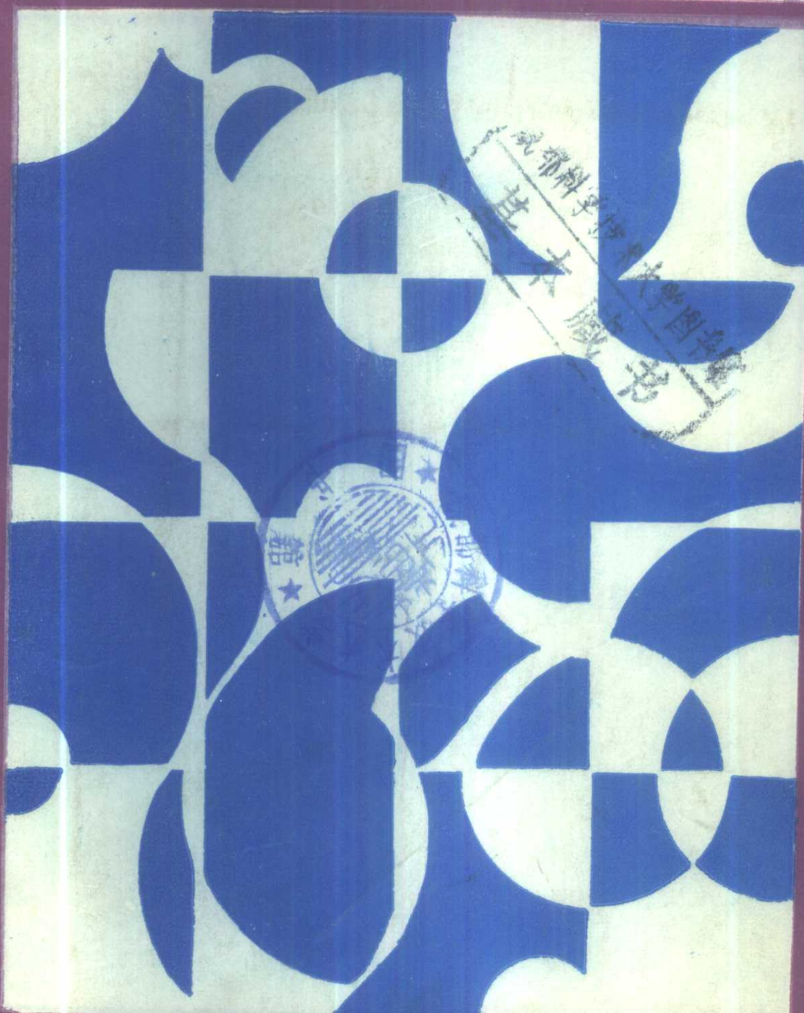
数学分析

下册

周性伟　刘立民　编著



南开大学出版社

数学分析

下册

周性伟 刘立民 编著

南开大学出版社

1987年

致

社

内容提要

本书分为上、下两册，涉及数学分析的全部内容。材料较为丰富。为了便于学生学习，本书注意了与现行中学课本内容的衔接。配有大量的习题，其中有些习题还有相当难度。除了数学系外，本书也可作为理科其它专业及工科有关专业的数学参考书。

数 学 分 析

周性伟 刘立民 编著

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

新华书店天津发行所发行

天津大邱庄印刷厂印刷

1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷

开本：850×1168 1/32 印张：13.5

字数：337千 印数：1—5,000

统一书号：13301·37 定价：2.65元

目　录

第十一章　广义积分

在第八章讨论黎曼积分时，总是设积分区间是有限的，并且证明了如果被积函数在积分区间上无界，则它在该区间上不可积。本章主要从积分区间无限和被积函数无界这两方面来推广通常的黎曼积分。这种推广了的非通常意义的积分叫广义积分。本章所讲的广义积分的定义、性质、收敛性的判别法等和无穷级数相应的内容非常相似（当然也有不同的地方），学习时可互相对比以加深理解和帮助记忆。

§11.1　无穷区间上的广义积分

无穷区间上广义积分的定义　设$f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义，并对任何实数$A>a$，$f(x)$在$[a,A]$上可积。如果$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$存在(有限)，则称$f(x)$在$[a,+\infty)$上的广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$存在或**收敛**，并规定

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

如果$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$不存在，则称$f(x)$在$[a,+\infty)$上的广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$不存在或**发散**。当$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散，但$\lim\limits_{A\to+\infty}$

$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \pm\infty$时，也记

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \pm\infty$$

从以上定义立即可得下列性质（请读者自己证明）：

性质1 如果$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$都收敛，$\alpha$、$\beta$为任意实数，则$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x$也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

