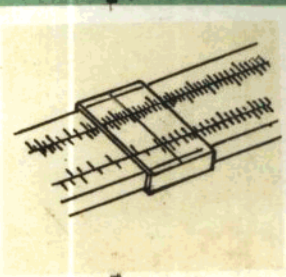
科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數學

(十六至廿冊合訂本)

湯元吉 主編



徐氏基金會出版

科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數 學

(十六至廿冊合訂本)

湯元吉 主編

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員

編輯人　林碧鏗　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十年七月一日再版

自然科學叢書之一

數　學

(十六至廿冊合訂本)

本叢書不分售・全套24冊特價400元

改訂為基價20.8元

主編者　湯元吉　台糖公司董事長

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱3261號　電話783686號

發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鏗　郵政劃撥帳戶第15795號

印刷者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段151號　電話979739號

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、茲爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元

2. 第二多數者美金4,000元

3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

61年12/16

編 輯 要 旨

一•本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二•本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三•本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四•原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尙需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五•本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六•本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七•本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尚冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋淼、李煥燊、南登岐、孫廣年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭堃厚、湯元吉等九人。

數學第十六册目錄

上 册 微 分 學

研究微分係數之計算方法，叫做微分學。微分學往往與積分 110
學相提並論，它們都是以極大和極小爲研究對象，故又統稱爲**微積分學** (Infinitesimalrechnung)。至於積分學之內容，俟後當再詳爲討論及之。

函數 $y=x^3$ 之微分係數

此函數之微分與第十四册〔59〕節所講函數 $y=x^2$ 之微分完全相同：即以一固定值 x_0 及與此有關之 $y_0=x_0^3$ 爲出發點。然後令此值 x_0 依任意值 Δx 增大，故結果須從 $x_0+\Delta x=x_1$ 計算其三次方；我們稱此三次方爲 y_1；它是由 y_0 及一增量 Δy 組成的，此增量可求之如下：

$$y_1=y_0+\Delta y_0=(x_0+\Delta x)^3=x_0^3+3x_0\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\,;$$

(參閱第六册中之〔620〕節)

爲了單獨求得 Δy_0，可令

$$y_0 \qquad\qquad =x_0^3 \text{ 與上式相減，結果：}$$

$$\Delta y_0 \qquad\qquad =3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

爲了求得增量比 $\Delta y_0:\Delta x$，要以 Δx 除上式：

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \qquad\qquad =3x_0^2 \;+3x_0\cdot\Delta x \;+\; (\Delta x)^2$$

因爲 Δx 逐漸變小時，乘積 $3x_0\cdot\Delta x$ 及二次冪 $(\Delta x)^2$ 必愈益接近於零，故由增量比到達微分係數（或稱導來式）之過程中可得

$$y'=\frac{dy_0}{dx}=\frac{d\,(x_0^3)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=3x_0^2$$

因爲 x_0 可能是一個任意值，而由增量比導至微分係數之計算方法乃對**任一** x 值均可適用，故可簡寫爲：

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^3)}{dx}=3x^2}$$

每一位真正了解微分法的構思之讀者，必能看出上式右邊之 x^2 並非由於 x^3 對 x 簡約而形成的。

爲使各位不要忘記，這種微分係數亦可代表級數(此級數所屬各項就是**增量比**)之**項之極限值**起見，特就此種級數列舉數例如下：

1) $x=1 \quad y=1^3=1$

Δx	$x+\Delta x$	$y+\Delta y$	Δy	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
0.1	1.1	$1.1^3=1.331$	0.331	3.31
0.01	1.01	$1.01^3=1.030301$	0.030301	3.0301
0.001	1.001	$1.001^3=1.003003001$	0.003003001	3.003001

各位倘令 Δx 變的更小的話，則對下式的道理必更能領悟：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3=3\cdot 1^2=3\cdot x^2$$

