高等学校交流讲义

复变函数論

FUBIAN HANSHULUN

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室编

人民教育出版社

高等学校交流讲义

复变函数論

FUBIAN HANSHULUN

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室編

人民教育出版社

本书是北京大学数学力学系数学分析与函数論教研室在他們教学工作的基础上编成的。內容包括引言、解析函数的概念、初等函数及其所构成的保形变换、解析函数积分的基本性質、解析函数的級数展式、留数理論及其应用、解析开拓、保形变换的一般原理与多角形变换、基本型积分与混合边值問題等章，可作为綜合大学及高等师范学校数学各专业“复变函数論”課程的教材，也可供高等工业学校的相近专业选用。

复变函数論

北京大学数学力学系
数学分析与函数論教研室编

人民教育出版社出版 高等学校数学用书编輯部 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）
人民教育印刷厂印装
新华书店科技发行所发行
各地新华书店經售

統一书号 13010·1025 开本 850×1168 1/32 印張 9 4/16
字数 217,000 印数 00001—22,000 定价（6）¥0.90
1961 年7月第1版 1961 年7月北京第1次印刷

目　　录[①]

---

① 凡前面标有 * 号的章节都是小字排印，根据課程講授时数及进度等具体情况可以不講。

引　言

与其他科学一样，复变函数論也是由于客观实际的需要而产生和发展起来的。在解代数方程或常系数微分方程时，只有在复数域中进行討論才能彻底搞清問題。解析函数关于实部与虚部满足偏微分方程的条件①是在研究流体力学中得到的；当不可压縮的流体作平面稳定流动时，在无旋无源的流动区域内，流速的共轭函数就是一个解析函数。复变函数論另一个最重要的概念——保形变换也是从物理概念中产生的。生产实际問題与自然科学中許多学科的要求不断推动着复变函数的发展，而以数学分析的理論和方法为基础，复变函数更多的新理論和新方法得以創立，并用来解决自然科学各部門（如空气力学、流体力学、彈性理論、静电場、磁場、热場等等）的重要实际問題。力学、物理和工程技术中的平面位势理論与复变函数的联系是特别有成績的；复变函数論一方面成为极有力的解析工具，另方面又提供一种广泛的几何定性研究方法。俄国与苏联的学者成功地利用复变函数的保形变换和級数展开的方法計算了繞流对机翼所引起的升力与力矩，并且同样成功地运用这些方法处理了滲流中的应力計算等問題。不仅如此，在平面彈性理論的边値問題中，复变函数的方法也得到相当普遍的应用。作为最近二十年发展起来的复变函数的新分支——广义解析函数与拟保形变换也是与力学的許多問題密切地联系着，这种

---

① 这是解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$ 的等价概念之一，要求实部 $u(x,y)$ 与虚部 $v(x,y)$ 满足以下偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

理論的研究看来是很有前途的。

复变函数論的发展与数学分析是不能分离的，它的許多概念和定理与数学分析中的理論相类似，当然复变函数論自有其特点。解析函数是复变函数論研究的中心对象；解析函数 $f(z)$ 的微商 $f'(z)$ 与实变函数 $f(x)$ 的微商 $f'(x)$ 虽然在定义的形式上相同并且是密切联系着的，但是从反映的实际对象来看却又是有区别的。数学分析中，如果把$f(x)$看成質点运动中依賴于时間的运动路程，$f(x)$的微商 $f'(x)$就表示質点运动速度；而解析函数論研究的实际对象一般是平面問題，自变量是 $z=x+iy$，如果把 $f(z)$ 看成流体流动的复势，它的微商 $f'(z)$却是流速的共軛函数。从复变函数 $f(z)$的实部 $u(x, y)$ 与虛部 $v(x, y)$来看，$u(x, y)$ 与$v(x, y)$都是x, y的二元实变函数；而复变函数积分可以表为二元实变函数的两个綫积分的一种組合[①]；这与二元函数的綫积分在形式上有所不同，但从反映实际对象的本質来看又是一样的。解析函数論中許多定理的論証都借助数学分析中的一些結果，如在証明解析函数的基本定理时就利用到分析中的場論第一公式。可以說，复变函数論是数学分析在复数領域中的进一步发展。

