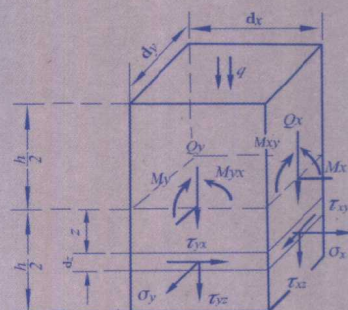
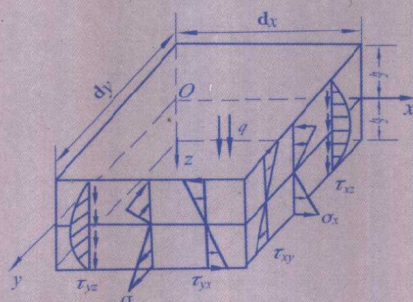
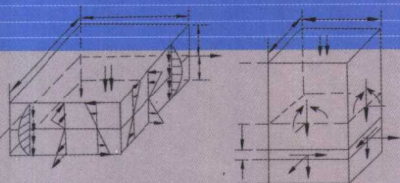


弹性力学

复习及解题指导

王俊民 江理平 编著

TAN XING LI XUE FU XI JI JIE ZH I ZHI DAO



同济大学出版社

同济大学力学辅导系列丛书

弹性力学复习与解题指导

王俊民 江理平 编著

同济大学出版社

内容提要

本书是同济大学力学辅导系列丛书之一。它是一本按照高等工业学校“弹性力学”课程教学要求编写的教学辅导书。全书共分九章,包括绪论,弹性力学问题的建立,平面问题的直角坐标理论和解答,平面问题的极坐标理论和解答,空间问题的解答,薄板小挠度弯曲问题,弹性力学的变分解法,平面问题的有限单元法和有限差分法。每章由三部分组成:复习导引,范例解析与同步练习和复习指导与小结,并附有三份模拟试卷。练习题和试卷均附参考答案。书中凡例题、习题号前标注*号的为部分重点高校历年来研究生入学考试的试题,而标注#号的则是具有一定难度的内容。

本书可作为高校工科类本科生、函授生的辅助性参考书,也可供相关专业的自学者、研究生和教师及科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学复习与解题指导/王俊民,江理平编著.

上海:同济大学出版社,2003.4

ISBN 7-5608-2535-4

I. 弹… II. ①王… ②江… III. 弹性力学—高等学校—教学参考资料 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 088204 号

同济大学力学辅导系列丛书

弹性力学复习与解题指导

王俊民 江理平 编著

责任编辑 解明芳 责任校对 郁 峰 封面设计 精 英

出 版
发 行

同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 常熟华顺印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 19.5

字 数 390000

印 数 1—5200

版 次 2003 年 4 月第一版 2003 年 4 月第一次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2535-4/O·225

定 价 25.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

前 言

本书的内容与国家有关部门制定的高等工业学校“弹性力学”课程教学基本要求相符,可作为高校工科类相关专业本科生、函授生的辅导性参考书,也可作为研究生、教师和科技工作者的参考资料。

本书每章由复习导引、范例解析与同步练习、复习指导与小结三部分组成。书中还附有三份模拟考试试卷。试卷及同步练习题均附有参考答案。

在内容的编排方面,本书立足于满足本科生的教学基本要求,也兼顾部分读者需进一步提高的愿望。安排了部分重点高校历来来研究生入学考试的试题(以*号标注)和具有一定难度的内容(以#号标注)。读者可根据本专业教学要求及个人需求酌情参阅。

在每章的复习导引部分,简明扼要地介绍了主要概念、理论及公式,并适当地配以框图和表格,使总体思路和各个知识点形成有机联系,使表述更为清晰、简练。

在范例解析与同步练习部分,编者结合长期的教学实践经验,针对初学者学习和解题时常易出现的错误进行了详细的分析。这部分的另一特点是:例题分类列出,并使部分例题表格化,采用同类(纵向)对比方法,对例题实施一题多解、一解多用;还采取多类(横向)对比方法,对相关例题进行多题对照,以加深读者的理解。此外,习题按类型与例题同步配置,使读者能在看与做上提高时效性。

