y 值（在 Y 軸上量得該點與 X 軸相距的尺度數）稱爲此點的**縱標**（Ordinate)。一對距離數字有其共同名稱，叫做**坐標** (Ko-ordinaten)。依照上面的說法，X 軸亦可稱爲**橫坐標軸** (Abszissen-Achse)，或簡稱“橫軸”，Y 軸亦可稱爲**縱坐標軸** (Ordinaten-Achse), 或簡稱縱軸；附有分劃的坐標軸（或十字軸）則稱爲**坐標系** (Koordinaten-System)。

習　題： 751



751 a

1）在方格紙上（最好是毫米方格紙），畫一個有分劃的正坐標系，然後確定下列各點之位置：

$P_1\begin{cases}x_1=+6\\y_1=-2\end{cases}$ $P_2\begin{cases}x_2=0\\y_2=-2\end{cases}$

$P_3\begin{cases}x_3=+5\\y_3=0\end{cases}$ $P_4\begin{cases}x_4=-2\\y_4=+4\end{cases}$

$P_5\begin{cases}x_5=+6\\y_5=-2.5\end{cases}$

2）求〔751a〕圖內所畫各點之方程式！

在直角坐標軸內的函數 752

在第七册中，我們已學過各種不同的函數 $y=f(x)$，卽各種不同的方程式，式內等號的左邊譬如是 y，右邊則是在任何一種算式中與一定的數或普通數相結合之 x；這些方程式告訴我們，式內 x 與 y 二值之間有着某種算學方面的聯帶關係存在，故當隨意變動 x 值時，y 值亦必隨之而變動。

我們現在選擇此種函數的三個例題，將其 y 值與 x 值的連

帶關係先在表內明白寫出來。

表的標題是三個函數方程式；每個式子包含一種法則，根據這個法則要從已知的 x 值算出 y 值來。標題下面則對於每一個方程式指定三個數字，作爲演算的例題。

1) $y=\frac{x}{2}+2$		2) $y=x^2-3$		3) $y=\frac{12}{x}$	
$x_1=(-4)$	$y_1=\frac{-4}{2}+2$ $=0$	$x_1=0$	$y_1=0-3$ $=(-3)$	$x_1=(+2)$	$y_1=\frac{12}{2}$ $=(+6)$
$x_2=(-2)$	$y_2=\frac{-2}{2}+2$ $=(+1)$	$x_2=(+1)$	$y_2=1-3$ $=(-2)$	$x_2=(+3)$	$y_2=\frac{12}{3}$ $=(+4)$
$x_3=(+2)$	$y_3=\frac{+2}{2}+2$ $=(+3)$	$x_3=(+2)$	$y_3=4-3$ $=(+1)$	$x_3=(+6)$	$y_3=\frac{12}{6}$ $=(+2)$

我們倘欲將一已知函數方程式，譬如 $y=\frac{x}{2}+2$，用圖來表示，則可將每個任意假定的 x 值依照〔750〕節所講，畫成 Y 軸的平行線，並將由函數方程式算出來的所屬 y 值也畫成 X 軸的平行線，結果表上每兩個互有關聯的，附有相同指數之值，便可促成二軌跡決定一點的畫法。

