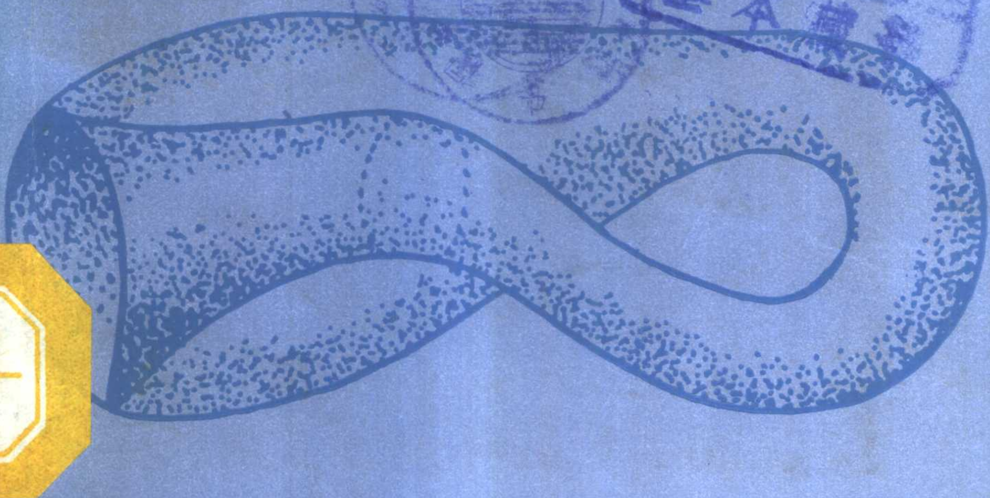
定光桂 著

拓扑线性空间选讲



广西教育出版社

拓扑线性空间选讲

定光桂　著

广西教育出版社

拓扑线性空间选讲

定光桂　著

☆

广 西 教 育 出 版 社 出 版

（南宁市七一路 7 号）

广西民族语文印刷厂印刷

开本850×1168 1/32　7.375印张　180千字

1987年9月第 1 版　1987年9月第 1 次印刷

印　数：1—1500册

统一书号：7510·103　定价：1.85元

ISBN 7—5435—0133—3

G·103

前　　言

随着近代分析的发展，拓扑线性空间的知识已经深深地渗入到分析的许多分支，起着日益重要的作用．特别地，泛函分析中的许多问题，常常只有在拓扑线性空间中才能得到真正的解决．因此，对于从事分析特别是泛函分析的教学与科研的同志们来说，学习一点拓扑线性空间的知识是十分必要的．

在本书中，除了选讲拓扑线性空间的基本知识以外，还特别选讲了与泛函分析有着紧密联系的一些内容．例如，线性算子（泛函）的连续性，有界性，Hahn-Banach定理，弱拓扑与*弱拓扑，以及赋范空间中“弱紧”与“弱列紧”的等价性等等．

本书的第四讲（赋β-范空间）是一般拓扑线性空间的中外书籍中所讲不多甚至没有的．选讲此章内容是因为，一方面它与次加泛函理论有关联，另一方面由于八十年代以来，对于(l^β)，$L^\beta[a,b](0<\beta<1)$这一类非局部凸的“赋β-范空间”的讨论已经开始活跃．因此，了解一下此类空间的特性是有益的．鉴于此讲的“独立性”，因此，对于不想学习有关内容的同志，完全可以“跨”过去，并不影响对下一讲的学习．

在每一讲后面，选择了一些习题（书后附有解答提示）．这些习题（及其解答）均是作为书中内容有机的组成部分，请读者不要舍弃．

此书乃是在我1982年为我校数学系研究生讲课的教材基础上整理而成的，曾多次为我校数学系（所）的研究生讲授，以及几次在校外的讲习班上讲学．此后经不断修改，乃形成了现今易于

作教材的本书内容。因此，一方面我得感谢那些听课的同学们、同行们，谢谢他们在我的教材和教学中提出的一切宝贵的意见；另一方面，由于至今甚少见过中文的关于拓扑线性空间的书籍，无以借鉴和学习参考，因此本书作为国内这方面的教材参考书，难免有许多不足之处，特别是选材与内容上必然有不少缺点与错误，对此亦恳切地希望同志们批评、指正。

定光桂

1986年于南开大学

目　录

第〇讲　Hamel基

（一）

首先，我们给出几个需用的定义：

定义1　域K（可为实数域R或复数域C）上的**线性空间，线性子空间**．（略）

定义2　（域K上的）线性空间E内的子集S称为**线性相关**的，是指零元θ是S中元的非平凡线性组合（即组合系数不能均为0）；反之，则称S为**线性无关**的．

定义3　线性空间E内的子集S的所有线性组合全体，称为S的**线性包**，记为$[S]$或$L(S)$；有时，亦称为由S产生的线性子空间．

有了上面的定义，我们就可以给出本节要讨论的Hamel基的概念：

定义4　线性空间E内的子集H称为E的**Hamel基**（简记为H.-基），是指：H为E内的线性无关集，且有$[H]=E$．当H为E的Hamel基时，$\forall x\in E$，必有$x=\sum\xi h$（其中，$h\in H$，$\xi\in$K），我们称ξ为相应h的**系数**．