本书每章以复习指导与小结作为结尾,对所涉及到的基本概念、方程、求解方法与技巧作归纳性总结,以利读者巩固有关的知识。

总之,使学习者掌握好弹性力学,是包括编者在内的众多教育工作者的共同心愿。在此向参考文献中提到的作者及关心本书出版的吴家龙、夏志皋、唐寿高教授表示敬意。由于编者学识有限,恳切希望广大读者、同行专家及时给予指正。

编者

2002年8月于同济大学

主要符号表

x, y, z	直角坐标
ρ, φ, z	柱坐标
ρ, φ	极坐标
r, θ, φ	球坐标
F_x, F_y, F_z	单位体积体力的直角坐标分量
F_ρ, F_φ, F_z	单位体积体力的柱坐标分量
F_ρ, F_φ	单位体积体力的极坐标分量
F_r, F_θ, F_φ	单位体积体力的球坐标分量
$f_\nu, \sigma_\nu, \tau_\nu$	法线为 ν 的微分截面上的总应力、正应力、切应力
$f_{\nu x}, f_{\nu y}, f_{\nu z}$	f_ν 的直角坐标分量
$\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$	单位面积面力的直角坐标分量
$\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$	单位面积面力的极坐标分量
F, Q	集中力
q, p, τ	连续分布载荷
ρ_1, ρ	密度
g	重力加速度
M	弯矩; 扭矩
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z (\tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$	直角坐标系中的正(切)应力分量
$\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \sigma_z (\tau_{\varphi z}, \tau_{z\varphi}, \tau_{\rho\varphi})$	柱坐标系中的正(切)应力分量
$\sigma_\rho, \sigma_\varphi (\tau_{\rho\varphi})$	极坐标系中的正(切)应力
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi (\tau_{\theta\varphi}, \tau_{r\varphi}, \tau_{r\theta})$	球坐标系中的正(切)应力
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z (\gamma_{yx}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$	直角坐标系中的正(切)应变分量
$\epsilon_\rho, \epsilon_\varphi, \epsilon_z (\gamma_{\varphi z}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{\rho\varphi})$	柱坐标系中的正(切)应变分量
$\epsilon_\rho, \epsilon_\varphi (\gamma_{\rho\varphi})$	极坐标系中的正(切)应变分量
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_\varphi (\gamma_{\theta\varphi}, \gamma_{r\varphi}, \gamma_{r\theta})$	球坐标系中的正(切)应变分量
u, v, w	位移的直角坐标分量
u_ρ, u_φ, w	位移的柱坐标分量
u_ρ, u_φ	位移的极坐标分量
u_r, u_θ, u_φ	位移的球坐标分量
$I_1, I_2, I_3 (J_1, J_2, J_3)$	应力(应变)不变量
$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_\rho + \sigma_\varphi + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi$	体积应力

$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi$	体积应变
E, G, ν	弹性(杨氏)模量, 切变模量, 泊松比
I_x, I_y, I_z	截面对 x, y, z 轴的惯性矩
I_ρ	极惯性矩
A, S	面积
l, h, a, b, t	长度, 高度, 宽度, 厚度
l, m, n	外法线的方向余弦
$U(x, y), U(\rho, \varphi)$	平面问题中的应力函数
$\Phi(x, y)$	柱体扭转和弯曲的应力函数
α	单位长度的扭转角
$\Psi(r, z)$	拉甫位移函数
K	应力集中系数
$w(x, y); w(\rho, \varphi)$	薄板弯曲时的挠度
D	抗弯刚度
$M_x, M_y; M_\rho, M_\varphi$	薄板单位宽度上的弯矩
$M_{xy}; M_{\mu\varphi}$	薄板单位宽度上的扭矩
$Q_x, Q_y; Q_\rho, Q_\varphi$	薄板单位宽度上的横向剪力
$V_x, V_y; V_\rho, V_\varphi$	薄板单位宽度上的总的分布剪力
$v_e; V_e$	应变能密度; 应变能
$v_c; V_c$	应变余能密度; 应变余能
$E_p; E_c$	弹性体的总势能; 弹性体的总余能
$W; V_w$	外力功; 外力势能
$\{f\}; \{\varepsilon\}; \{\sigma\}$	位移列阵; 应变列阵; 应力列阵
$[D]; [B]; [S]$	弹性矩阵; 应变转换矩阵; 应力转换矩阵
$[K]^e; [K]$	单元刚度矩阵; 总刚度矩阵
$\{\delta\}; \{R\}$	整体结点位移列阵; 整体结点载荷列阵