2) $x=2 \quad y=2^3=8$

Δx	$x+\Delta x$	$y+\Delta y$	Δy	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
0.1	2.1	$2.1^3=9.261$	1.261	12.61
0.01	2.01	$2.01^3=8.120601$	0.120601	12.0601
0.001	2.001	$2.001^3=8.012006001$	0.012006001	12.006001

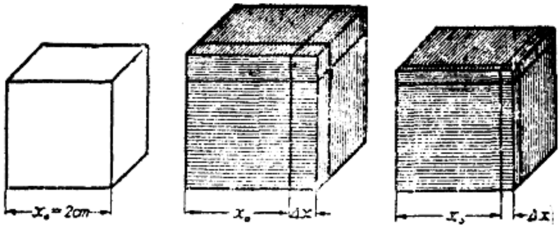
$$y'=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=12=3\cdot 2^2=3\cdot x^2$$

習　題：試對 $x=3$ 列成和上表一樣的級數！

111　關於正六面體的三次擴張情形

茲再利用圖形把剛才只由計算法求得的微分係數補充說明如下，俾使各位將來面對那些可以用手接觸到的立體圖形時，更能明白微分係數之精義所在。

試看〔111 a〕圖所示之正六面體（或稱正立方體），其邊長爲 $x_0=2cm$，其體積 V_0 則等於 $x_0{}^3=(2cm)^3=8\,cm^3$。設令此正立方體不管用何方法向三度空間（卽長濶高三個主要方向）同時依同一大小的增量 Δx 擴展爲更大之立體，好比首先爲 $\Delta x=0.5cm$



111 a　　111 b　　111 c

（見〔111 b〕圖），其次爲 $\Delta x=0.25cm$（見〔111 c〕圖），依此類推。（可見增量 Δx 乃愈變愈小。）換言之，各位可以設想正六面體的級數在〔111 a,b,c〕三圖中乃向右以逐漸減小之 Δx 無止境的繼續排列下去。一如我們在第六册〔620〕節和本册〔110〕節所講，又各位亦可從〔111 b 及 c〕二圖中讀出，每次擴展都是代表體積之增大：

$$\Delta V_0=3\,x_0^2\cdot\Delta x+3\,x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\,;$$

上式中，假如 Δx 比 x_0 小得多，則 $3x_0^2\cdot\Delta x$ 所表示者第一是三塊薄板，每板之體積等於 $x_0^2\cdot\Delta x$；第二是三個細長之角柱，每柱之體積等於 $x_0\cdot(\Delta x)^2$；第三是一個小立方體 $(\Delta x)^3$；一共是七塊小物體，符合於以前所求增量之和。

在〔111 b 及 c〕二圖中，體積的總增量是用陰影線表示，而原有之正立方體則被增量所遮蓋了。

〔111 d〕圖係依據〔111 b〕圖所示之物體（其 $\Delta x=0.5cm$），單獨畫出其體積增量 ΔV 部份，亦即將構成增量之七個立體這樣排列在一起，使之結合成一塊依側面直立之平板，其正對吾人之一面是由 $3\,x_0^2+3\,x_0\cdot\Delta x\ +\ (\Delta x)^2$ 等部份平面所組成。（參看〔111 e〕圖！）

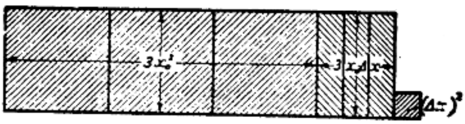
〔111 f〕圖是將〔111 c〕圖中之增量板畫成一個平面圖，〔111g〕圖亦然，但已變成平放之位置。在後一情形下之水平底面稱爲平板之**底面**，參看〔111 h〕圖；于是 Δx 就是平板之**高**。

各位從〔111 d, f, g〕三圖所示之三種畫法，當可直接讀出：

總增量 ΔV_0＝底面乘高＝〔$3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$〕$\cdot\Delta x$