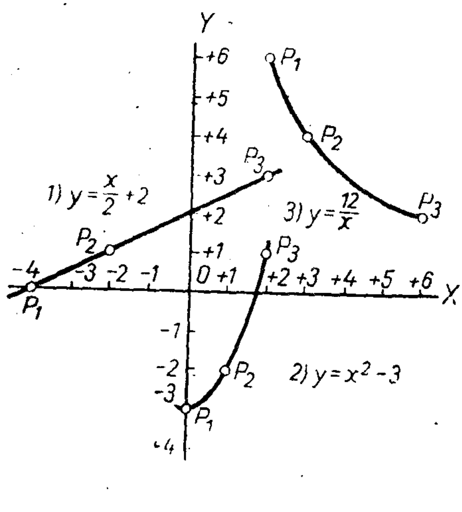
1）對於函數 $y=\frac{x}{2}+2$，好比畫出三個點

$$P_1\begin{cases}x_1=(-4)\\y_1=0\end{cases}$$

$$P_2\begin{cases}x_2=(-2)\\y_2=(+1)\end{cases}$$

$$P_3\begin{cases}x_3=(+2)\\y_3=(+3)\end{cases}$$

對〔752a〕圖一望而知此三點是在一條直線上。



752 a

2）對於函數 $y=x^2-3$ 繪出三點

$$P_1\begin{cases}x_1=0\\y_1=(-3)\end{cases}\quad P_2\begin{cases}x_2=(+1)\\y_2=(-2)\end{cases}\quad P_3\begin{cases}x_3=(+2)\\y_3=(+1)\end{cases}$$

這三點顯然不在一條直線內，却在一條曲線上，這是我們暫時隨便經過三點畫出來的。

3）對於函數 $y=\dfrac{12}{x}$ 畫出

$$P_1\begin{cases}x_1=(+2)\\y_1=(+6)\end{cases}\quad P_2\begin{cases}x_2=(+3)\\y_2=(+4)\end{cases}\quad P_3\begin{cases}x_3=(+6)\\y_3=(+2)\end{cases}$$

這三點也不在一條直線上。

線性函數或一次函數

我們現在進一步地討論一種函數，由此函數可畫出位于一條 753
直線上的諸點。這種函數稱爲線性函數或一次函數，因爲在這些函數方程式內，x 與 y 只出現一次乘冪卽 x^1 與 y^1，而不是 x^2，x^3 等；在函數方程式中如果出現帶有根號之 x 或 y，又或出現 $x\cdot y$ 之積者，則此等方程式都不是線性函數。對於後者，在〔752〕節中第 3）種情形下已有一個例子，因爲方程式 $y=\dfrac{12}{x}$ 之意義與方程式 $x\cdot y=12$ 完全相同，此式是由 $y=\dfrac{12}{x}$ 簡單變形而得，各位對此諒必不言可喻。

插　值　法 754

函數 $y=\dfrac{x}{2}+2=0.5x+2$ 的圖解，我們已在上面〔752a〕圖內肇其端，也就是說做了三個點的計算和繪圖。這三點是在一條直線上，剛才已經提及了。然而這種說法尚未證明，依此方程式計算其位置的其他各點亦位於此一直線之上。我們尚須計算更多的這一類的點，並且設法插入之（卽所謂插值法）：

$$x=(-3)^{*)};\quad y=0.5\times(-3)+2=(+0.5)$$

$$x=(-2.5);\quad y=0.5\times(-2.5)+2=(+0.75)$$

附註：*）請各位暫先獨立計算與 x 有關之函數！

$x=(0)$；　　　$y=0.5\times(0)+2=(+2)$

$x=(+0.5)$；　$y=0.5\times(+0.5)+2=(+2.25)$ 等等。

習　題：

依照同樣的方程式再算出許多點來，並將這許多點繪入直角坐標系之內！試問各位對於這些點的位置有何認識？

各位雖已確認由函數 $y=0.5x+2$ 求得各點，均係位於一條直線上；但仍然無法證實此函數中其他每一個點必在此直線內而不在線外。縱使各位求得，而且畫上 200 個或再多的點，在數學上也不能十分肯定的答復此問題，因為在這些點的中間還有無窮多的點，是各位未能注意到的。此外大家要知道，就是我們的圖畫和量測，絕對做不到百分之百準確的。但目前我們暫且不必過份的小心，而假定所有這些點都是在一條直線上。至於這假定是否正確，將在〔761〕節加以研討。

755　一次函數的範式：$y=mx+b$

一個函數的許多點，必須函數方程式中除了 y 及 x 之外，還含有一定的數字（常數），才能畫出，例如方程式 $y=0.5x+2$，其中數字 0.5 與 2*）即為常數。但如已知方程式為 $y=mx+b$，即式內普通數（m 與 b）代替了一定的數字（0.5 與 2），那就無法畫出這函數所屬的一定之點。可是方程式 $y=mx+b$ 可用以概括許多有一定數字的類似方程式，如 $y=0.5x+2$ 及 $y=3x+4$ 等等，成為一般的**範式**（Normalform）。