微分方程、积分方程、計算数学、概率論以及数学的其他分支中許多問題的解决都依賴于复变函数。特别是偏微分方程，无論过去和現在，复变函数論方法都成为它的一种不可缺少的强有力的工具。事实上，解析函数的实部与虛部所滿足的方程是属于橢圓型偏微分方程組的。由于复变函数如解析函数具有很多独特的性質，在能够利用复变函数論方法研究偏微分方程的地方，一般說来問題的处理往往比較簡便。这显示了复变函数論方法的优越性。

---

① 复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$沿曲綫 c 的积分可写成：

$$\int_C f(z)dz=\int_C [u(x,y)dx-v(x,y)dy]+i\int_C [u(x,y)dy+v(x,y)dx]$$

也可以說，复变函数是介于数学分析与偏微分方程論之間的一个数学分支。

复变函数与数学中各領域以及自然科学之間的联系日益增长着，这恰恰証实了复变函数論进一步发展的广闊前途。

作为数学、計算数学、力学等专业的必修課程的复变函数論，主要讲述解析函数最基本的理論和方法。我們在本书中力图貫徹辯証唯物主义观点与理論联系实际的原則，論述旣求簡要精煉，又要反映現代科学发展水平。通过这門課程的学习，要求讀者系統并且牢固地掌握复变函数的基本理論和方法，获得利用复变函数論方法的特点去处理一些实际問題的能力，为进一步学习专門化課程、解决社会主义生产建設中所提出的实际問題或者进行数学工作，作好必要的和踏实的准备。

第一章　解析函数的概念

作为复变函数研究的主要对象——解析函数，它的概念与流体力学、彈性理論以及电学等方面的大量实际問題有着密切的联系。在这一章中，我們仅圍繞着流体流动的現象引出解析函数的概念，作为进一步学习与掌握复变函数理論和方法的基础。在引入解析函数概念之前，我們先补充复变函数的一些預备知識——复数及其运算，并引进复变函数的极限与連續性概念。对于其中一些已为大家所熟悉的概念，我們不作詳細說明。另外一些与数学分析中相类似的性質，只叙述而不作証明。

这一章学习的基本要求是：

1°清楚地理解解析函数的实际背景与严格定义；

2°掌握解析性与哥西-黎曼方程及調和函数的关系。

§1. 复数及其运算

1. 复数。 在解代数方程时，我們已經接触到符号“i”，它是方程：

$$x^2+1=0$$

的一个根，即　$i^2=-1$，$i=\sqrt{-1}$.

我們称 $z=x+iy$ 为复数，其中x、y都是实数，分别称为 z 的实部与虛部，記为

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

在以后我們将看到复数的概念及复变函数的方法在很多实际問題中有重要的应用。因此不能只把复数看作是純粹数学邏輯推导的結果，而忽視了它們反映客观实际現象这件事实。

試考慮一个江河表面上水的流动。假定在河面上取好一坐标系 Oxy，我們把河面上任意一点 P 在某一时刻速度的两个分量記为 v_x 与 v_y。我們可以把速度向量 v 写成复数 $v=v_x+iv_y$，与此类似，可以把均匀带电无限長导綫周圍，垂直于导綫的某个平面上的电場强度写成复数形式 $E=E_x+iE_y$，其他的例子很多，不胜枚举。总之，我們可以把由两个有序实数所决定的量一律写成复数形式。人們經过長期的摸索与研究，发現对于很多的平面問題（如流体力学与彈性力学中的平面問題等）来說，应用复数及复变函数的工具是十分有效的。同时，也正是在这些大量的实际問題的要求下，复变函数的理論和方法才得建立与不断发展（如保形变换的概念和方法、大量的边值問題、拟保角变换和广义解析函数論等等），并得到广泛的应用。

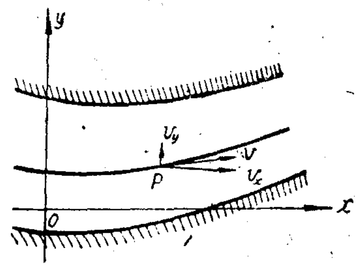

图 1.1

2. 复数的几何表示。 在上面我們已經知道两个有序的实数可以写成一个复数形式。現在我們进一步把复数用平面上的向量表示出来。

在平面上取二正交坐标軸 Ox 与 Oy，我們用坐标为 (x, y) 的点 P 来表示复数 $z=x+iy$，这样复数便与平面上的点一一对应起来。特别是实数与 Ox 軸上的点一一对应，所以 Ox 軸称为实軸；又純虛数与 Oy 軸上的点对应起来，所以 Oy 軸称为虛軸。实軸与虛軸的交点称为原点。我們用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+iy$，x, y 顺次等于 $\overrightarrow{OP}$ 沿 Ox 軸与 Oy 軸的分量。向量 $\overrightarrow{OP}$ 的長度称为复数 z 的模，以符号 $|z|$ 或 r 表示，因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

