广义积分和含参数的积分习题选解

林秀成 编　屠规彰 审校

吉林人民出版社

广义积分和含参数的积分

习 题 选 解

林秀成 编　　屠规彰 审校

吉林人民出版社

广义积分和含参数的积分

习题选解

林秀成 编　屠规彰 审校

*

吉林人民出版社出版

吉林省新华书店发行

通辽教育印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 8 7/8印张 194,000字

1983年1月第1版　1983年1月第1次印刷

印数：1—6,810册

书号：13091·130　定价：0.80元

内 容 提 要

本书集中选编了有关广义积分和含参数积分方面的习题四百余则，旨在介绍高等数学中此类习题的解题方法和技巧。内容翔实，推理详细，系统全面。可供理、工科高等院校、师范院校部分学生及对此方面数学知识应用较多的科学、技术、工程人员参考。

代　　序

林秀成同志编写的《广义积分和含参数的积分习题选解》集中选编了有关广义积分、含参数积分方面的习题，编排上注意由浅入深，同时力求系统、全面，推理详细，具有区别于现已出版的一般习题集的特色。

广义积分和含参数积分不仅在高等数学和数学分析课程中是一个重要的组成部分，而且其本身在数学的若干分支以及物理、力学、天文、气象等领域中亦有广泛的应用。故本书可作为工科高等院校部分学生及研究生的补充读物以及理科、师范院校部分学生的参考书。此外，对这方面数学知识应用较多的科学工作者和工程技术人员亦有一定的参考价值。

西安交通大学数学系　　游兆永

一九八一年九月

目　录

第 一 章

广 义 积 分

1° 函数的广义可积分性 Ⅰ 若函数$f(x)$在每一个有穷区间$[a,A]$上常义可积，则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

若此极限存在，则对应的积分称为收敛的，极限值即为积分之值；在相反的情形则称积分为发散的.

Ⅱ 若函数$f(x)$在b点的邻域内无界且于每一个区间$[a, b-\eta]$($\eta>0$)内常义可积，则可定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx.$$

若此极限存在，则对应的积分称为收敛的，极限值即为积分之值；在相反的情形则称积分为发散的.

2° 积分学基本公式 假定函数$f(x)$是定义在$[a,+\infty)$上而且在这区间的任一有穷部分 $[a,A]$上都是可积的.如果同时$f(x)$还有一个原函数 $F(x)$存在于整个区间$[a,+\infty)$上，当$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$为有穷值时就有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

〔其中$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$〕

3° 柯西准则 Ⅰ 积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件为对于任意的$\varepsilon>0$，存在有数$A_0>a$使得只要$A>A_0$且$A'>A_0$就有不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Ⅱ 若积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛（绝对收敛）.

4° 广义积分与无穷级数的联系 Ⅰ 要广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是对任一列数$A_n\to+\infty$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n}f(x)dx \qquad (A_0=a)$$

都收敛到同一个和数；这和数也就是广义积分的值.

Ⅱ 当$f(x)$为非负的情形，要广义积分收敛就只要它对于特别选定的一列数，$A_n\to+\infty$为收敛就够了.

对于有穷区间上无界函数的广义积分而言，也有类似2°—4°的性质.

5° 广义积分的（基于互相比较的）收敛判别法 先讨论正函数. Ⅰ 若当$x\geqslant a$时有不等式$f(x)\leqslant\varphi(x)$，则由积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$的收敛可以推知积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛，或者同样，

由积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的发散可以推知积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。对有穷区间上无界函数的广义积分也有相同的结论。

Ⅱ 若当$x\to+\infty$时，函数 $f(x)$ （与$\frac{1}{x}$比较）成为λ级无穷小，$\lambda>0$，则积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛或发散随$\lambda>1$或$\leqslant1$而定。

Ⅲ 若当$x\to b$时（与$\frac{1}{b-x}$比较）成为λ级无穷大，$\lambda>0$，则积分$\int_a^b f(x)dx$ 是收敛或发散随$\lambda<1$或$\geqslant1$而定。

6° 更细致的判别法 Ⅰ 假定二函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上有定义，而且$f(x)$在每一有穷区间$[a,A]$上为可积。若积分

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx$$

为A的有界函数：

$$\left|F(A)\right|=\left|\int_a^A f(x)dx\right|\leqslant K\ (K=\text{常数},\ a\leqslant A<+\infty)$$