我們要問：像這種一次函數的範式究竟有什麼用處呢？

答：我們有了這樣一個範式，便可謀求所有這一類的定函數之解答，請看下面〔756〕節，便知其詳。

首先我們要練習，把任意一次函數方程式"化為範式"，意即使之變形，而符合下面的形式

$$\boxed{y=mx+b}$$

附註：*）方程式 $y=x$ 亦屬此類函數方程式（因 $y=x+0$）。

例　題：

1）$3x+4y-10=0$；兩邊減去 $3x$，又加上 10：

$4y=-3x+10$；兩邊以 4 除之：

$y=\frac{-3}{4}x+2.5$；如將此式與範式作比較，可知：

$$m=\frac{-3}{4};\quad b=+2.5$$

2）$\frac{x}{y}=3-\frac{5}{2y}$；以 y 相乘：

$x=3y-2.5$；兩邊加 2.5：

$x+2.5=3y$；用 3 來除，再將兩邊調換：

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{6};\quad m=\frac{1}{3};\quad b=\frac{5}{6}$$

3）$\frac{1}{x}=\frac{10}{y}$；　以 $x\cdot y$ 乘兩邊：

$$y=10x=10x+0;\quad m=10;\quad b=0$$

習　題：

把下列各函數化爲 $y=mx+b$ 的範式，並對每一題特別指明 m 及 b 究得何值！

1）$3x+5y=4$；2）$5x-5y=(-4)$；3）$4x=15y$；4）$x=y$

m 與 b 可爲整數或分數；可爲正數或負數。

方程式 $y=mx+b$ 中的 m 與 b 二數有何幾何涵義？

a）先說 b 值 756

請各位將許多帶有常數的一次函數表現於直角坐標系之內，例如：

1）$y=x-3$；　2）$y=-\frac{2}{3}x+2$；　3）$y=\frac{3}{2}x-4.5$；

4）$y=-0.5x$ 試問在這些方程式中 b 值有多大？答：1）$b=(-3)$；2）$b=(+2)$；3）$b=(-4.5)$；4）$b=0$。

現在就請各位研究一下，在第一方程式的圖解中是否可於顯

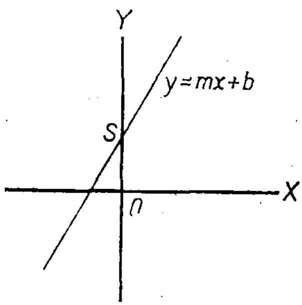
著的地位找到（-3）？又在第二條直線上找到（$+2$）？餘類推！

假如還有需要的話，我們再給各位帮助一臂之力：請各位加繪三條直線 5）$y=+2x+5$；6）$y=-3x+5$；7）$y=0.6x+5$！在此三式中都是 $b=(+5)$。試問這種巧合如何在圖解上顯示出來？

各位在圖解上諒必已經看出：直線 1）與 Y 軸相交於分割點（-3），直線 2）相交於分割點（$+2$），直線 3）相交于分割點（-4.5）等等，直線 5）至 7）都與 Y 軸相交於分割點（$+5$）。

是否僅有這七條直線的情形是如此，而且在 $y=mx+b$ 的函數方程式中，所有 b 值都能明確指出直線 $y=mx+b$ 與 Y 軸相交之處呢？我們自然不能畫出那麼多的直線以說明這種情形，而只能利用一般的觀察，卽用我們的直線範式，達此目的。

我們在〔756a〕圖內所畫的直線 $y=mx+b$ 乃用以代表任何一條直線，故在坐標軸上並沒有註明尺度數，同時也無須注意此直線與 X 軸相交者爲何種角度。



756 a

如果我們將直線與 Y 軸平行的情形（假如平行，則其方程式爲 $x=c$，而不含 y 值）撇開不談，那末直線 $y=mx+b$ 必然與 Y 軸在某一點相交；我們稱此點爲 S，它與 X 軸的距離是有各種不同的數值。但因它是在 Y 軸之上，無論如何其 x 值必須等於零（參看〔751〕節第一習題的 P_2 點！）