我們有不等式

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|.$$

向量$\overrightarrow{OP}$与Ox軸的夹角θ称为复数z的**幅角**,記作

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

我們知道任何一个复数有无穷多个幅角, 如果θ_1是其中的一个, 那么,公式

$$\theta=2k\pi+\theta_1\qquad(k\text{ 为任意整数})$$

就給出全部幅角。在z的幅角中,若θ_0满足

$$0\leqslant\theta_0<2\pi,$$

则θ_0称为z的主幅角,把它記作$\theta_0=\arg z$,我們有

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & z\text{ 在第一象限时},\\ \left(\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)+\pi, & z\text{ 在第二象限时},\\ \left(\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)+\pi, & z\text{ 在第三象限时},\\ \mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+2\pi, & z\text{ 在第四象限时}。\end{cases}$$

根据直角坐标与极坐标的关系, 我們有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

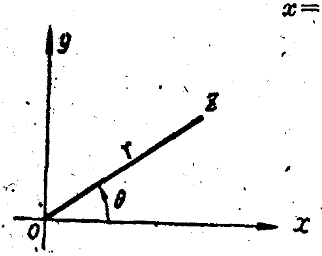

图 1.2

所以,复数可表成三角形式:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

根据我們已知的公式①

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta};$$

又可以把复数写成指数形式:

$$z=re^{i\theta}.$$

① 这称为欧拉公式,它实际上是一种規定。容易證明

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2).$$

因而有$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,这說明規定的合理性(參看第二章 § 1.2)

前述河面水流速度 $v=v_x+iv_y$，其大小即为 $|v|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$，而其方向则由幅角 $\arg v$ 所确定。

例 已知流体某点的速度为 $v=1+i$，求速度的大小与方向。大小是 $|v|=\sqrt{2}$，而方向是与 Ox 軸的交角即 $\arg v=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$。我們也可以把 v 表示成三角形式与指数形式:

$$v=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

由于我們将复数与平面上的点建立了一一对应，以后我們常常称复数 z 为点 z，并称这平面为复数平面或复平面或 z 平面。

3. 复数球面。 在地图制图学中考虑到球面与平面上点的对应关系，即把地球投影到平面上去进行研究。这种方法叫做测地投影法。我們将通过测地投影建立复平面与球面上点的对应并且引进复平面的无穷远点。

取一个在原点 O 与平面相切的球面，并通过点 O（南极 S）作一垂直于平面的直綫与球面交于 N 点（北极），我們称 N 点为极点。分别用直綫段将点 N 与球面上的点 Z 相連，其延长綫交平面于一点 z，这就建立起球面上的点（不包括 N 点）与平面上的点（有限点）一一对应关系，点 z 是点 Z 在平面上的投影，点 Z 可以看作是复数 z 的球面图形，这球面就叫作复数球面。現在研究平面上与极点 N 相对应的点。对于平面上一个以原点 O 为中心的圓周 C，在球面上相应的图形也是一个圓周 Γ（所謂緯綫）。当圓周 C 的半徑越来越大时，圓周 Γ 便越趋近于极

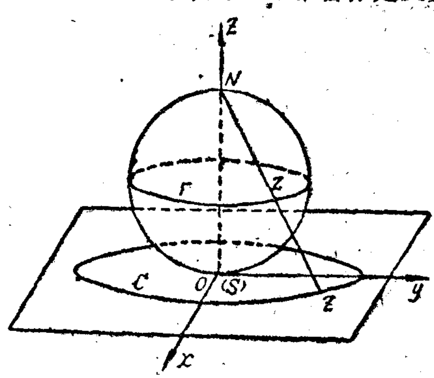

图 1.3

点 N。因此，点 N 可看作是平面上一个模无限大的假想点在球面上的图形。这个假想点称为无穷远点并記作 ∞，复平面加上点 ∞ 后叫做扩充平面。这里值得注意的是在复平面上点 ∞ 只有一个，它和数学分析中 $+\infty$，$-\infty$ 的概念不同。我們把扩充平面的无穷远点看作一点，是因为实际的需要和研究的方便。

