〔英〕J. P. Lasalle 著

动力系统的稳定性

华中工学院出版社

动力系统的稳定性

[英] J·P·拉萨尔 著

廖晓昕 李立鹏 邹 应 译

The Stability of Dynamical Systems

J.P. LASALLE

Brown University

动力系统的稳定性

[美]J.P.拉萨尔 著

[illegible] 邹 应 译

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　各地新华书店经售

湖北省武汉市江汉印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：3.75　字数：81,000

1983年12月第一版　1983年12月第一次印刷

印数：1－5,000

统一书号：13255—020　定价：0.50元

内 容 简 介

本书是美国著名数学家拉萨尔教授近期的专著. 作者以他研究经典的李雅普诺夫直接法和伯克霍夫极限集之间关系而得到的不变原理为纲，用简洁的篇幅，高度概括地介绍了动力系统运动稳定性的基本理论和最新成果. 其内容包括：差分方程、常微分方程、泛函微分方程所描述的离散半动力系统，局部动力系统、局部半动力系统以及抽象离散动力系统等. 还备一附录详尽地介绍了非自治系统与极限方程. 全书内容丰富，立意较高，方法新颖. 每章都有足够的习题和可供进一步思考的研究题.

本书可供数学系高年级学生、研究生、教师以及中高级科技人员参考.

序

在某种程度上可以说，李雅普诺夫的直接法在西方重新发现是五十年代中期的事．至少那时在非线性控制系统的设计中已广泛地承认了它的重要性．我对李雅普诺夫理论的理解和赏识始于1959年，当时，所罗门，莱夫谢茨和我合写了一本这方面的初级读物，在写这本书的过程中，我发现了李雅普诺夫函数与伯克霍夫极限集之间的一个简单关系，这种观察给出了李雅普诺夫理论的统一认识，且极大地推广了他的直接法．在过去的十年期间已引出了许多在常微分方程以外的分枝和许多研究课题．本书的目的是对这些较新的进展作一介绍．

第一章从最简单的动力系统（与自治差分方程相联系的离散半动力系统）开始，在这一基本内容里我们可看到主要思想及一般理论的结构．第二章讨论关于自治常微分方程（局部动力系统）的类比理论的发展．第三章是对滞后型泛函微分方程（局部半动力系统）理论的一个简要叙述．这里，状态空间是无穷维的，且非局部紧的．很广泛的一类自治常微分方程解的极限集的不变性的发现，已是在最新的成就中了．这些不变性的讨论和它们与稳定性理论的关系在阿斯特英所写的附录中给出．第四章介绍了非自治差分方程同样的理论，现在这部分理论，虽说是新的，但是自然是最基本的了．

首先我感谢约翰 R·W 格尔弗，是他组织了在密西西比州立大学召集的该地区的讨论会，他对我的邀请，使我萌发了写

这本书的念头。我很赞赏这个开得很好的讨论会和参加者的热心。并且感谢阿斯特英在那里所作的报告。以及允许我将他的笔记作为本书的附录。

J·P·拉萨尔

目　　录

第一章　差分方程·离散半动力系统

1. 引　　言

今天愈来愈有必要系统地研究差分方程．它们都拥有本身就很重要的数学模型.除要求理解收敛性和连续性外,其它方面要求不多，而且完全不涉及解的存在性及解的定义域之类的麻烦问题.然而,差分方程的研究为微分方程、微分一差分方程和泛函微分方程的稳定性提供了一个很好的入门的途径．本章我们不仅将看到一般理论的所有基本特点，而且还将看到某些新的结果．文献〔49〕介绍了适用于控制系统设计和分析的差分方程的经典李雅普诺夫稳定性理论．(也可参看〔81〕、〔83〕、〔32〕)在文献〔46〕中，荷特(Hurt)超出了经典理论的范围，还将此理论用于数值分析．我们将推广荷特的结果．在第四章讨论非自治差分方程．

1.0　记号

J表示所有整数的集合；

J_+表示所有非负整数的集合；

R^m表示m维欧氏空间，$\|x\|$表示R^m中欧氏范数．

我们采用通常方便的多义表示法，即x既可表示向量，也可表示一个函数．令x：$J_+\to R^m$.则J_+到R^m的函数x'和$\dot{x}$．由下列各式定义：

$$x'(n)=x(n+1),$$

$$\dot{x}=x'-x,$$

$$T：R^m\to R^m.$$

差分方程

(1.1) $$x' = Tx$$

表示

$$x(n+1) = T(x(n)), \quad \forall n \in J_+.$$

始值问题

(1.2)

$$x' = Tx, \quad x(0) = x^0$$

的解为 $x(n) = T^n(x^0)$，这里，T^n 为 T 的 n 次迭代：$T^{n+1} = T(T^n)$，而 $T^0 = I$ 表示恒等映射，函数的乘积理解为复合．方程（1.2）简单地说是确定函数x的一个算法．