目 录

第一章 绪论	(1)
一、复习导引	(1)
二、范例解析与同步练习	(5)
三、复习指导与小结	(7)
第二章 弹性力学问题的建立	(11)
一、复习导引	(11)
二、范例解析与同步练习	(19)
三、复习指导与小结	(36)
第三章 平面问题的直角坐标理论和解答	(39)
一、复习导引	(39)
二、范例解析与同步练习	(47)
三、复习指导与小结	(85)
第四章 平面问题的极坐标理论和解答	(88)
一、复习导引	(88)
二、范例解析与同步练习	(94)
三、复习指导与小结	(142)
第五章 空间问题的解答	(146)
一、主应力、主应变、主方向、应力(应变)状态不变量、最大切应力	(146)
二、基本方程的柱坐标形式、轴对称问题的解答	(153)
三、基本方程的球坐标形式、球对称问题的解答	(162)
四、等截面直杆的扭转	(165)
五、等截面悬臂梁弯曲的应力解法	(174)
六、复习指导与小结	(179)

第六章 薄板的小挠度弯曲	(182)
一、复习导引	(182)
二、范例解析与同步练习	(188)
三、复习指导与小结	(211)
第七章 弹性力学的变分解法	(214)
一、位移变分解法复习导引	(214)
二、位移变分解法范例解析与同步练习	(219)
三、应力变分解法复习导引	(239)
四、应力变分解法范例解析与同步练习	(242)
五、复习指导与小结	(248)
第八章 平面问题的有限单元法	(252)
一、复习导引	(252)
二、范例解析与同步练习	(257)
三、复习指导与小结	(273)
第九章 有限差分法	(276)
一、复习导引	(276)
二、范例解析与同步练习	(279)
三、复习指导与小结	(287)
模拟试卷一	(288)
模拟试卷二	(290)
模拟试卷三	(292)
参考答案	(295)
参考文献	(304)

第一章 绪 论

一、复习导引

(一) 弹性力学研究的对象和内容

弹性力学研究弹性体在外界因素影响下的应力、应变和位移,其研究对象主要为梁、柱、坝体、无限弹性体等实体结构以及板、壳等受力体。弹性力学与同属固体力学范畴的其他力学课程在研究对象和内容方面的比较见表 1-1。

表 1-1 不同力学课程主要研究对象和内容的比较

课程	研究对象	研究的主要内容
弹性力学	弹性体	梁、柱、坝体、板壳等受力体的应力、应变和位移的精确分析
材料力学	杆状构件	梁、柱等杆件在拉、压、弯、扭、剪状态下的应力和位移
理论力学	刚 体	刚体的静、动力学(约束力、速度、加速度)分析
结构力学	杆系结构	桁架、刚架等杆系结构的约束力、内力与位移的计算
塑性力学	弹塑性体	结构的弹塑性分析

(二) 弹性力学与其他课程之间的关系

弹性力学以高等数学、材料力学等课程知识为基础,同时又为塑性力学、土力学、板壳力学等课程作铺垫,是土木建筑、机械工程、航空、造船等专业的一门重要的技术基础课。弹性力学与部分相关课程间的关系见图 1-1 所示。

(三) 弹性力学分析和解决问题的方法

1. 从弹性力学观点看,在外界因素影响下,物体内产生的应力、应变和位移(基本未知量)是坐标的连续函数,为无限自由度问题。这些未知量单凭静力平衡条件是无法确定的,需要综合考虑静力学、几何学和物理学三方面的因素来确定。

弹性力学分析方法比较严密,是在无附加计算假定的情况下,从物体中任一点取

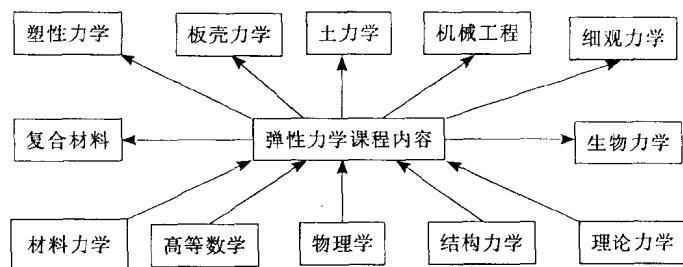


图 1-1 弹性力学与部分相关课程间的关系

微分单元体加以研究,从而得出平衡微分方程、几何方程和物理方程,这些方程分别体现了应力与体力、位移与应变、应力与应变之间的相互联系,在给定边界条件下,可由这些基本方程(多为偏微分方程)确定基本未知量。弹性力学问题也称为偏微分方程的边值问题。

