高师函授教材

数学分析

（中 册）

吉林人民出版社

高师函授教材

数 学 分 析

中　　册

东北三省高师函授《数学分析》协编组 编

高师函授教材

数 学 分 析

（中 册）

东北三省高师函授《数学分析》协编组 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 $10\frac{7}{8}$印张 240,000字

1983年1月第1版 1983年1月第1次印刷

印数：12,320册

书号：13091·127 定价：0.95元

目　　录

习题答案

第七章　不定积分

前面三章，我们研究了导数和微分，中值定理以及导数应用，这些内容称为一元函数的微分学．从这一章到第九章，将要研究一元函数的积分学。积分学分为不定积分和定积分两部分，首先研究不定积分．不定积分的计算是一个相当复杂的问题，应当下些工夫把它学好，因为它是积分学的基础。

§7·1　不定积分的概念与性质

微分学的基本问题是寻求一个已知函数的导数，这个问题有其重要意义，我们已经看到它的许多应用。但是在实际中，还广泛地存在着与此相反的另一类问题，这一类问题并不是要寻找某一个函数的导数；而是反过来，要寻找一个函数，使得它的导数恰好等于某一个已知函数。

例如，如果某物体的运动规律是由方程

$$s=f(t)$$

给出的，其中 t 是时间，s 是物体走过的路程．那么对函数 $f(t)$ 进行求导，就得到这个物体在时刻 t 的瞬时速度

$$v=f'(t)$$

但是在力学里，我们也常遇到相反的问题，即已知物体在任一时刻 t 的速度 $v=v(t)$，而要去找出这个物体的运动方程

$s=f(t)$。从数学来看，这个问题就是要找一个函数 $s=f(t)$，使其导数 $f'(t)$恰好等于已知函数 $v(t)$。这正是微分学的逆问题，即已经知道了函数的导数，而要找出原来的函数。这就是本章要讨论的中心问题。

一、原函数与不定积分　我们首先引进原函数的概念。

定义　设已知函数 $f(x)$，如果存在函数 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x)$$

则把$F(x)$叫做$f(x)$的**原函数**。

由于 $F'(x)=f(x)$与 $dF(x)=f(x)dx$ 是等价的，所以也可以说：$F(x)$是微分$f(x)dx$的原函数。

例如$\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数．因为 $(\sin x)'=\cos x$。又如表示自由落体下降距离的函数$s=\frac{1}{2}gt^2$是速度 $v=gt$ 的原函数。因为$s'=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt$。

对于一个给定的函数 $f(x)$，假如 $F(x)$ 是它的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)+C$ （C 为任意常数）也是它的原函数。因为

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)$$

这就是说，如果一个函数有原函数，则必有无穷多个。

随之而来的问题是，除了形如$F(x)+C$的函数外，$f(x)$是否还有其他的原函数？即是说，一个函数的无穷多个原函数之间，仅仅就在常数项上有区别吗？下述定理肯定地回答了这个问题。

定理　如果函数 $f(x)$有原函数 $F(x)$，则 $f(x)$ 的无穷多个原函数都包括在函数族 $F(x)+C$之内。

证明 设$F_1(x)$和$F_2(x)$都是$f(x)$的原函数，根据定义，则$F'_1(x)=F'_2(x)=f(x)$。由拉格朗日中值定理的推论2，得$F_1(x)=F_2(x)+C$。由此可知，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$f(x)$的其他原函数必然可以写成$F(x)+C$的形状。这就是说，$F(x)+C$是$f(x)$的原函数的一般表达式。

这个定理的重要意义在于：如果要想找出$f(x)$的所有原函数，只要随便找出其中某一个就行了，在所找出的原函数上加上一个任意常数，便包括了所有的原函数。

定义 函数$f(x)$的全体原函数，叫做$f(x)$(或$f(x)dx$)的**不定积分**，记为

$$\int f(x)dx$$

函数$f(x)$叫做**被积函数**，微分$f(x)dx$叫做**被积表达式**，x叫做**积分变量**。

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，由定义有

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中C是任意常数，也称**积分常数**。

根据不定积分定义，上式右端的任意常数C是必须有的，并且正是由于表达式$F(x)+C$中有个任意常数，才称为不定积分。

例 函数$f(x)=x^2$的不定积分是

$$\int x^2\,dx^{①}=\frac{x^3}{3}+C$$

这可以用求导法来验证：

---

①应注意：积分号$\int$下面所写的是微分x^2dx，而不是只写被积函数x^2，初学者容易丢掉dx，总之，积分号下永远是微分表达式。

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$$

又 $f(x)=\sin x$ 的不定积分是

$$\int\sin x dx=-\cos x+C$$

因为 $(-\cos x+C)'=\sin x$

应当知道，检验一个函数 $F(x)$ 是否是另一个函数 $f(x)$ 的原函数的方法，就是求 $F(x)$ 的导数，看看 $F'(x)$ 是否等于 $f(x)$。这个验证方法，今后在判断我们所得到的积分结果是否正确时，是一个基本的方法。