1.1 习题 证明m阶差分方程（g：$R^m \to R$）

$$u(n+1) = g(u(n), u(n-1), \cdots, u(n-m+1))$$

等价于m个一阶差分方程组（1.2）．

2． R^m上的离散动力系统

这里，我们假设T是连续的．

2.1 定义 R^m上的一个离散动力系统就是一个映射 π：$J_+ \times R^m \to R^m$，此映射对所有的$n, k \in J_+$和所有的$x \in R^m$满足：

（i） $\pi(0, x) = x$，

（ii） $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n+k, x)$，

（iii） π是连续的．

每一个差分方程（1.1）都定义一个动力系统π：$\pi(n, x^0) = T^n x^0$；反之，每一个离散动力系统有与之相对应的差分方程$x' = Tx$，这里，$T(x) = \pi(1, x)$。正因为如此，我们只考虑差分方程（1.1）。从x出发，运动 $T^n x$ 表示一个状态序列x，

Tx, …, $T^n x$, …. 条件（ii）即是半群性，并表示在时间增加的方向上解的唯一性。π通常称为“半流”、或“半动力”系统。而“动力系统”这个术语只是当J_+能够用J代替（T有逆）时才可使用。

3. 运动的极限集

有许多原因，使人们对于当n充分大时，$T^n x$将发生什么变化感兴趣，稳定性理论就是研究与$T^n x$的渐近行为有关的各种问题。此外，稳定性必与动力行为有关，即当x和T都受扰动时，将出现什么情况。李雅普诺夫稳定性的定义必须只涉及到x的扰动；在本章第11节将指明这个定义与T的扰动的关系。

方程$x=Tx$之解的逐次逼近法的基本思想在于，如果$T^n x^0$收敛，则它的极限就是一个解（不动点或不变点）。现在我们要做的就是推广这一事实。首先，仿照伯克霍夫（Birkhoff文献〔15〕），作法引入$T^n x$的极限集$\Omega(x)$（我们只对正整数n感兴趣，并且省略形容词“正的”）。下一节，将证明对有界的$T^n x$、$\Omega(x)$是不变集（$T(\Omega(x))=\Omega(x)$）；在第6节及其后将指出，如何用李雅普诺夫函数去获得运动的极限集的信息。

3.0 记号 对$x\in R^m$及R^m中任意集S，

$$\rho(x,\ S)=\inf\{\|y-x\|;\ y\in S\} \tag{3.1}$$

表示x到S的距离。

当$n\to\infty$时，$T^n x\to S$即是$\rho(T^n x,\ S)\to 0\quad(n\to\infty)$，

$\overline{S}=\{x;\ \rho(x,\ S)=0\}$是$S$的闭包。

如果$\overline{S}=S$，则集合S是闭的；如果它的余集是闭的，则S

是开的；

$$T(s) = \{ T(x); \ x \in S \}.$$

3.1 定义（伯克霍夫）如果存在一整数序列n_i，使得当$i \to \infty$时，有$n_i \to \infty$和$T^{n_i}x \to y$，则称点y是$T^n x$的一极限点。从x出发的运动$T^n x$的极限集$\Omega(x)$就是$T^n x$的一切极限点的集合。

3.2 习题 证明$\Omega(x)$的另一个定义是：

$$\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}. \tag{3.2}$$

3.3 习题 对R^n中任意一个集H，定义

$$\Omega(H) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}. \tag{3.3}$$

证明：当且仅当存在序列$n_j \in J_+$和$y_j \in H$

使得当$j \to \infty$时，有$n_j \to \infty$和$T^{n_j} y_j \to y$，则$y \in \Omega(H)$。

4. 不 变 性

4.1 定义 如果$T(H) \subset H$（$H \subset T(H)$），则称集合H为相对于方程(1.1)或T是正（负）不变的。如果$T(H) = H$，则称H为不变的。

我们很快就要证明，一有界运动的极限集是闭的、不变的．我们不可能期望，象连续运动的情形，它（极限集）是连通的；然而，相对于不变性，它确实具有连通性。

4.2 定义 若闭不变集H不是两个非空的不相交的闭不变集之并，则称此H为不变连通的。

4.3 定义 如果对某个$k>0$，$T^k x = x$，则称运动$T^n x$是

周期的（或循环的）。这种整数 k 中最小者称为此运动的周期或循环阶。如果 $k=1$，则 x 是 T 的一不动点，则称此 x 为方程（1.1）的平衡状态。

4.4 习题 证明当且仅当具有有限个元素的不变集是一周期运动时，则此不变集是不变连通的。

4.5 习题 证明

(*a*) 正不变集的闭包是正不变的。

(*b*) 有界不变集的闭包是不变的。

4.6 习题 试举一不变集的例子，它的闭包不是不变集。

4.7 定义 如果 $T_0x=x$，且对所有的 $n\in J$，$T(T_nx)=T_{n+1}x$，则称 T_nx（对所有的 $n\in J$ 有定义）为运动 T^nx 的一个开拓。