2. 可按位移或应力为未知量这两条途径来求解弹性力学问题,并可按导出未知量(如应力函数等)来求解,最后,均可将所要解决的问题归结为在给定边界条件下求解偏微分方程(组)的问题。

3. 从解答的结果与形式上分析,弹性力学存在解析解(以函数或级数表达)和数值解(以数值表达)这两种解答方式。从解答的精度上判断,有精确解与近似解之分。本书的前六章介绍经典的解析解法(精确解),后三章则介绍最基本的三种近似解法:变分法、有限单元法、差分法。其中,从变分法得到的是解析解,由后两种解法获得的则是数值解。

4. 在弹性力学具体解题的手法方面,有逆解法与半逆解法两种方法。

(1) 逆解法是选取满足基本方程的函数(位移、应力或应力函数),然后分析边界上具体受力或支承情况,确定能解决什么问题。

(2) 半逆解法是针对给定弹性体的边界形状和受力特点,先设置部分位移、应力或应力函数作为已知条件,然后通过满足全部基本方程和边界条件而求出其余未知量,或对所设的部分未知量加以修正,直到满足要求为止。

(四) 弹性力学的几个基本概念

1. 基本假定 为了简化计算,在弹性力学中假定所研究的物体处于连续的、均匀的、完全弹性的、各向同性的、小变形的、无初应力的状态。

2. 坐标系 针对不同物体,弹性力学中可分别采用直角坐标系 (x, y, z) 、极坐标系 (ρ, φ) 、柱坐标系 (ρ, φ, z) 和球坐标系 (r, θ, φ) 。

3. 基本量 弹性力学所涉及的基本量有体力、面力、应力、应变和位移分量,通

常这些量均为坐标的函数,其相关的符号、量纲和正负号规定分别见表 1-2。其中,物体表面上任一点 M_1 处的面力,内部任一点 M 处的体力、应力,被分别定义为该点的面力、体力、应力的平均集度取极限。由于 $\Delta A, \Delta V, \Delta S$ 均为标量(小部分面积或体积),故矢量 $\bar{F}, F, f_v$ 的方向分别为 $\Delta \bar{Q}, \Delta Q, \Delta P$ 趋向 $M_1(M)$ 点的极限方向(参考与之对应的图 1-2、图 1-3、图 1-4)。

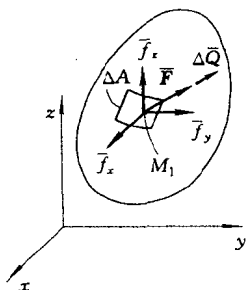
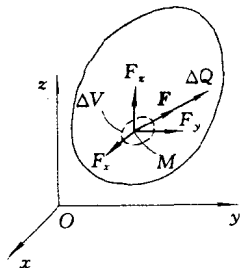
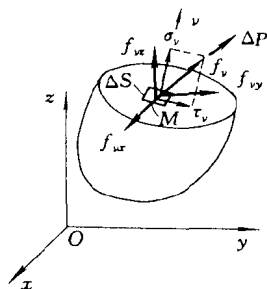
图 1-2 M_1 点面力图 1-3 M 点体力图 1-4 M 点应力

表 1-2

以直角坐标表示的各种基本量情况

名称		定 义	坐标轴上投影	量 纲	正负号规定
面力		$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta A} = \bar{F}$	$\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$	$[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$	沿坐标轴正向为正
体力		$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = F$	F_x, F_y, F_z	$[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$	
应力		$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = f_v$	f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}	$[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$	正面正向、负面负向
应 变	正应变	单位线段的伸缩量	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	无量纲	线段伸长为正
	切应变	线段间直夹角的改变量	$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yz}$	无量纲	直夹角变小为正
位移		点位置的移动	u, v, w	$[\text{长度}]$	沿坐标轴正向为正