不定积分的几何意义 现在讨论一下不定积分的几何意义，先从一个具体例子说起，然后讲一般的情况。

设有不定积分 $\int 2xdx=x^2+C$，这是一族函数，各个函数只差一个常数。所有原函数 $y=x^2+C$ 的导数都等于被积函数，即

$$y'=(x^2+C)'=2x$$

这就是说，各个原函数在同一点 x 的导数值都是相等的。从几何上（图7—1），这个函数族的图象是抛物线族 $y=x^2+C$（皆以 y 轴为对称轴，开口向上），如果将某一条抛物线沿 y 轴平行移动，便可得到抛物线族中的另外任何一条（比如若将 $y=x^2$ 上移一个单位便得 $y=x^2+1$，下移一个单位便得 $y=x^2-1$，等等）。在每一条抛物线上横标相同的点处作切线，它们的斜率都相等（比如在横标为 $x=1$ 的各点处的切线斜率都是 $y'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$），亦即这些切线都是平行的。

一般的，$\int f(x)dx=F(x)+C$ 是一族函数且 $[F(x)+C]'=f(x)$。它们的图象是曲线族 $y=F(x)+C$，这些曲线叫做函数 $f(x)$ 的**积分曲线**。曲线族可以由其中的某一条比如

$y=F(x)$ 沿 y 轴平移而全部得到。如果在每一条曲线上横标相同的各点处作切线，则这些切线都是平行的（图7—2）。

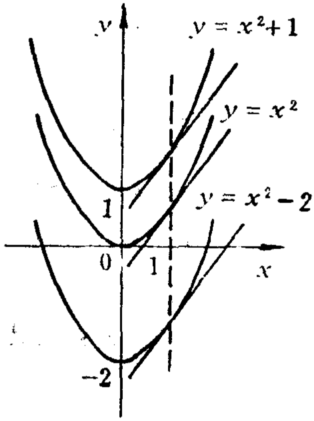

图 7—1

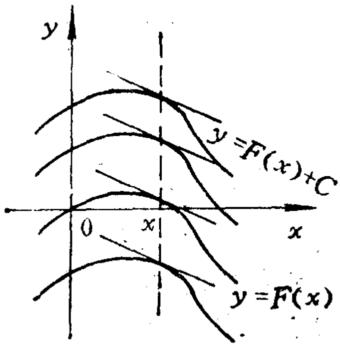

图 7—2

二、不定积分的性质

1°根据原函数和不定积分的定义，显然有

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x) \qquad (1)$$

此外，对于函数$F(x)$，先求导$F'(x)$，后求不定积分，则有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \qquad (2)$$

这就是说：若先积分后微分（求导），则两者的作用抵消；反之，若先微分后积分，则抵消后相差一个任意常数。

求原函数的运算称为积分运算，它显然与微分运算（求导运算）是互逆的运算。

2°被积函数中的常因子可提到积分号外面来：

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx \qquad (3)$$

3°有限个函数的代数和的积分等于各个函数的积分的代数和：

$$\int [f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\psi(x)]dx$$

$$=\int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx \pm \cdots \pm \int \phi(x)dx \qquad (4)$$

公式（3）和（4）容易由微分法直接验证。例如

$$\left\{ \int [f(x) \pm \varphi(x) \pm \cdots \pm \phi(x)]dx \right\}'$$
$$= f(x) \pm \varphi(x) \pm \cdots \pm \phi(x)$$

又
$$\left[\int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx \pm \cdots \pm \int \phi(x)dx\right]'$$
$$= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int \varphi(x)dx\right]' \pm \cdots \pm \left[\int \phi(x)dx\right]'$$
$$= f(x) \pm \varphi(x) \pm \cdots \pm \phi(x)$$

可见公式（4）成立。

求不定积分时，经常要应用（3）和（4），这是两个基本公式。

§7·2 基本积分表

从这一节开始研究不定积分的计算。关于导数的计算，首先有一批导数公式（导数表）作为基础，然后又有几个求导法则，于是便可以进行求导的计算。就这一点来看，不定积分的计算与导数的计算颇为类似，它也有一批积分公式（积分表）作为基础，并且也有几个最基本的法则。不过有一点值得提起注意，这就是不定积分的计算远不象导数计算那样简单了，应当作出相当的努力。