方程式 $y=mx+b$ 適用於有關直線上每一個點，自亦適用於交點 S：屬於 S 的 y 值必須等於所屬 x 值的 m 倍，再加上 b；但屬於 S 點的 x 值是零。因此此點的 y 值應爲：$y=m\cdot0+b=b$。至此就證明了每條直線 $y=mx+b$ 必與 Y 軸相交於 b 點。

若 b 爲正數，則此交點位於 X 軸的上方；若 b 爲負數，則位於 X 軸的下方；若 $b=0$，則位於 X 軸本身。

結果：假如一條直線是決定於方程式 $y=mx+b$（但式內之 b 須有一定的數值），則不用計算，便可立即畫出此直線與 Y 軸之交點。例如：$y=3.4x-0.6$；S 即在 Y 軸上 (-0.6) 的所在。各位以前畫過許多與本册有關的傾斜直線，現在就請各位證明對此斜線所理解之正確性！

b）再談 m 值 757

我們先從經過坐標原點即 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 之直線開始研究。因此，下列各函數方程式中必須 $b=0$，而所有方程式之形式應爲 $y=mx+0$，簡寫爲 $y=mx$。

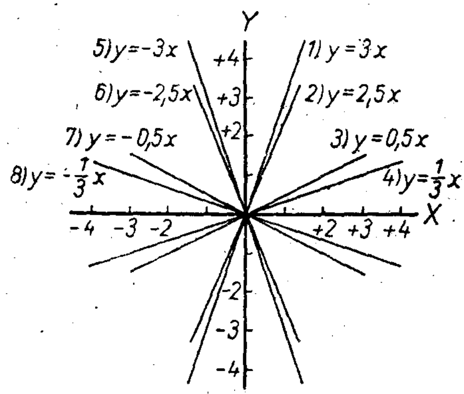
1) $y=3x$；2) $y=2.5x$；

3) $y=0.5x$；4) $y=\frac{1}{3}x$

5) $y=-3x$；6) $y=-2.5x$

7) $y=-0.5x$；

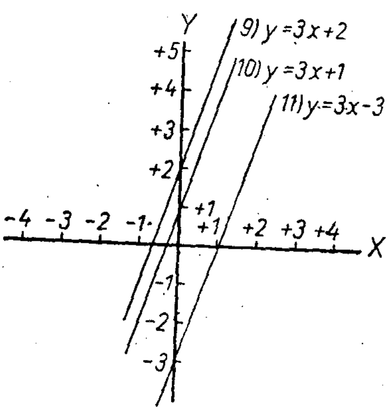
8) $y=-\frac{1}{3}x$



757 a

在任何情形下，此點 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 是已知的，故所求者僅爲第二點（用計算法），如同我們在〔751〕節所做的習題一樣。參看〔757a〕圖！

現在請各位試試看，能否在第一直線內找到（+3），在第二直線內找到（+2.5）等等！這種工作比求 b 是困難一些。假如還沒有求得答案的話，我們給各位來一個幫助：



757 b

〔757b〕圖內繪有三條直線：

9) $y=3x+2$；10) $y=3x+1$；　11) $y=3x-3$

這三條直線之 m 值（即 x 之因子）都是一樣的。試問在算術上，這種一致性，如何表現出來呢？

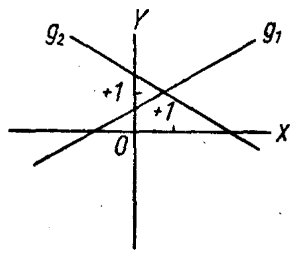
答：表現在這一點上，即這些直線與 X 軸相交而成的角度彼此乃是相等的。但數字 3 又隱藏在那裡呢？

