

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等代數習題

Д. К. ФАДДЕЕВ 著
И. С. СОМИНСКИЙ
丁 壽 田 譯



商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



高等代數習題

Д. К. 法傑葉夫著
П. С. 索明斯基
丁壽田譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的法傑葉夫（Д. К. Фаддеев）和索明斯基（П. С. Соинский）合著“高等代數習題”（Сборник задач по высшей алгебре）1952年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合大學及師範學院教科書。

高等代數習題

丁壽田譯

★ 版權所有 ★

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司 總經理

商務印書館上海廠印刷

（50826）

1953年9月初版 1954年1月再版

版面字數 287,000 印數 5,001—7,000

定價 ¥ 21,000

上海市書刊出版業營業許可證出○二五號

初版序言摘要

這部高等代數習題是在國立列寧格勒大學與赫爾岑師範學院教學結果中產生出來的。本書可供綜合大學及師範學院低年級學生在學習高等代數基本教程時作演習之用。

本書中的問題截然分為兩類：一方面收集了大量的數字例題，為的是培養學生的計算的技能並使他們能夠闡明理論教程中的基本原理。例題的數量著者認為已完全足夠課堂作業，家庭作業及考試之用。

另一方面，收集了大量難易適中的及較難的問題，解答這些問題就需要學生表現出主動性和創造性。這類問題有許多在本書第二編裏附有解法提示，這些有提示的問題號碼上標着星點。

所有問題都帶答案，其中一部分並有詳解。

著 者

再版序言

這一版計劃上有重大變更並且補充了關於一次代數的材料。這些材料加入在兩章裏：第四章裏(行列陣)及第七章裏(線性代數)。

其餘各章的內容幾乎保持不變。許多第一版裏的小疏漏及排印的錯誤茲已經過改正。爲用起來方便起見這集子裏的問題採取連貫的號碼。

著 者

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

目次

初版序言摘要

再版序言

第一編 問題 1

第一章 複數 1

- § 1. 複數的運算 1
- § 2. 以三角函數形式表出的複數 3
- § 3. 三次方程式與四次方程式 10
- § 4. 單位的方根 12

第二章 行列式的計算 17

- § 1. 二階與三階的行列式 17
- § 2. 排列 18
- § 3. 行列式的定義 19
- § 4. 行列式的基本性質 21
- § 5. 行列式的計算 24
- § 6. 行列式的乘法 46
- § 7. 雜題 52

第三章 一次方程組 57

- § 1. 克拉麥氏定理 57
- § 2. 行列陣的秩 60
- § 3. 一次形式組 63
- § 4. 一次方程組 65

第四章 行列陣 74

- § 1. 方陣的運算 74
- § 2. 矩陣, 幾個不等式 82

第五章 單變數的多項式與有理函數 87

- § 1. 多項式的運算, 泰勞氏公式, 重根 87
- § 2. 高等代數基本定理的證明及其相關的問題 91
- § 3. 多項式的分解為一次因子, 實數體中多項式的分解為不可約因子, 根與係數之間的關係 92
- § 4. 歐幾里得輾轉相除法 97
- § 5. 內插法問題與有理分函數 100
- § 6. 多項式的有理根, 有理數體中的可約性與不可約性 104

§ 7. 多項式的根的界限	108
§ 8. 斯圖姆氏定理	109
§ 9. 關於多項式根的分佈的種種問題	113
§ 10. 多項式的根的近似計算法	117
第六章 對稱函數	119
§ 1. 以基本對稱函數表出一般對稱函數, 由代數方程式計算對稱函數	119
§ 2. 方冪和	124
§ 3. 方程式的變形	126
§ 4. 結式與判別式	128
§ 5. 車恩浩申氏變形與分母上無理式的消除	134
§ 6. 變數的偶置換下不變的多項式, 在變數的輪迴置換下不變的多項式	135
第七章 線性代數	138
§ 1. 子空間與線性流形, 坐標的變換	138
§ 2. N 維歐氏空間裏的初等幾何	140
§ 3. 行列陣的特徵數與固有向量	145
§ 4. 二次形式與對稱行列陣	147
§ 5. 一次變換, 若當氏典式	152
第二編 解法提示	157
第一章 複數	157
第二章 行列式的計算	161
第四章 行列陣	170
第五章 單變數的多項式與有理函數	172
第六章 對稱函數	178
第七章 線性代數	181
第三編 答案與解法	183
第一章 複數	183
第二章 行列式的計算	206
第三章 一次方程組	219
第四章 行列陣	229
第五章 單變數的多項式與有理函數	254
第六章 對稱函數	313
第七章 線性代數	346