而$g(x)$为单调函数，且当$x\to+\infty$时$g(x)\to0$，则积分

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

Ⅱ 若积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛（即使不是绝对地），而单调函数$g(x)$为有界：$|g(x)|\leqslant L$ （$a\leqslant x<+\infty$），则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ 收敛.}$$

7° 在柯西意义上的主值　若函数$f(x)$对任意的$h>0$积分

$$\int_a^{c-h} f(x)dx \quad \text{及} \quad \int_{c+h}^{b} f(x)dx$$

存在，则在柯西意义上的主值为

$$\text{V.P.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\left[\int_a^{c-h} f(x)dx + \int_{c+h}^{b} f(x)dx\right].$$

相仿地，$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$

8° 广义积分的若干重要性质　针对在有穷的或无穷的区间$[a,b]$上的（就通常意义而言或广义积分的意义而言的）可积函数。

Ⅰ 若两个在区间$[a,b]$上可积的函数$f(x)$与$g(x)$适合不等式$f(x)\leqslant g(x)$，则当$a<b$时

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ⅱ 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上绝对可积，则当$a<b$时

$$\left|\int_a^h f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ⅲ 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则当$a\leqslant x\leqslant b$时积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

都存在且还是x的连续函数。

Ⅳ 在同一假设之下，若函数$f(x)$在$x=x_0$这点连续，则

函数$\Phi(x)$在这点有微商存在，而且$\Phi'(x_0)=f(x_0)$。

9° 中值定理 Ⅰ第一中值定理 假设二函数$f(x)$与$g(x)$都在区间$[a,b]$上可积，又假设$f(x)$有界：$m\leqslant f(x)\leqslant M$，而$g(x)$不改变正负号；那么函数$f(x)\cdot g(x)$也就可积，而且

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,$$

其中$m\leqslant\mu\leqslant M$。

Ⅱ第二中值定理 假设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调且有界，而函数$g(x)$则在这区间上可积。那么函数$f(x)\cdot g(x)$也就可积，而且

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

其中$a\leqslant\xi\leqslant b$。

10° 广义积分的分部积分法 Ⅰ假设函数$u=u(x)$与$v=v(x)$连同它们的一级微商在区间$[a,b]$上除掉b点（可能$b=+\infty$）以外的全部点上皆有定义而且连续。于是等式

$$\int_a^b uv'dx=uv\Big|_a^b-\int_a^b vu'dx$$

成立，只须把式中二重替换看成差数

$$\lim_{x\to b}u(x)v(x)-u(a)v(a).$$

这里假定了一点，就是从整个等式中的三件东西（两个积分和一个二重替换）之中的两件有意义可以推出第三件也存在。

Ⅱ推广公式：

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \Big[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \\ + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v\Big]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v dx$$

当然，在这里函数u，v与所有出现的它们的各级微商仍然都假定是连续的．另外就是从整个等式中的三件东西之中的两件有意义可以推出第三件也存在．

11° 广义积分的变量代换 Ⅰ假设函数$f(x)$在$[a,b)$这一有穷的或无穷的区间上有定义而且连续，对于单调增函数$x=\varphi(t)$，它同它的微商$\varphi'(t)$在区间$[\alpha,\beta)$上是连续的，而β又可以是$+\infty$；我们还假定$\varphi(\alpha)=a$，而且$\varphi(\beta)=b$．最后这个等式的意义应当了解成$\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$．在这些条件之下就有等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$$

成立，不过要假定这两个积分中有一个存在（因而另一个也就可以推知其存在）．后面这个积分也许是通常积分，也许是以β为唯一瑕点的广义积分．

Ⅱ当$\alpha>\beta$而$\varphi(t)$是单调减函数上述理论同样成立．但应注意的是，积分下限α应当对应到积分下限a，而积分上限β应当对应到积分上限b，不管是$\alpha<\beta$或者是$\alpha>\beta$都一样．

12° 富汝兰尼积分 形状如下的积分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx \qquad (a>0,\ b>0),$$

称作富汝兰尼积分．

Ⅰ 我们对于函数$f(x)$作下列的假定：1）函数$f(x)$对于$x\geqslant 0$有定义而且连续，并且2）当$x\to+\infty$时具有有穷的极限：

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

此时富汝兰尼积分收敛，其值为

$$[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}.$$

Ⅱ 有时函数$f(x)$当$x\to+\infty$时没有有穷的极限，但却存在积分

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz.$$

此时积分收敛于 $f(0)\cdot\ln\dfrac{b}{a}$.