要明瞭這一點，必須再說明對於各位不會十分生疏的定義。

直線的正斜度與負斜度

758　在〔758a〕圖中，我們是把直線 g_1 當作上昇樓梯（無梯級）的圖形，而將直線 g_2 當作下降樓梯的圖形（我們的運動方向常是從左到右）！

簡單的說：g_1 有正斜度，g_2 有負斜度（負恒指"相反"之意；參閱第一冊中之〔10〕節）。



758 a

現在又請各位仔細研究一下，在〔757a〕圖中所有上昇直線彼此相同之處在那裡？又所有下降直線彼此相同之處在那裡？

此問題的答案：

在所有上昇直線中，m 為正值；在所有下降直線中，m 為負值。

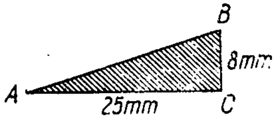
反過來說，各位對於每一個有 $y=mx+b$ 此一形式的方程式，一看便知其所代表的直線是昇或是降：若 m 是正，則直線上昇；若 m 是負，則直線下降（進行的方向恒由左至右）。

例如 $y=+2x-5$ 是一條上昇直線，$y=-2x+5$ 是一條下降直線。各位祇須依照〔756〕與〔751〕二節所講，畫出這些直線中每兩個點，而將其連成直線，便可確信無訛！

斜　度　比　例

759　到目前為止，我們只對 m 的**符號**說明它在幾何學上的意義

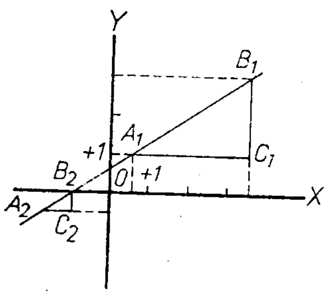
（參閱〔758〕節），還沒有說明m的**數值**。爲了要能作此說明，必須把斜度比例的定義先弄清楚。譬如說，在山上有一般最陡的公路，其斜度爲 32：100（或 0.32＝32%），這是什麼意思？〔759a〕



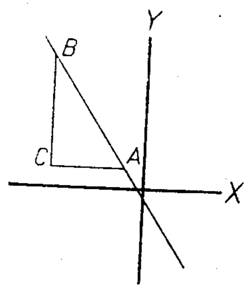
759 a

圖表示沿着公路 AB 一段的一個垂直切面。AB 這段路是在一個 32 與 100 的比例內上昇，假如 $BC:AC=32:100$（卽 BC 邊與 AC邊之比爲32比100）。換句話說，是將 AB 這段路線垂直投影於水平線上，並用量的方法定出投影垂直線 BC 與投影水平線 AC 間的比例。在〔759a〕圖內，量的結果是 $8mm:25mm=8:25=32:100=0.32:1=0.32=32\%$。

畫在直角坐標系之內的直線，也一樣可以決定它的斜度：我們觀察直線的任意一段，例如〔759b〕圖之 A_1B_1；經過 A_1 作



759 b



759 c

水平線，經過 B_1 作垂直線，兩線相交於 C_1。此直線的斜度比例就是投影垂直線與投影水平線相除所得的商，亦卽等於$\dfrac{B_1C_1}{A_1C_1}=\dfrac{10mm}{15mm}=\dfrac{2}{3}$。至於斜度比例與 A_1B_1 的長度無關，各位可在同一直線的另一分段 A_2B_2 加以確證：

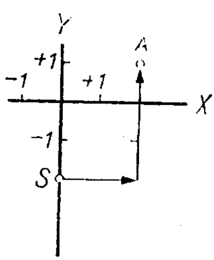
$$\frac{B_2C_2}{A_2C_2}=\frac{2.5mm}{3.75mm}=\frac{2\times1.25}{3\times1.25}=\frac{2}{3}$$