4. 应力矢量的投影及下标

根据不同的计算需求,任一斜截面上的应力矢量 f_v 可向该截面的法向、切向投影成为 σ_v, τ_v ;亦可向坐标轴方向投影成为 f_{vx}, f_{vy}, f_{vz} ;见图 1-4 所示。当斜截面平行于坐标平面时,总应力 f_v 在坐标轴上的投影就成为一个正应力 σ_i 和两个切应力 τ_{ij} (正应力的下标 i 表示作用面法线和正应力的方向,切应力的第一个下标 i 表示作用面法线的方向,第二个下标 j 表示切应力的方向,这些应力均以正面正向、负面负向

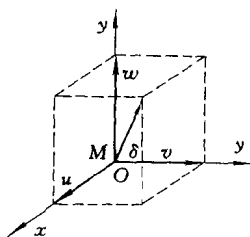


图 1-5 M 点位移

为正)。例如,图 2-1b)所示六面微分体(其上应力分量均以正向标示)的左面, $\nu=y$, $f_{ux}=\tau_{yx}$, $f_{vy}=\sigma_y$, $f_{uz}=\tau_{yz}$,而 $\sigma_\nu=\sigma_y$, $\tau_\nu=\sqrt{\tau_{yx}^2+\tau_{yz}^2}$, $f_\nu^2=\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2=\sigma_y^2+\tau_{yx}^2+\tau_{yz}^2$ 。

5. 物体任一点 M 的位移 δ 与其坐标轴上的三个投影分量的关系为: $\delta^2=u^2+v^2+w^2$,见图 1-5。

(五) 材料特性、弹性常数、应力应变关系

应力与应变关系最一般的形式可表示为

$$\sigma_x = f_1(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

$$\vdots$$

$$\tau_{xy} = f_6(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

在小变形及无初应力情况下,上式可简化为广义胡克(Hooke)定律:

$$\sigma_x = C_{11}\epsilon_x + C_{12}\epsilon_y + C_{13}\epsilon_z + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{zx} + C_{16}\gamma_{xy}$$

$$\vdots$$

$$\tau_{xy} = C_{61}\epsilon_x + C_{62}\epsilon_y + C_{63}\epsilon_z + C_{64}\gamma_{yz} + C_{65}\gamma_{zx} + C_{66}\gamma_{xy}$$

式中, $C_{mn}(m,n=1,2,\dots,6)$ 为弹性系数,共有 36 个。由于应变能的存在,可以证明,即便是极端各向异性体(任一点在各个方向的弹性性质完全不相同)也只有 21 个常数,因为 $C_{mn}=C_{nm}$ 。对于具有三个互相正交弹性对称面的正交各向异性体,如双向预应力空心板及某些复合材料组成的物体,利用坐标变换的不变性可证得其弹性常数为 9 个。对于横观各向同性体,如不同层次岩土组成的地基,弹性常数则为 5 个。而各向同性体(钢材等)独立的弹性常数只有 2 个,此时,应力应变之间的关系(或称为本构关系)即广义胡克定律可表示为式(2-3a)。

(六) 弹性力学的一些普遍原理

1. 圣维南(Saint Venant)原理 把物体一小部分上的面力变换成分布不同但静力等效的面力,只影响近处的应力分布,而不影响远处的应力。该原理又称为局部性原理。换言之,若一小部分边界作用着平衡力系(即主矢和主矩为零),则此平衡力系只在近处产生显著应力,而对远处的影响可忽略不计。

2. 叠加原理 在线弹性和小变形条件下,把同一物体上若干组外力分别作用下的解答叠加起来,等于这若干组外力同时作用于该物体时的解答。

3. 解的唯一性定律 利用应变能定律可证明,受已知体力作用的弹性体,其表

面或者面力已知,或者位移已知,或者一部分上面力已知而另一部分上位移已知,则弹性体在平衡时,体内各点的应力分量与应变分量是唯一的,对于后两种情况,位移分量也是唯一的。

二、范例解析与同步练习

例 1-1 高为 h , 长为 l ($h \ll l$) 的悬臂梁, 其端部的受力情况如图 1-6 所示, 试分析这几种不同受力方式对梁的端部及远离端部之处的应力分布的影响。

解 1. 由于外力的作用方式不同, 故在梁的端部外力引起的局部应力及其分布情况有差异, 见图 1-6。

2. 因为 $h \ll l$, 故梁的端部可视为一小部分边界; 又因为这四种外力(作用方式不同)的主矢和对梁内任一点的主矩相同, 所以, 它们是静力等效的变换。根据圣维南原理, 作用于梁端部的这四种不同外力, 分别只影响到端部的应力分布, 而在梁内远离端部之处, 其产生的应力分布相同。