Ⅲ 假若函数$f(x)$的连续性被破坏在$x=0$这一点，不过还存在积分

$$\int_0^A\frac{f(z)}{z}dz \quad (A<+\infty)$$

此时积分收敛于$f(+\infty)\cdot\ln\dfrac{a}{b}$.

研究下列积分的收敛性：

1 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$.

答案 积分收敛。

2 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

答案　积分收敛。

3　$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$。

解　将积分拆成二项：$\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^2$. 在第一项中虽然当 $p<0$ 时 $x=0$ 是瑕点，但容易证明其收敛。在第二项积分中当 $p>0$ 时，$x=1$ 是瑕点，并且当 $x\to1$ 时被积函数是 p 级无穷大，因而当 $p<1$ 时积分收敛。综上可知当 $p<1$ 时题设积分收敛。

4　$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$。

解　将积分拆成二项：$\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$，则第一项积分当 $a>0$ 时收敛，而第二项积分当 $a<1$ 时收敛。所以题设积分在 $0<a<1$ 时收敛。

5　$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$。

解　瑕点为 $+\infty$ 和 0，$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$。

取 $0<\lambda<1$，即有

$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^{\lambda}} = \frac{x^{\lambda}\ln x}{1+x^2} \to 0$，　当 $x\to0$，　故 $\int_0^1$ 收敛。今取 $1<\mu<2$，则

$$\frac{\ln x}{1+x^2}:\frac{1}{x^{\mu}}=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\ln x}{x^{2-\mu}}\to 0，\text{当}x\to+\infty，$$

这就表明$\int_1^{+\infty}$也收敛．于是推知$\int_0^{+\infty}$收敛．

6 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$．

答案　$a\geqslant 0$时积分收敛．

7 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-ax}dx$．

答案　当$a>0$，$p>0$时积分收敛．

8 $\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$．

提示　令代换$y=\ln\frac{1}{x}$，则积分化成

$$\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)y}\cdot y^q dy，$$

这就是上题中的积分．

9 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\quad(n\geqslant 0)$．

答案　当$-1<m<n-1$时积分收敛．

10 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax}{x^n}dx\quad(a\neq 0)$．

答案　当$1<n<2$时积分收敛．

11 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$．

答案　当$1<n<2$时积分收敛。

12 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{2+x^n}dx\quad(n\geqslant 0)$。

答案　$-2<m<n-1$时积分收敛。

13 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx\qquad(n\geqslant 0)$。

答案　当$a=0$时，$n>1$积分收敛；$a\neq 0$时，$n>0$积分收敛。

14 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$。

解　容易验证只有$x=+\infty$是瑕点。因此研究积分$\int_0^{+\infty}$的敛散性相当于研究积分$\int_1^{+\infty}$的敛散性。我们可将这个积分化为下形：

$$\frac{1}{2}\left[\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx\right],$$

括号中第一个积分显然发散，第二个积分应用更细致的判别法知其收敛。综上可知题设积分发散。

15 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$。

解　当$x\to 1$时被积函数趋向0。

令$1<\lambda<2$，则

$$\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}:\frac{1}{x^\lambda}=\frac{\ln x}{x^{2-\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\to 0,\quad 当 x\to+\infty,$$

因此积分收敛.

16 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}dx\quad(a>0)$.

解　将积分拆成二项：$\int_0^1+\int_1^{+\infty}$，第一项是常义积分，而第二项的被积函数为有界函数与绝对可积函数之积，因此也是可积的。可见题设积分收敛.

17 $\int_0^{+\infty}x^{\mu-1}e^{-ax}\cos x\,dx\quad(\mu,a>0)$.

答案　积分收敛.

18 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx\quad(k>0)$.

解　函数$\frac{x}{k^2+x^2}$对于充分大的 x 单调下降而且当 $x\to+\infty$时趋向 0；积分$\int_0^A\sin ax dx$ 显然有界。根据更细致的判别法，题设积分收敛.

19 $\int_0^{+\infty}|\ln x|^\lambda\ \frac{\sin x}{x}dx\quad(\lambda>0)$.

解　瑕点为$+\infty$和 0，$\int_0^{+\infty}=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$.

取$0<\mu<1$，即有