附注 对所有的 $n\in J_+$，$T_nx=T^nx$，且如果 x 包含在一不变集 H 内，则运动 T^nx 总有一开拓，这个开拓可以是唯一的，也可以是不唯一的。

4.8 习题 证明当且仅当从集 H 出发的每个运动对所有的 n 在 H 中有一开拓时，集 H 是不变的。

4.9 习题 举例说明不变集 H 可以有一运动，该运动是从 H 中的一点开拓出来的，但却不在 H 中。

4.10 习题 设 E 是 R^m 中一给定的集，M 是包含在 E 中的最大（按包含关系）不变集。试证

(*a*) M 是 E 内的所有被开拓的运动（对所有的 $n\in J$ 保持在 E 中）的并。

(*b*) 当且仅当在一个被开拓的运动 Tn 使得对所有的 $n\in J$，$T_nx\in E$ 时，则 $x\in M$。

(*c*) 如果 E 是紧的，则 M 也是紧的。

5. 极限集的基本性质

下一节，我们要利用极限集的基本性质，推广并统一李雅普诺夫直接方法。

5.1 定理 每个极限集$\Omega(x)$都是闭的正不变的。

证明 易知$\Omega(x)$的余集是开的，因此$\Omega(x)$是闭的。假定$y\in\Omega(x)$，则存在一整数序列n_i，使得当$i\to\infty$时，有$n_i\to\infty$和$T^{n_i}x\to y$。由T的连续性，$T(T^{n_i}x)=T^{n_i+1}x\to Ty$，从而$Ty\in\Omega(x)$，因此$T(\Omega(x))\in\Omega(x)$，故$\Omega(x)$是正不变的。证毕。

我们最感兴趣的是有界运动的渐近行为。如果运动T^nx对所有的$n\in J_+$是有界的，则通常称此运动在拉格朗日意义下是正稳定的。

5.2 定理 如果T^nx对所有的$n\in J_+$是有界的，则$\Omega(x)$是非空的、紧的、不变的及不变连通的，且是当$n\to\infty$时，T^nx所逼近的最小闭集。

证明 显然，T^nx的有界性蕴含$\Omega(x)$是非空的有界集，因此，由定理5.1，它是紧的。令y是$\Omega(x)$中的一点，且如同定理5.1的证明中的作法选择n_i。由T^nx的有界性，还可以假定$T^{n_i-1}x$也收敛(如果必要，可选一个子序列)。让$T^{n_i-1}x\to z$，则$z\in\Omega(x)$，$T(T^{n_i-1}x)=T^{n_i}x\to Tz=y$，因此，$\Omega(x)\subset T(\Omega(x))$，从而由定理5.1知，$\Omega(x)$是不变的。

下面证明，当T^nx有界时，$T^nx\to\Omega(x)$。因为$\rho(T^n(x),\Omega(x))$是有界的，我们断言，如果$T^n(x)$不逼近$\Omega(x)$，则存在一序列n_i使得当$i\to\infty$时，$n_i\to\infty$，$T^{n_i}(x)$收敛，且$\rho(T^{n_i}x,\Omega(x))$不趋于零。显然，这是矛盾的，因为$T^{n_i}x$的极限在$\Omega(x)$内，

而且当$n\to\infty$时，$T^n x\to\Omega(x)$。如果当$n\to\infty$时，$T^n x\to E$，且E是闭的，那末，显然$\Omega(x)\subset E$.因此，$\Omega(x)$是当$n\to\infty$时，$T^n x$所逼近的最小闭集。

最后证明$\Omega(x)$是不变连通的．假定$\Omega(x)$是两个不相交的、闭的非空不变集Ω_1和Ω_2的并。因为$\Omega(x)$是紧的，则Ω_1和Ω_2也是紧的。因此存在不相交的开集U_1和U_2使得$\Omega_1\subset U_1$，$\Omega_2\subset U_2$。还有，因为T是连续的，因此在Ω_1上是一致连续的，从而存在一个开集V_1使得$\Omega_1\subset V_1$，$T(V_1)\subset U_1$。因为$\Omega(x)$是由$T^n(x)$所逼近的最小闭集，那末$T^n(x)$必与V_1和U_2相交无限多次.这就是说，存在一个收敛子序列$T^{n_i}x$，它既不在V_1内也不在U_2内。可是$\Omega(x)$包含在V_1与U_2的并内，这就出现了矛盾，故$\Omega(x)$是不变连通集。证毕。