求下降直線的斜度比例時所用之方法完全相同：在〔759c〕圖

內選擇直線的任意一段 BA，通過 B 引垂直線，通過 A 引水平線；再由量測與計算決定 BC 與 CA 的比例。如〔759c〕圖所示，其比例應爲 $3:2=\frac{3}{2}=1.5$；然後根據〔758〕節所講，決定比例數的符號。現在請各位對〔757a 與 b〕圖所示每一條直線，求其斜度比例！在此又要仔細檢查一下，看看每次求得的比例數（即由 AC 除 BC 所得之商）是否在方程式本身就已有所發現？同時不要忘記，分數雖可有各種不同的形式，但其值則相同：$\frac{3.5}{7}=\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$ 等等（參閱第二册中之〔196〕節）。此外還要注意，每一個整數亦可寫成有分母1的分數，如$3=\frac{3}{1}$等等。

結論：函數方程式 $y=mx+b$ 的m是代表直線的斜度。如m爲正，則直線上昇；如m 爲負，則直線下降。

760 各位可應用這種見解，無須經過計算就能畫出線性函數 $y=mx+b$ 的圖形。例如：各位對於函數 $y=\frac{3}{2}x-2$，應首先注意 b 值。根據〔756〕節所講，它是表示直線與 Y 軸的交點，亦即直線 $y=\frac{3}{2}x-2$ 與 Y 軸相交於 $y=(-2)$ 之點。此交點 S 就繪於〔760a〕圖內的固定地點。由此決定直線的第二點時，要注意兩點相聯之直線乃依 3 與 2 的比例上昇。決定這一點，有幾種不同的方法，茲簡略說明如下：



760 a

1）從 S 向右取兩個度量單位，然後向上取三個度量單位，一直到 A 爲止；將 A 與 S 聯成直線。

2）從 S 向左取兩個單位，然後向下取三個單位。

3）從 S 向上取三個單位，然後向右取兩個單位。

4）從 S 向下取三個單位，然後向左取兩個單位。

請各位照着這四種方法從事練習！各位也可選用 6 與 4，或 9 與 6，以代替 3 與 2，因爲這種選擇只與線段的比例有關而已。

習　題：

依此方法畫直線 $y=\frac{3}{4}x+3$；$y=\frac{4}{3}x-2$；$y=x-5$；$y=\frac{1}{2}x+0.5$；$y=x+4$ 以及其他！

對於下降直線的畫法，各位可以獨立的去捉摹。例如：$y=-\frac{4}{3}x+4$；$y=-\frac{1}{2}x+5$；$y=-3x$，以及其他直線。各位試畫之後，便可了解作圖的步驟！

$y=mx+b$ 在任何情形下，以及代表每一段時，都必須是一條直線嗎？*)

這問題的答覆，在上面〔754〕節內是中斷了的，現在再提出來討論。 761

畫出函數 $y=mx+b$ 的許多點，再由圖證明所有點都在一條直線上，——我們已經看出，這個方法並不十分可靠。我們必須另闢一條新路，即不用圖解法，却用計算法以達目的。用計算法的時候，也免不了要畫圖；但只用以幫助我們易於了解計算的意義和方法而已。我們還想應用第 12 册及本叢書後半部才能詳細討論的初步構想作進一步的研究，此即所謂**微分計算**的入門（自然尚屬十分淺顯之初步理論）。——但請各位不要爲這新名詞而擔憂！我們會使各位從淺近之處着手研讀，只要稍爲用心，一定可以了解的。

假設已知函數方程式爲 $y=0.5x+1$。根據這個方程式決定好比兩點，如：

$$A\begin{cases}x_A=4\\ y_A=0.5\times4+1=3\end{cases};\qquad B_1\begin{cases}x_{B1}=10\\ y_{B1}=0.5\times10+1=6\end{cases}$$

〔761a〕圖即含有這兩個點。B_1 的橫坐標（參閱〔750〕節），即 $x_{B1}=10$，可視爲 $x_{B1}=x_A+D_x$ 之和；x_A 是 A 點的橫坐標；D_x 是 $x_{B1}-x_A$ 的差。我們以 D_x 表示此差數，因爲它是一個 x 值的差。我們也可將 $D_x=6$ 視爲必須加入 $x_A=4$ 的增量，使能獲得 $x_{B1}=10$。同樣又

附註：*)各位可將〔761〕與〔762〕兩節移到讀完第十一册之後再去學習