高等代數習題

第一編 問題

第一章 複數

§ 1. 複數的運算

1 設 $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$ 。

試將 x 與 y 看作實數而求其值。

2. 解下面這組方程式, 其中 x, y, z, t 看作實數:

$$(1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1+5i,$$

$$(3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2-i.$$

3. 計算 i^n , 這裏 n 是整數。

4. 證驗恆等式

$$x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i).$$

5. 計算:

(a) $(1+2i)^6$;

(b) $(2+i)^7 + (2-i)^7$;

(c) $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$ 。

6. 試闡明在什麼條件下兩個複數的乘積是純虛數?

7. 作以下各式所指示的運算:

(a) $\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}$;

(b) $\frac{a+bi}{a-bi}$;

(c) $\frac{(1+2i)^3 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$;

(d) $\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$;

(e) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ 。

8. 計算 $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, 這裏 n 是正整數。

9. 解下面各組方程式:

$$(a) \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + yi - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$$

10. 計算:

$$(a) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^2; \quad (b) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^3.$$

*11. 設 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, 計算:

$$\begin{aligned} (a) & (a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega); \\ (b) & (a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2); \\ (c) & (a+b\omega+c\omega^2)^3 + (a+b\omega^2+c\omega)^3; \\ (d) & (a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega). \end{aligned}$$

12. 試求一數:

$$\begin{aligned} (a) & \text{與其平方共軛,} \\ (b) & \text{與其立方共軛.} \end{aligned}$$

*13. 證明這定理:

如果對 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 諸數進行有限次有理運算(即加、減、乘、除)的結果得一數 u , 則對共軛數 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ 進行同一套運算的結果得一 u 的共軛數 $\bar{u}$ 。

14. 求證:若 $x+yi=(s+ti)^n$, 則 $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$ 。

15. 計算:

- (a) $\sqrt{2i}$; (b) $\sqrt{-8i}$; (c) $\sqrt{3-4i}$, (d) $\sqrt{-15+8i}$;
(e) $\sqrt{-3-4i}$; (f) $\sqrt{-11+60i}$; (g) $\sqrt{-8+6i}$;
(h) $\sqrt{-8-6i}$; (i) $\sqrt{8-6i}$; (j) $\sqrt{8+6i}$; (k) $\sqrt{2-3i}$;
(l) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$; (m) $\sqrt{1-i}\sqrt{3}$; (n) $\sqrt[4]{-1}$;
(o) $\sqrt[4]{2-i}\sqrt{12}$ 。

16. 若 $\sqrt{a+bi}=\pm(\alpha+\beta i)$, 則 $\sqrt{-a-bi}$ 等於什麼?

17. 解以下各方程式:

- (a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$,
(b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$,
(c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$ 。

*18. 解以下各方程式並將其左邊分解為帶實係數的因子:

- (a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$,
(b) $x^4+2x^2-24x+72=0$ 。

19. 解以下各方程式:

- (a) $x^4-3x^2+4=0$,
(b) $x^4-30x^2+289=0$ 。

20. 設四次方程式 $x^4+px^2+q=0$ 的係數都是實數並且 $\frac{p^2}{4}-q<0$ 。

試作出此方程式的解的公式。

§ 2. 以三角函數形式表出的複數

21. 描出表示以下各複數的點:

- 1, -1, $-\sqrt{2}$, i , $-i$, $i\sqrt{2}$, $-1+i$, $2-3i$ 。

22. 以三角函數的形式表出以下各數：

- (a) 1; (b) -1 ; (c) i ; (d) $-i$; (e) $1+i$; (f) $-1+i$;
 (g) $-1-i$; (h) $1-i$; (i) $1+i\sqrt{3}$; (j) $-1+i\sqrt{3}$;
 (k) $-1-i\sqrt{3}$; (l) $1-i\sqrt{3}$; (m) $2i$; (n) -3 ; (o) $\sqrt{3}-i$;
 (p) $2+\sqrt{3}+i$ 。

23. 利用表，將以下各數以三角函數的形式表出之：

- (a) $3+i$; (b) $4-i$; (c) $-2+i$; (d) $-1-2i$ 。

24. 試求表示下面這樣的複數的點子的軌跡：

- (a) 其模為 1;

- (b) 其幅角為 $\frac{\pi}{6}$ 。

25. 試求代表複數 z 的點子的軌跡，這裏複數 z 滿足下面的條件：

- (a) $|z| < 2$; (b) $|z-i| < 1$; (c) $|z-1-i| < 1$ 。

26. 解以下各方程式：

- (a) $|x|-x=1+2i$,

- (b) $|x|+x=2+i$ 。

*27. 求證恆等式

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2);$$

這恆等式的幾何意義是什麼？

*28. 試證明：任何複數 z 只要不等於 -1 而其模為 1 則必可表示成

$$z = \frac{1+ti}{1-ti}$$

的形狀，這裏 t 是實數。

29. 在什麼條件下兩複數之和的模等於該兩數之模的差？

30. 在什麼條件下兩複數之和的模等於該兩數之模的和？

*31. 設 z 與 z' 是兩個複數，而 $u = \sqrt{zz'}$ 。求證

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} + u \right|。$$

32. 求證: 若 $|z| < \frac{1}{2}$, 則

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

33. 求證:

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi) &= \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]. \end{aligned}$$

34. 化簡 $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$.

35. 計算 $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

36. 計算:

$$(a)(1+i)^{25}; \quad (b)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}; \quad (c)\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24};$$

$$(d)\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

*37. 求證:

$$(a)(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right);$$

$$(b)(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right);$$

n 是整數。

*38. 化簡 $(1+\omega)^n$, 這裏 $\omega = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

39. 設 $\omega_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 試決定 $\omega_1^n+\omega_2^n$, 這裏 n 是整數。

*40. 計算這乘方: $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

*41. 若 $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$, 則 $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m \theta$.

42. 求證 $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n \alpha}{1-i \operatorname{tg} n \alpha}$.

43. 計算下列各方根:

(a) $\sqrt[3]{i}$; (b) $\sqrt[3]{2+2i}$; (c) $\sqrt[4]{-4}$; (d) $\sqrt[5]{1}$; (e) $\sqrt[6]{-27}$.

44. 利用表計算下列各方根:

(a) $\sqrt[3]{2+i}$; (b) $\sqrt[3]{3-i}$; (c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

45. 計算:

(a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; (b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; (c) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

46. 知道了 β 是 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的一個值, 試寫出所有 $\sqrt[n]{\alpha}$ 的值.

47. 試以 $\cos x$, $\sin x$ 表出:

(a) $\cos 5x$; (b) $\cos 8x$; (c) $\sin 6x$; (d) $\sin 7x$.

48. 試以 $\operatorname{tg} \varphi$ 表出 $\operatorname{tg} 6 \varphi$.

49. 求作以 $\cos x$ 與 $\sin x$ 表出 $\cos nx$ 與 $\sin nx$ 的公式.

50. 試將以下各式表示成倍角三角函數的一次多項式:

(a) $\sin^3 x$; (b) $\sin^4 x$; (c) $\cos^5 x$; (d) $\cos^6 x$.