5.3 习题 举一极限集$\Omega(x)$的例子，它具有这样的性质：$\Omega(x)$是非空的，且当$n\to\infty$时，$T^n x$不逼近于$\Omega(x)$。

5.4 习题 如果在定义2.1中用J代替J_+，则上面的结论，可能发生什么变化？

5.5 习题 （参考习题3.3）建立$\Omega(H)$的类似的基本性质。

5.6 习题 证明如果K是紧的正不变的，则$\Omega(K)=\bigcap_{n=0}^{\infty}T^n(K)$是非空的、紧的、不变的，且是$K$中最大不变集（这是习题5.5的一个特殊情况）。

6．李雅普诺夫函数·李雅普诺夫直接法的一个推广

关于一个运动的极限集位置的研究，实际上也就是考查该运动的渐近行为.例如，如果知道一运动必逼近于一个具有有限

个元素的集合，则由定理5.2和习题4.4可知，此运动必逼近于一周期运动。这里我们所要做的就是证明，被适当定义的李雅普诺夫函数给出有关极限集位置的信息。特别是利用极限集的不变性，可以做得到这一点。正因如此，我们将称此思想为"不变原理"。我们将看到，这是一个很基本也是很简单的思想，但是对于理论和应用而言被证明是有用的，并且可作相当广泛的推广（参见第3章和附录）。

设V：$R^m \to R$，相对于方程（1.1）（或T）定义

$$\dot{V}(x)=V(T(x))-V(x). \tag{6.1}$$

如果$x(n)$是方程（1.1）的解，则

$$\dot{V}(x(n))=V(x(n+1))-V(x(n)),$$

而$\dot{V}(x)\leqslant 0$表示V沿着解是非增的。计算$\dot{V}(x)$并不需要知道解——可直接从方程（1.1）的右边计算——这就是为什么说所指方法是"直接的"。

6.1 定义 设G是R^m中的任一集，如果

(i) V在G上是连续的。

(ii) 对所有的$x\in G$，$\dot{V}(x)\leqslant 0$，则称V是方程（1.1）在G上的一个李雅普诺夫函数。

注意，在这个定义中，可以用条件$\dot{V}$在G中不变号来代替(ii)。

6.2 记号：设V是方程（1.1）在G上的一李雅普诺夫函数，定义

$$E=\{x;\ \dot{V}(x)=0,\ x\in\overline{G}\}. \tag{6.2}$$

用M表示E中的最大不变集，并记

$$V^{-1}(c)=\{x;\ V(x)=c,\ x\in R^m\}.$$

6.3 定理（不变原理）：如果

(i) V是方程（1.1）在G上的李雅普诺夫函数；

(ii) $x(n)$是方程(1.1)的一有界解，且对所有的$n\geqslant 0$位于G内，

则存在一数c，使得当$n\to\infty$时，$x(n)\to M\cap V^{-1}(c)$。

证明 令$x^0=x(0)$，于是$x(n)=T^n x_0$。现在我们的假设蕴含着$V(x(n))$关于n是非增的且有下界。因此当$n\to\infty$时，$V(x(n))\to c$。令$y\in\Omega(x^0)$，则存在一序列n_i，使得$n_i\to\infty$，$x(n_i)\to y$。因为V是连续的，所以$V(x(n))\to V(y)=c$，从而$\Omega(x^0)\subset V^{-1}(c)$。因为$\Omega(x^0)$是不变的，所以$V(Ty)=c$，且$\dot{V}(y)=0$。故$\Omega(x^0)\subset E$，从而也包含在$M$内。因$x(n)\to\Omega(x^0)$，故$x(n)\to M\cap V^{-1}(c)$。证毕。

现在以一简单的例子，来说明怎样应用这个结果。然后，我们将考虑这个基本结果的某些特殊推论。

6.4 例 考虑二维系统

$$x(n+1)=\frac{ay(n)}{1+x^2(n)};\quad y(n+1)=\frac{bx(n)}{1+y^2(n)}$$

或

$$x'=\frac{ay}{1+x^2};\quad y'=\frac{bx}{1+y^2}. \tag{6.3}$$

取 $V(x,y)=x^2+y^2$，

则 $$\dot{V}(x,y)=\left(\frac{b^2}{(1+y^2)^2}-1\right)x^2+\left(\frac{a^2}{(1+x^2)^2}-1\right)y^2.$$

情形1 $a^2<1$，$b^2<1$。于是

$$\dot{V}\leqslant(b^2-1)x^2+(a^2-1)y^2,$$

并且V是系统(6.3)在R^2上的李雅普诺夫函数。在此$M=E=\{(0,0)\}$，又每一解显然是有界的，从而由定理6.3得出，当$n\to\infty$时，每个解趋于原点（原点是全局吸引点，正如后面