性质2 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或发散。当收敛时有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

类似地可定义$f(x)$在无穷区间$(-\infty, a]$上的广义积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)\mathrm{d}x$$

对于$f(x)$在无穷区间$(-\infty, +\infty)$上的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$定义如下：如果存在一个实数$a$，使得$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都收敛，则称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，并规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

如果$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$中有一个发散，则称

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

从表面上看$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的收敛性及其值与$a$的选择有关，但实际上利用性质2容易证明它们是和$a$无关的。

例1 研究$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ $(a>0)$的收敛性。

解 因为

$$\int_a^A \frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\ln\frac{A}{a} & p=1\\ \frac{1}{1-p}(A^{1-p}-a^{1-p}) & p\neq 1\end{cases}$$

所以
$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}a^{1-p} & p>1\\ +\infty & p\leqslant 1\end{cases}$$

故当$p>1$时$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$收敛；当$p\leqslant 1$时$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$发散。

例2 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\mathrm{arctg}A=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{B\to-\infty}(-\mathrm{arc\,tg}\,B)=\frac{\pi}{2}$$

所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

以上两个例子都是通过求原函数来判别广义积分的收敛性（在收敛时，同时得到广义积分的值）。如果被积函数的原函数不易求出或不能用初等函数表示时，上述方法就不大适用了。下

面讲几个常用的广义积分收敛性的判别法。

首先由定义可知，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的收敛性问题就是函数 $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 当$A\to+\infty$时极限是否存在的问题，因此由函数极限的柯西收敛原理立即有

定理1 （柯西收敛原理）广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件为对任给$\varepsilon>0$，都存在$M>a$，使当$A_1$、$A_2>M$时就有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

例3 证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$收敛（当$x=0$时，被积函数定义为1）。

证 因为对任何$A_2>A_1>0$，有

$$\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\cos A_1}{A_1}-\frac{\cos A_2}{A_2}-\int_{A_1}^{A_2}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

所以

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\int_{A_1}^{A_2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{2}{A_1}$$

故对任给$\varepsilon>0$，取$M>\frac{2}{\varepsilon}$，当$A_2>A_1>M$时就有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{A_1}<\frac{2}{M}<\varepsilon$$

因此根据定理1，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛。

柯西收敛原理在应用时，有时也不大方便，在此原理的基础上可建立起一些便于应用的收敛判别法。下面先讨论被积函数是非负的情形。

定理2 （比较判别法） 设当$x\geqslant a$时，$g(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$，且对任何$A>a$，$f(x)$、$g(x)$都在$[a,A]$上可积，那么：

（i） 如果$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

（ii） 如果$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$也发散。

证 （i） 任给$\varepsilon>0$，因为$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，所以由定理1，存在$M>a$，使当$A_2>A_1>M$时就有

$$\int_{A_1}^{A_2}g(x)\,\mathrm{d}x=\left|\int_{A_1}^{A_2}g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

从而当$A_2>A_1>M$时有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_{A_1}^{A_2}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{A_1}^{A_2}g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

因此由定理1，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。

（ii） 反之，假设$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，则由（i）知必有$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，与已知条件矛盾，因此$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散。

定理2′（比较判别法的极限形式） 设当$x\geqslant a$时，$f(x)$，$g(x)\geqslant 0$且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l \tag{1}$$

那么：

（i） 如果$0\leqslant l<+\infty$，$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛；

(ii) 如果$0<l\leqslant+\infty$，$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。

证 (i) 对$\varepsilon=1$，由(1)知存在$M>a$，使当$x\geqslant M$时有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<1$$

从而

$$0\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}<1+l$$

$$0\leqslant f(x)\leqslant(1+l)g(x)$$

由于$\int_M^{+\infty}(1+l)g(x)\mathrm{d}x$收敛，故由定理2知$\int_M^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，从而$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛。

(ii) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l,\quad 0<l\leqslant+\infty$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{l},\quad 0\leqslant\frac{1}{l}<+\infty$$

现在假设$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则由刚才证明的(i)知$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$也收敛，与已知$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散矛盾。因此$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。

如果把定理2中的$g(x)$取为$g(x)=\frac{c}{x^p}$ $(c>0)$，再结合例1对$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$收敛性的讨论，立即有以下定理。

定理3 （柯西判别法） 设当$x\geqslant a>0$时$f(x)\geqslant 0$，且对任何$A>a$，$f(x)$在$[a,A]$上可积，那么：

（i） 如果$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{c}{x^p}$（$c$为常数），$p>1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛；