4. 复数的运算及其几何意义。 我們来考虑复数的初等运算。

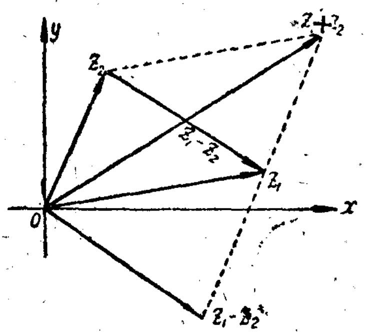

图　1.4

1°复数相等的概念。我們知道，两个向量相等必須坐标分别相等。复数的相等概念也是这样，对于两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，如果 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称 z_1 和 z_2 是相等的。应当指出复数是沒有大小的。

2°复数的加法与减法。与平面上两个向量的(平行四边形)加法和减法一样，我們定义两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的加法和减法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

这样复平面上的‘三角不等式’就表現为

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \; |z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|.$$

于是复数的加减运算与絕对值不等式的运算同实数的一样。

3°复数的乘法与除法。我們希望复数的乘除法也同实数的一样，这是在代数里面已經行之有效的。

我們定义两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的积如下：

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

这样，复数的乘法就可以同实数一样地进行，只需注意 $i^2=-1$。应当指出，这样定义的乘积与向量的‘·’乘及‘×’乘都不一样。

不难驗証，用三角形式与指数形式表示时就有：

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

其中 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$.

由上式推出

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,$$

其几何意义即 z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 拉长 r_2 倍，再把它旋轉 θ_2 角度。

作为乘积的例子，我們考慮复数的正整数次幂 z^n，显然有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta}.$$

除法是乘法的逆运算，用一个复数 $z_2=x_2+iy_2(z_2\neq0)$ 除一个复数 $z_1=x_1+iy_1$，就是求出这样一个复数 $z=x+iy$，使得 $z_1=z_2\cdot z$. 根据定义，为求出 z 需要解方程組

$$x_2x-y_2y=x_1,\quad y_2x+x_2y=y_1.$$

这样就得到

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

利用三角形式与指数形式，則有

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

这說明了：

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

4°共軛复数。复数 $z=x+iy$ 的共軛复数定义为 $x-iy$，記作 $\bar{z}=x-iy$。显然 $\mathrm{Arg}z=-\mathrm{Arg}\bar{z}$, $|z|=|\bar{z}|$。这表明在复平面上，z 与 $\bar{z}$ 两点对于实軸而言是对称点。

我們也容易驗証关系：

$$\overline{(\bar{z})}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ (z_2\neq 0).$$

以及

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2.$$

§2　复变函数的概念及其极限与連續性

1. 平面点集与区域。在处理关于复变量的具体問題或考慮关于复变量的理論問題时，每一个复变量都有它自己的范圍，卽所謂区域。在研究区域之前，我們需要先講平面点集。我們現在簡单叙述有关平面点集的一些基本概念。

平面上任一点 z_0 的邻域定义为一个以 z_0 为中心并以 ρ（任意正数）为半徑的圓内部的点集合，可表成：$|z-z_0|<\rho$。考慮一个点集 E，对于 E 中一个点 z_0，若点 z_0 有一个邻域而其中一切点都属于 E，則称 z_0 为点集 E 的内点。若 z_0 的某一个邻域内的点都不属于 E，則称 z_0 为 E 的外点。另外若一点 α（不一定属于 E）的任意邻域都含有 E 的无穷个点，則 α 称为 E 的凝聚点。

若点集 E 的点皆是内点，則 E 称为开集。若点集 E 的所有凝聚点都属于 E，則 E 称为閉集。

平面上一个点集 D 称为一个区域，如果 D 具有下列两个性質：

1) D 的每一点是一个圓的中心，这个圓（卽为 z_0 的一邻域）的内部属于 D（开集性）；

2) D 的任意两点可以用一条折綫連起来，这条折綫整个属于 D（連通性）。

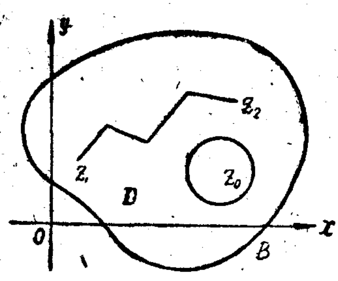

图　1.5

一个区域 D 称为有界的，若是可以把 D 范圍在一个以原点为中心的圓里面。一点 z_0 称为 D 的一个边界点，若 z_0 不属于 D 但任意一个 z_0 的邻域都包含 D 的点。D 的全