我們現在要構成增量比 $\Delta V_0:\Delta x$；就〔111 d 至 g〕各圖所示

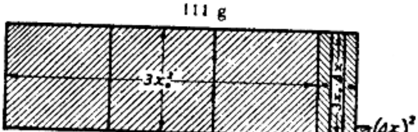
111 d



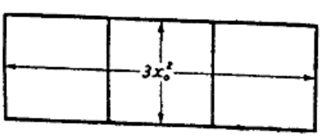
111 e

111 f

111 g



111 h



111 i

之增量柱而言，亦卽以其高 Δx 除其體積 ΔV_0。"角柱之體積等於底面乘高"，這是大家所熟習之公式，由此公式可求其逆：

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{\text{體積}}{\text{高}}=\text{底面}$$

這個除法的結果，各位在〔111 e 及 h〕二圖中可以看的很淸楚，卽在任何情形下，它總是等於增量角柱之底面，亦卽等於各面之和

$$3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

由此可見，〔111 e 及 h〕二圖所示此種平面相加之圖形，便是增量比 $\Delta V_0:\Delta x$ 之醒目圖解。玆設增量 Δx 愈來愈小，如 $\Delta x=0.1cm$，$\Delta x=0.01cm$ 等等；又設圖形之級數中前兩項就是〔111 e 及 h〕二圖；那末各位便可明白看出：

在此級數的每一項中，$3x_0^2$ 係保持不變。但三個長方形 $x_0\cdot\Delta x$ 却將愈來愈爲狹窄，而Δx的平方亦將愈來愈小；質言之，這些面積均將逐項接近於零。事實上用此方法永遠不能完全達到的極限值，在此圖形級數中就是指長方形 $3x_0^2$ 而言（看〔111 i〕圖），而這個長方形亦卽算出微分係數之值 $3x_0^2=3\times(2\,cm)^2=3\times2^2cm^2=12\,cm^2$ 的醒目表現。

上面的圖解亦可依據原始值 x_0 使之一般化：如將〔111 a 至 i〕各圖任意予以放大或縮小，那末 x_0 雖可取得任一正值；但所畫立體與平面的一切計算關係却依然不變。故下式恆可成立：

$$\boxed{\frac{dV}{dx}=\frac{d(x^3)}{dx}=3x^2}$$

關於體脹係數 112

我們在第十四册〔60〕節中已經講到過，所謂線脹係數乃指固體的溫度昇高 1°C 時，其長度之增量而言。假如被觀察之物體其原有長度爲 a，其增量爲 Δa，則線脹係數便等於 $\Delta a:a$。

設有邊長爲 a 之立方體，當溫度增加 1°C 時向三度空間（參閱第一册中之〔76〕節）作平均之膨脹，而每邊之增量如爲 Δa，則體積的增大便等

于 $\Delta V=3a^2\cdot\Delta a+3a\cdot(\Delta a)^2+(\Delta a)^3$。這種立體式的增大與立方體原有大小（即 $V=a^3$）之比，就叫做體脹係數。此係數之算法如下：

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3a^2\cdot\Delta a+3a\cdot(\Delta a)^2+(\Delta a)^3}{a^3}=\frac{[3a^2+3a\cdot\Delta a+(\Delta a)^2]\cdot\Delta a}{a^3}$$

假如溫度升高 $1°C$ 時線增量不大——所有固體都是如此——則上式方括弧內之被加數 $3a\cdot\Delta a$ 以及 $(\Delta a)^2$ 即可略而不計；因此求得體脹係數之簡單算式遂爲：

$$\frac{3a^2\cdot\Delta a}{a^3}=\frac{3\cdot\Delta a}{a}$$

最後二係數之比有如下列：

$$\frac{\text{體脹係數}}{\text{線脹係數}}=\frac{3\cdot\Delta a}{a}:\frac{\Delta a}{a}=\frac{3\cdot\Delta a}{a}\cdot\frac{a}{\Delta a}=3$$