分析 (1) 研究表明, 对作用于一小部分边界上的外力进行静力等效变换, 其影响范围(尺寸)与外力作用区域(尺寸)相当(当物体为薄壁构件或桁架时则另论)。见图 1-6。

(2) 由后几章内容知, 在满足端部的应力边界条件时需运用圣维南原理。但具体解题时, 不是将已知外力变换为其他分布形式的静力等效的外力, 而是转化为要求应力分量在端部积分合成的内力主矢、主矩与外力主矢、主矩相等。例如, 上述四种受力情况其右端部的应力边界条件可统一用以下三个式子表达:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} dy = -F$$

由此求出的应力分量仅在右端部长度为 h 的范围内有差异。

同步练习

题 1-1 高为 h 、长为 l ($h \ll l$) 的悬臂梁, 端部受水平集中力 F 作用, 试问对其如何进行静力等效的变换?

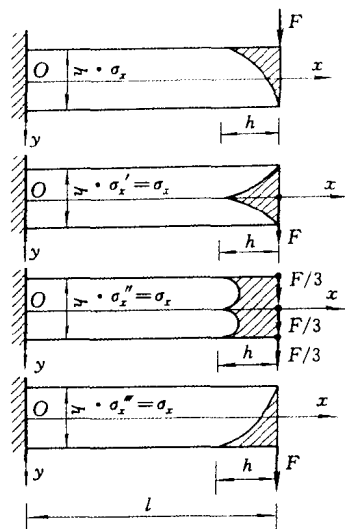
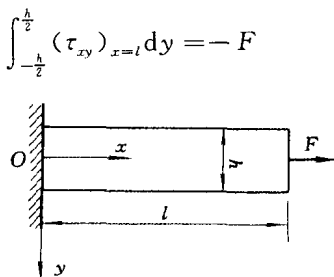


图 1-6



题 1-1 图

例 1-2 试问图 1-7 所示结构上,哪儿对力(力矩)产生的效应具有局部性? 其中, $t \ll h, h < b, M_4 = -F_4 h$ 。

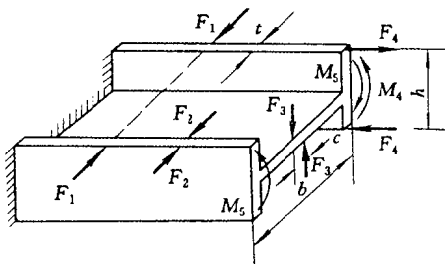


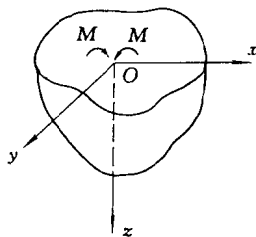
图 1-7

解 可运用圣维南原理判别: 题意所给的几个力系中, 只有 F_2 一对力构成的力系和 F_4 一对力与 M_4 构成的力系所产生的效应具有局部性。 F_1 一对力和 M_5 一对力偶虽都是自相平衡的力系, 但它们作用的区域并非一小部分边界; F_3 一对力虽然主矢为零, 但主矩不为零, 因此, 不是自相平衡的力系, 所以, 它们产生的效应不具备局部性。

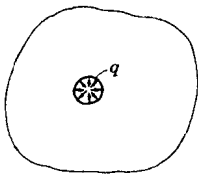
同步练习

题 1-2 在弹性半空间体上表面的 O 点附近作用有大小相等、方向相反的力偶, 试分析该物体的应力分布情况。

题 1-3 无限大平板内有一半径为 a 的小孔, 孔边受均布压力 q 作用, 试说明远离孔边处的应力分布。



题 1-2 图



题 1-3 图

例 1-3 图 1-8a) 所示水坝(小变形情况), 水面离坝顶的距离为 δ ($\delta \ll h$), 水的密度为 ρ_1 , 试简述求解水坝内应力分量的思路。

解 水坝所受载荷可分解为图 1-8b), c), d) 所示载荷。其中, 图 d) 所示载荷(作用在一小部分边界, $\delta < h$) 又可变换为静力等效的水平集中力 F 和弯矩 M , 因此, 图 1-8a) 的应力分量等于图 1-8b), c), d) 三种受力情况下应力分量的叠加(其解题过程可分别参阅同类型的例 3-18、例 3-17、例 3-13 等)。