*51. 求證:

$$(a) 2^{2m} \cos^{2m} x = 2 \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

$$(b) 2^{2m} \cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k \cos (2m-2k+1)x;$$

$$(c) 2^{2m} \sin^{2m} x = 2 \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

$$(d) 2^{2m} \sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin (2m-2k+1)x.$$

*52. 求證:

$$2 \cos mx = (2 \cos x)^m - \frac{m}{1}(2 \cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2}(2 \cos x)^{m-4} - \dots + (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2) \cdots (m-2p+1)}{p!} (2 \cos x)^{m-2p} + \dots$$

*53. 試以 $\cos x$ 表出 $\frac{\sin mx}{\sin x}$ 。

*54. 求以下各總和:

$$(a) 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots; \quad (b) C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

*55. 求證:

$$(a) 1 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right);$$

$$(b) C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right);$$

$$(c) C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right);$$

$$(d) C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

*56. 求這總和:

$$C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \dots$$

57. 求證 $(x+a)^m + (x+a\omega)^m + (x+a\omega^2)^m = 3x^m + 3C_m^3 x^{m-3} a^3 + \dots + 3C_m^n x^{m-n} a^n$, 這裏 $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, 而 n 是不超過 m 的 3 的倍數中之最大的整數。

58. 求證:

$$(a) 1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right);$$

$$(b) C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right);$$

$$(c) C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-4)\pi}{3} \right).$$

59. 計算以下各式之和：

$$(a) 1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \cdots + a^k \cos k\varphi;$$

$$(b) \sin \varphi + a \sin (\varphi + h) + a^2 \sin (\varphi + 2h) + \cdots + a^k \sin (\varphi + kh);$$

$$(c) \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx.$$

60. 求證：

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

61. 試求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \cdots + \frac{1}{2^n} \cos nx \right).$$

62. 若 n 是正整數，而 θ 角滿足 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2n}$ 這條條件，則

$$\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} + \cdots + \cos \frac{2n-1}{2} \theta = n \sin n\theta.$$

63. 求證：

$$(a) \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2};$$

$$(b) \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2};$$

$$(c) \cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}.$$

64. 求以下各式之和：

$$(a) \cos a - \cos(a+h) + \cos(a+2h) - \cdots + (-1)^{n-1} \cos[a+(n-1)h];$$

$$(b) \sin a - \sin(a+h) + \sin(a+2h) - \cdots + (-1)^{n-1} \sin[a+(n-1)h].$$

65. 若 x 的絕對值小於 1, 則級數

$$(a) \cos \alpha + x \cos(\alpha + \beta) + x^2 \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots + x^n \cos(\alpha + n\beta) + \cdots,$$

$$(b) \sin \alpha + x \sin(\alpha + \beta) + x^2 \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots + x^n \sin(\alpha + n\beta) + \cdots$$

收斂而其和各等於

$$\frac{\cos \alpha - x \cos(\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}; \quad \frac{\sin \alpha - x \sin(\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}.$$

66. 以下各式試各求其和:

$$(a) \cos x + C_n^1 \cos 2x + \cdots + C_n^n \cos(n+1)x;$$

$$(b) \sin x + C_n^1 \sin 2x + \cdots + C_n^n \sin(n+1)x.$$

67. 以下各式試各求其和:

$$(a) \cos x - C_n^1 \cos 2x + C_n^2 \cos 3x - \cdots + (-1)^n C_n^n \cos(n+1)x;$$

$$(b) \sin x - C_n^1 \sin 2x + C_n^2 \sin 3x - \cdots + (-1)^n C_n^n \sin(n+1)x.$$

*68. 設 $\vec{OA_1}$ 與 $\vec{OB}$ 是兩個向量, 各表示 1 與 i 。由 O 向 A_1B 作垂直線 OA_2 ; 由 A_2 向 OA_1 作垂直線 A_2A_3 ; 由 A_3 向 A_1A_2 作垂直線 A_3A_4 ; $\cdots$; 一般地, 由 A_n 向 $A_{n-2}A_{n-1}$ 作垂直線 A_nA_{n+1} 。試求這總和的極限:

$$\vec{OA_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \cdots$$

*69. 求這總和:

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \cdots + \sin^2(2n-1)x.$$

70. 求證:

$$(a) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x};$$

$$(b) \sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}.$$

*71. 以下各式試各求其和:

$$(a) \cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots + \cos^3 nx;$$

$$(b) \sin^3 x + \sin^3 2x + \cdots + \sin^3 nx.$$