由此可見，體脹係數約爲線脹係數之三倍。

習　題：

一鐵質立方體之邊長爲 $10cm$，設溫度增至 $100°C$ 時，a) 試按正確算式求該立方體之體脹係數(已知線脹係數 $=0.000012$)；b) 並按簡略算式求之，即大概等於線脹係數之三倍！

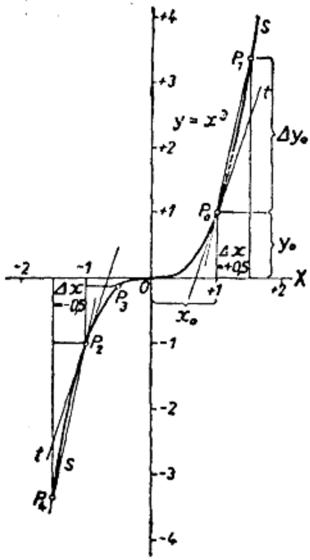
113　直角坐標系中之函數 $y=x^3$ 及其微分係數

請各位先參閱第十五册中之〔72〕節！在那裡我們還沒有把函數 $y=x^3$ 描繪成坐標系中之曲線。現在却要把它畫出來了，描繪時將此曲線上之點求得愈多愈好。如我們在第八册〔750〕節所學過的，應先任意假定若干 x 值，然後一一配以相當之 y 值（此類 y 值可依函數方程式 $y=x^3$ 求之）：

x	-2	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1	-0.9	-0.8
y	-8	-3.375	-2.744	-2.197	-1.728	-1.331	-1	-0.729	-0.512

x	-0.1	0	$+0.1$	$+0.2$	$+0.3$	$+0.4$	$+0.5$	$+0.6$	$+0.7$
y	-0.001	0	$+0.001$	$+0.008$	$+0.027$	$+0.064$	$+0.125$	$+0.216$	$+0.343$

爲了減輕和保證這種計算工作之不致發生錯誤起見，各位最好使用與此有關之算表。各位求得之點數愈多，則愈有把握把它們連



113 a

結爲一條沒有曲折之曲線（看〔113 a〕圖）。我們奉勸各位，用較大的比例尺將此曲線畫在各位的圖中，且以特別的顏色使之明白表現出來。此曲線稱爲**三次拋物線，簡稱拋撓線**。

現在要根據〔113 a〕圖展開函數 $y=x^3$ 之微分係數了。假如我們是從 $P_0\begin{cases}x_0=+1\\y_0=(+1)^3=+1\end{cases}$ 出發，而將增量 $\Delta x=0.5$ 附加於 $x_0=1$，於是屬於 $x_0+\Delta x=1.5$ 之曲線點 P_1，其坐標遂爲 $x_0+\Delta x$ 及 $y_0+\Delta y_0$。現在，讓我們來用所學過的方法求增量比 $\Delta y_0:\Delta x$。計算時各位要儘量將運算中每一數字與〔113 a〕圖作一比較：

$$\begin{aligned}
y_0+\Delta y_0 = (x_0+\Delta x)^3 &= x_0^3+3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\\
y_0 &= x_0^3\\
\hline
\Delta y_0 &= 3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\\
\frac{\Delta y_0}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}
\end{aligned}$$

以一定數字代替 x_0 及 Δx，則得：

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=\frac{3\times1^2\times0.5+3\times1\times0.5^2+0.5^3}{0.5}=\frac{2.375}{0.5}=\frac{4.75}{1}$$
$$=4.75$$

但 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ 所代表的是割線 P_1P_0 之斜率；按上面的算法，可知此斜率應爲 4.75 : 1。各位如在〔113 a〕圖中量一量，便可證明此得數是正確的。

假如我們選用 $\Delta x=0.1$（在圖中 $\Delta x=0.1\ cm$），則新點

$P_1\begin{cases}x_1=x_0+\Delta x=1+0.1=1.1\\ y_1=y_0+\Delta y_0=1.1^3=1.331\end{cases}$ 之位置必靠近於 P_0，而由此求得之結果遂爲 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=3.31$。假如選用 $\Delta x=0.01$，則 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ 會變成 3.0301，依此類推。