同步练习

题 1-4 试用叠加原理求解图 1-8b) 所示水坝中的应力, 简述其思路。

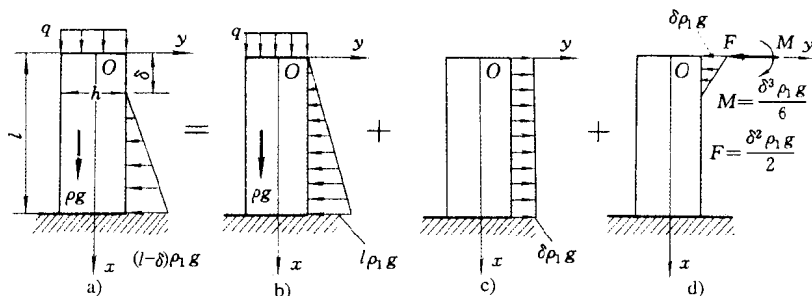


图 1-8

三、复习指导与小结

(一) 关于外力与应力分量正负号的约定

1. 应力分量以正面正向、负面负向为正。正面指外法线方向与坐标轴正向一致的截面，正面上的应力分量正方向沿坐标轴正向为正；负面指外法线方向与坐标轴正向相反的截面，负面上的应力分量沿坐标轴负向为正。本书所有图例中的应力分量均按此约定以正方向标出。弹性力学中正应力的约定与材料力学中以材料纤维受拉(压)判断正(负)的方法相对应，而弹性力学中切应力的约定与材料力学中的判断方法有较大区别，图 3-2 所示微分单元体四个面上的切应力，按前者的约定都取正号；按后者的判断，左、右面上的切应力取正号，而在上、下面上，切应力则取负号。

2. 外力(体力、面力)均以沿坐标轴正向为正，面力的正负号与所处面的正负无关(任何面上的面力若沿坐标轴正向即为正)，初学者需特别注意不要与应力分量正面正向、负面负向的约定相混淆。

(二) 有关原理的适用范围

1. 叠加原理只适用于小变形、线弹性状态下的物体。对于大变形情况，如梁的纵横弯曲问题，横向载荷引起的弯曲变形将使轴向载荷产生弯曲效应，而叠加原理没有考虑这种效应。此外，对于弹性稳定和弹塑性问题，叠加原理都不适用。

2. 对于圣维南原理，首先，它只能运用于物体的一小部分边界，即面力作用区域的尺寸(其影响范围与此尺寸相当)应不大于物体的最小尺寸，其次，需注意静力等效原则(主矢、主矩相等)。此外，应用于薄壁杆件和桁架结构时，需谨慎对待。如图 1-9a)所示的实心杆，其端部受自相平衡的 4 个集中力作用时，远离杆端处的应力迅速衰减，而图 1-9b)所示工字形的薄壁杆，由于腹板厚度 δ 较小，两翼板接近于各自受

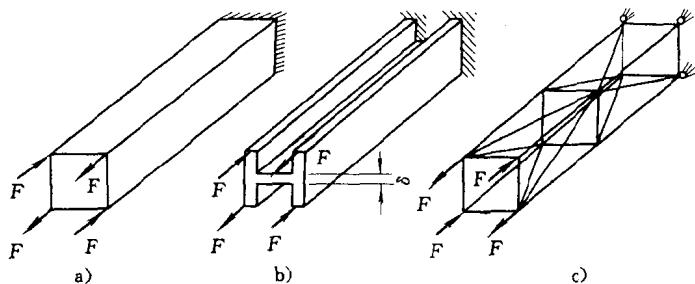


图 1-9

纯弯曲,此时,应力影响不是局部性的,其可达固定端。对于图 c)所示的桁架,端部的 4 个集中力虽构成平衡力系,但在每根杆件中都将产生应力和位移。最后须指出:圣维南原理不能应用于动力学问题,如杆的一小部分边界上受到扰动,其影响可传到远处。

3. 解的唯一性定理为逆解法和半逆解法提供了理论依据,此定理只有在小变形、无初应力的前提下成立。

(三) 弹性力学课程总体复习指导

1. 对本课程内容认真预习、对涉及到的高等数学和材料力学的相关知识进行针对性复习、上课(面授)时仔细听课与记笔记以及认真完成习题是学好弹性力学的重要前提。而立足于自学,勤于思考和钻研,对课程内容的重要概念能理解掌握并能融会贯通,则是学好本课程的关键。