下面介绍一批积分公式，即所谓基本积分表，这些公式在积分运算中是离不开的，应当牢牢记住。公式的导出很简单，我们通过几个例子加以说明。

如果$F'(x)=f(x)$，则按不定积分定义，便有

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

例如，因$(C)'=0$，所以

$$\int 0dx = C$$

因 $$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}，所以$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

因 $$(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}，所以$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x + C$$

上面几个例子清楚地说明：有一个求导公式，就可以得到一个相应的积分公式。因此，把第四章的导数表中所列举的求导公式，逆转过来，就可以推出相应的积分公式，下面把这些公式列成表。

基本积分表

1．$\int 0dx = C$

2．$\int 1dx = x + C$ （即$\int dx = x + C$）

3．$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$

4．$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \quad (x>0)$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$① $(x>0或x<0)$

---

① 当$x<0$时，$\ln(-x)$的导数为$[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$，因此当$x<0$时，$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$。可见，不论$x>0$或$x<0$，公式$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$恒成立。

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

12. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

计算一下各式右端的导数，便知分别等于左端的被积函数，从而公式成立。

利用前面的不定积分性质2°，3°和基本积分表，我们可以计算一些简单函数的不定积分。

例1 $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

（注意，从哪一步开始不含积分号$\int$，就从这一步加上任意常数C）

例 2 $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$$= -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

例 3 $\int (5x^2 - 3x + 4)dx = \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4dx$

$$= 5\int x^2 dx - 3\int x dx + 4\int dx$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$$

（这里出现了三个不定积分，固然各有一个任意常数；但若干个任意常数之和仍是一个任意常数，因此只加一个任意常数C就行了）

例 4 $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2} \right) dx$

$$= 2a\int x^{\frac{1}{2}} dx - b\int x^{-2} dx + 3c\int x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$= 2a\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3c\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx\sqrt[3]{x^2} + C$$

例 5 $\int \frac{\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[4]{u}}{\sqrt{u}} du = \int (u^{(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})} - u^{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})})du$

$$= \int u^{\frac{1}{6}} du - \int u^{-\frac{1}{4}} du = \frac{6}{7}u^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}u^{\frac{3}{4}} + C$$

例 6 求 $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$

按多项式除法，被积函数化为

$$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$$

于是 $$\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^2-x+\operatorname{arctg}x+C$$

例7． $$\int(10^x+\operatorname{ctg}^2x)dx=\int 10^xdx+\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx$$

$$=\int 10^xdx+\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx$$

$$=\int 10^xdx+\int\frac{1}{\sin^2x}dx-\int dx$$

$$=\frac{10^x}{\ln 10}-\operatorname{ctg}x-x+C$$

例8 $$\int\frac{x+\cos^2x}{x\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\operatorname{tg}x+\ln|x|+C$$

§ 7·3 分部积分法

分部积分法体现为一个公式，它是从两个函数乘积的求导公式出发而推得的。

设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 是两个可微函数，由乘积的求导法则有

$$(uv)' = uv' + u'v$$

即
$$uv' = (uv)' - u'v$$

两端取积分，得

$$\int uv'dx = \int [(uv)' - u'v]dx$$
$$= \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

根据不定积分的性质1°，便有分部积分公式：

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx \qquad (\text{I})$$

分部积分公式还可以表为另一形式。因 $v'dx = dv$，$u'dx = du$，所以（I）式又可写成

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (\text{II})$$

总之，分部积分公式有两个表达形式，对于初学者还是（I）式较为方便，我们在下面也就着（I）式说明它的使用要领。

（I）式左端是要计算的给定的积分，其被积函数是u和v'的乘积；而右端第一项是两个函数（一个是u，另一是v'的原函数）的乘积，第二项则是一个新的积分$\int u'vdx$。这个公式的作用显然是，把所给的左端的积分转化为右端的另一个积分，如果右端的积分比较容易计算，那么这个公式便收到了效用。公式之所以称为分部积分法，则是由于把被积函数uv'的一部分v'分出来，先求出它的积分，而将问题转化为另外的一个积分。下面通过例子，说明使用要领。

例1 求 $\int \underset{(u)}{x}\,\underset{(v')}{e^x}\,dx$

解 被积函数是x与e^x的乘积，要把其中一个取作u，另一个取作v'。从公式看出，首先要从v'求出它的原函数v来，