如將 Δx 選得愈小，則 P_1 點在曲線上必愈接近於 P_0。當我們設想 P_1 與 P_0 二點互相疊合的一瞬間，割線就會變成切線 t，此即在 P_0 點沿曲線 $y=x^3$ 所引繪的切線。其與 X 軸相交之斜率乃決定於微分係數，即

$$\frac{dy_0}{dx}=3x_0{}^2=3=3:1$$

此一斜率各位亦可在〔113 a〕圖中設法證實之。

我們再選另一曲線點作爲出發點，好比 $P_2\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=(-1)^3=-1\end{cases}$。茲設令屬於 P_2 之橫標（參閱第八册中之〔750〕節）$x_2=-1$ 加上一個負增量（例如 $\Delta x=-0.5$），則首先所求得者乃是前面已經算出過的一般增量比（其中 x 之指數現已變爲 2）：

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\frac{3\,x_2{}^2\cdot\Delta x+3\,x_2\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

以一定數字代入，則得：

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\frac{3\times(-1)^2\times(-0.5)+3\times(-1)\times(-0.5)^2+(-0.5)^3}{-0.5}$$

$$=\frac{-1.5-0.75-0.125}{-0.5}=\frac{-2.375}{-0.5}=\frac{+4.75}{1}$$

由此可見，我們求得的增量比和上面完全相同；通過 P_2 與 P_4 二點之割線和以前通過 P_0 與 P_1 二點所求得之割線亦有相同之斜率。這兩點各位只要一望〔113 a〕圖，便可加以證實。

此次如亦選用愈來愈小的 $|\Delta x|$，那末到了極限 $\Delta x=0$ 之時，增量比就會變成微分係數 $\frac{dy_2}{dx}=3=3:1$，而割線則會變成與曲線 $y=x^3$ 接觸於 P_2 點之切線 (t)，後者之斜率值與微分係

數值完全一致。

對於 $x_2=-1$ 亦可加上一個正增量 Δx，好比 $\Delta x=+0.5$；$x_2+\Delta x=-1+0.5=-0.5$；參看〔113 a〕圖中之 P_3。於是 $y_2+\Delta y_2=(-0.5)^3=-0.125$。增量比的一般算法與前無殊。然後代入一定數字即得：

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\frac{3\times(-1)^2\times(+0.5)+3\times(-1)\times(+0.5)^2+(+0.5)^3}{+0.5}$$

$$=\frac{1.5-0.75+0.125}{0.5}=\frac{0.875}{0.5}=1.75:1$$

這個比率 0.875 : 0.5，各位可在〔113 a〕圖中讀出，那就是易於畫上的直線 P_2P_3 與 X 軸相交之斜率。現在如果選取較小之 Δx 值，好比 $\Delta x=+0.1$，則得：

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\frac{3\times(-1)^2\times0.1+3\times(-1)\times0.1^2+0.1^3}{0.1}=\frac{0.271}{0.1}=2.71$$

對於 $\Delta x=0.01$ 可得：

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\frac{3\times(-1)^2\times0.01+3\times(-1)\times0.01^2+0.01^3}{0.01}=\frac{0.029701}{0.01}$$

$$=2.9701$$

如令 $\Delta x=0.001$，則得

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=\frac{3\times(-1)^2\times0.001+3\times(-1)\times0.001^2+0.001^3}{0.001}$$

$$=\frac{0.002997001}{0.001}=2.997001$$

各位如有時間和興趣的話，不妨對這種差比級數多算幾項（例如 $\Delta x=0.0001$ 等），不久便能證實它們無一不是趨向於項之極限值 3 的；所以結果所求得者亦爲 $\frac{dy_2}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=3$，而在 P_2 點緊靠上述曲線所作切線之斜率則爲 3 : 1。

曲線 $y=x^3$ 之近似作圖法 114

假如我們能够多計算幾個曲線點，並且多描繪幾條切線的話