（ii） 如果$0\leqslant\frac{c}{x^p}\leqslant f(x)$ （$c>o$为常数），$p\leqslant 1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。

定理3′（柯西判别法的极限形式）设$x\geqslant a>0$时$f(x)\geqslant 0$，且对任何$A>a$，$f(x)$在$[a,A]$上可积，又$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)=l$，那么：

（i） 如果$0\leqslant l<+\infty$，$p>1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛；

（ii） 如果$0<l\leqslant+\infty$，$p\leqslant 1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散。

例4 判别下列积分的收敛性：

（i） $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$； （ii） $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$；

（iii） $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\ln x}$。

解 （i） 因为由洛毕达法则易知$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x+1}=0$，所以由定理3′（i）知$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$收敛。

（ii） 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}=1$，所以$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$发

散。

(iii) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+\ln x}=+\infty$，所以 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+\ln x}$ 发散。

定理 2 和定理 3 都是关于非负函数广义积分收敛性的判别法。如果被积函数 $f(x)$ 是非正的即 $f(x)\leqslant 0$，那么 $-f(x)\geqslant 0$。由于 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}[-f(x)]dx$ 有相同的收敛性（性质 1），故可用定理 2、定理 3 来判别 $\int_a^{+\infty}[-f(x)]dx$ 的收敛性，从而得到 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的收敛性。如果对任何 $M>a$，$f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上都变号，那么可考虑 $|f(x)|\geqslant 0$。不过一般说来，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 不具有相同的收敛性。当 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 必收敛（定理 4）；反过来，当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 不一定收敛（例 5）。

定理4 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛。

证 任给 $\varepsilon>0$，因为 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，所以由柯西收敛原理，存在 $M>a$，使当 $A_2>A_1>M$ 时，有

$$\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx<\varepsilon$$

从而当 $A_2>A_1>M$ 时

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

因此由柯西收敛原理知$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。

例5 证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$收敛而$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$发散。

证 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的收敛性在例3已证明了，因此只要证$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$发散。

令$x = k\pi + t \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$，则

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{k\pi + t}\mathrm{d}t$$

$$> \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

从而
$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x > \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = +\infty$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = +\infty$$

又因$\int_0^{A}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 为A的单增函数，故

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = +\infty$$

因此$\int_{0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$发散。

定义 设$x\geqslant a$时$f(x)$有定义，又对任何$A>a$，$f(x)$在$[a,A]$上可积。如果$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**绝对收敛**。如果$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散而$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**条件收敛**。

对于绝对收敛的广义积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，用定理2、定理3可能判别出$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛。但是对于条件收敛的广义积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，绝不可能用定理2、定理3判别出$\int_{a}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，最多只能判别出$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$发散，这时也得不到$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，因此对条件收敛的广义积分，定理2、定理3无能为力。对于条件收敛的广义积分，通常可用阿贝尔判别法和狄里赫莱判别法来判别其收敛性。为了证明这两个判别法，需要先证明以下定理。

积分第二中值定理

(i) 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上单增且$g(a)\geqslant 0$，则存在$\xi\in[a,b]$使得

$$\int_{a}^{b}f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(ii) 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上单减且

$g(b)\geqslant 0$，则存在$\xi\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

(iii) 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上单调，则存在$\xi\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

证

(i) 令 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续。设$F(x)$在$[a,b]$上的最大值、最小值分别为M、m，由于$F(a)=0$，所以$M\geqslant 0\geqslant m$。

现将$[a,b]$ n等分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$$

则可证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]g(x_k)$$

$$=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

这是因为

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]g(x_k)-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)[g(x_k)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant L\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[g(x_k)-g(x_{k-1})]\mathrm{d}x$$

$$= L\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

$$= L[g(b)-g(a)]\frac{b-a}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

其中L为$|f(x)|$在$[a,b]$上的一个上界。

另一方面，由于

$$g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]g(x_k)$$

$$= g(x_n)F(x_n)-\sum_{k=1}^{n}F(x_k)g(x_k)+\sum_{k=1}^{n}F(x_{k-1})g(x_k)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1}F(x_k)g(x_k)+\sum_{k=0}^{n-1}F(x_k)g(x_{k+1})$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1}F(x_k)g(x_k)+\sum_{k=1}^{n-1}F(x_k)g(x_{k+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}F(x_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)] \qquad (6)$$

又因$g(x)$非负单增及$M\geqslant(\geqslant m$，所以对（6）最后一个等号右边的式子，有以下不等式

$$m[g(b)-g(x_1)] = m\sum_{k=1}^{n-1}[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}F(x_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n-1}[g(x_{k+1})-g(x_k)] = M[g(b)-g(x_1)]$$