2. 为了便于读者学习,现把本课程所涉及的主体内容划分为空间问题、平面问题、薄板弯曲问题(传统上,将前两项划入数学弹性力学。而将后一项划入应用弹性力学范围)和近似解法四个重点部分,且将各部分所包含的主要内容及互相间的关联以框图形式示于图 1-10。

在此将这些内容与本科生的授课计划相结合,按课时数与复习时数约 1:2 的比例安排自学与复习计划如表 1-3 所示。表中所列的例题与习题是要求掌握的基本题型,读者可根据本专业教学要求及个人学习需求酌情调整。

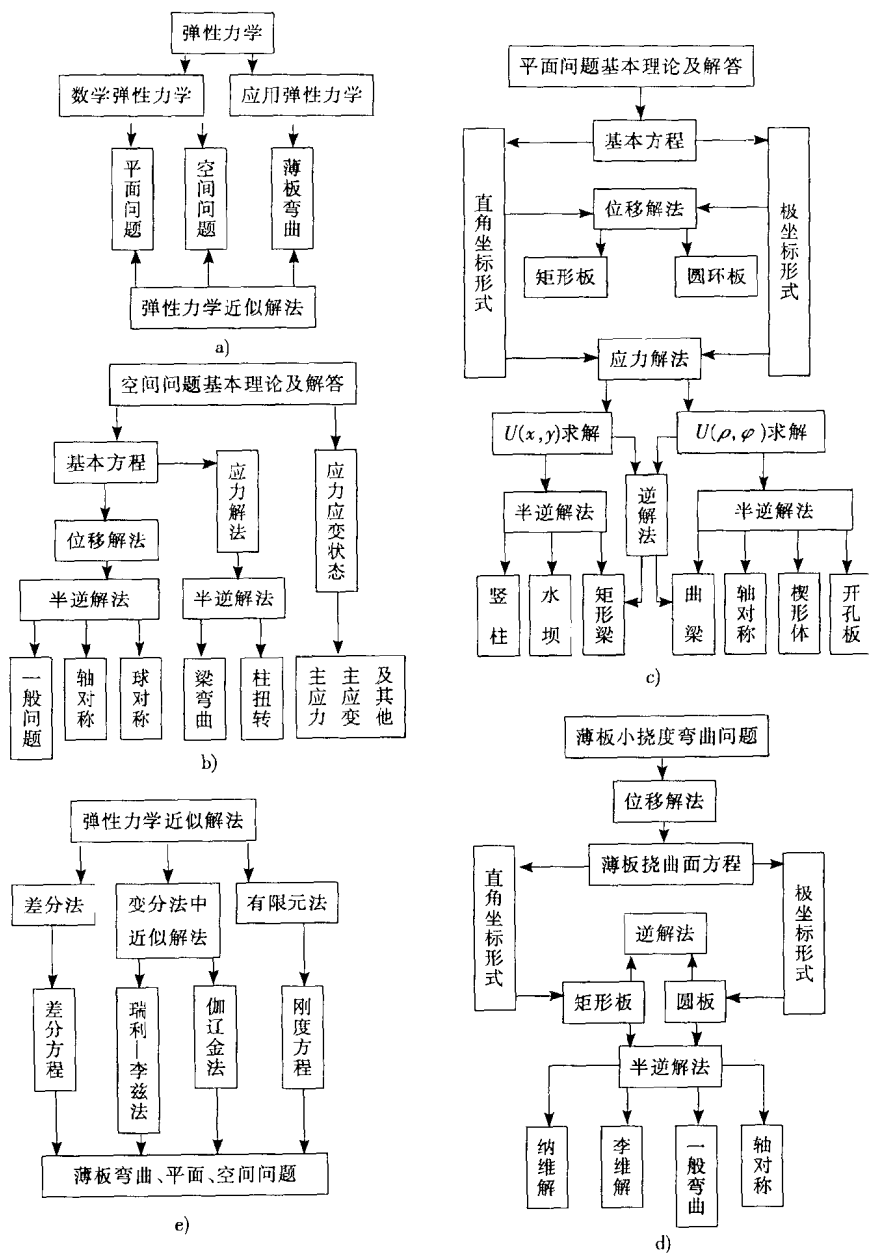


图 1-10 弹性力学重点内容示意图