注　由上定义可知，在x表达式的“和”中，仅有“有限个”非0系数；此外，x对H中元的表达式是唯一的．

下面，我们给出两个例子：

例1　在n维复线性空间C^n中，其H.-基（有限维情形，有时简称为“基”）显然即为：$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，这里

$$e_k=(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{第k位},0,\cdots,0)\ (1\leqslant k\leqslant n).$$

例2 线性空间$E'=\{\{\xi_n\}|\xi_n$仅有限个非0，$\xi_n\in\mathsf{K}\}$，则其H.-基为$\{e_n,\ n\in\mathsf{N}\}$。但须注意的是，E'是(c_0)（收敛于0的所有数列全体）的真子空间，$\{e_n,\ n\in\mathsf{N}\}$不是(c_0)的H.-基。例如：$x_0=\left\{\frac{1}{n}\right\}\in(c_0)$，但不能由有限个$e_n(n\in\mathsf{N})$线性表出。

下面，我们将给出有关Hamel基性质的几个命题：

定理1 每个线性空间E均存在Hamel基。

证明 令$\mathscr{T}$为E的所有线性无关子集全体，按包含关系在其内定义半序，则其任意全序子集均有上界。

事实上，设$\{A_\alpha\}$为$\mathscr{T}$中任一全序子集。令$A=\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$，易见$A$亦为$E$中线性无关子集，且为$\{A_\alpha\}$的一个上界。

由Zorn引理，$\mathscr{T}$中必存在一极大元，记为H。则容易验证H即为所求。（证毕）

注 类似我们可证：

1）如I为E的一线性无关子集，$[M]=E$，则$\exists$H.-基$H=I\cup M'$，使$M'\subset M$及$I\cap M'=\varnothing$。

2）如I为E的一线性无关子集，则$\exists$H.-基H使$I\subset H$。

（显然，1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$定理1.）

定理2 每个线性空间E内的H.-基均为1—1对应的。

证明 设A，B为E内任两H.-基，由线性代数知识我们知道，当其是有限时，结论是显然的（利用联立线性方程理论较好）。

现设A是无限的，因为，$\forall a\in A$，$\exists$有限元集$B_a\subset B$使得$a\in[B_a]$，所以我们可得

$$B=\bigcup_{a\in A}B_a. \qquad (*)$$

（事实上，反之，如有$b_0\in B$使$b_0\notin B_a(\forall a\in A)$，由$A$为H.-基，故有$b_0=\sum\limits_{k}^{n}\xi_k a_k$，$a_k\in A$，$\xi_k\in\mathsf{K}$（$1\leqslant k\leqslant n$）。但由$a_k\in$

$[B_{\alpha_k}]$，故得 $b_0\in\left[\bigcup_{k=1}^{n} B_{\alpha_k}\right]$．也即 b_0 可由 B 中其它的元线性表出，此显然与 B 中元是线性无关的假设矛盾．）

由 B_a 均有限元，故从（ * ），由势的关系有：$|B|\leqslant|A|\cdot\aleph_0$。又由 A 为无限集有 $|A|\cdot\aleph_0=|A|$．此即导出 $|B|\leqslant|A|$．反过来讨论又有 $|A|\leqslant|B|$．因此由Cantor-Bernstein 定理即知 $|A|=|B|$．（证毕）

定义5 线性空间 E 的Hamel**维数**，是指其Hamel基的势（其内集 M 的Hamel**维数**是指 $[M]$ 的Hamel维数），记为：$\dim E$。

例1 E^∞ 的Hamel维数是 $\aleph_0$。

例2 (c_0) 的Hamel维数是 c。

验证 $|(c_0)|\leqslant|(S)|=c^{\aleph_0}=c$。

另一方面 (c_0) 包含有一线性无关集 $M=(\{t^N\},\ 0<t<1)$，而 $|M|=c$。（验毕）

定理3 具有相同Hamel维数的线性空间是同构的。

证明 设 E_1，E_2 的Hamel基分别为 H_1，H_2。由于 E_1,E_2 的Hamel 维数相同，故知存在1—1对应 π_0：$H_1\leftrightarrow H_2$。由此，从H.-基的定义，不难将 π_0 线性扩张到全空间 E_1 上，我们记为 π。

不难验证，此时 π 亦是1—1对应的．事实上，如有 $\pi(x)=0$，设 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_{\alpha_k}h_{\alpha_k}^{(1)}\in E_1$（其中：$h_{\alpha_k}^{(1)}\in H_1$），我们则有 $\sum_{k=1}^{n}\xi_{\alpha_k}\pi(h_{\alpha_k}^{(1)})=0$，而 $\pi(h_{\alpha_k}^{(1)})=\pi_0(h_{\alpha_k}^{(1)})\in H_2$（$1\leqslant k\leqslant n$）．故由 H_2 线性无关导出 $\xi_{\alpha_k}=0$（$1\leqslant k\leqslant n$），也即 $x=0$．此外，π 还是满射的。事实上，对任一 $y\in H_2$，设 $y=\sum_{i=1}^{m}\eta_{\beta_i}h_{\beta_i}^{(2)}$，并令 $x=\sum_{i=1}^{m}\eta_{\beta_i}\pi_0^{-1}(h_{\beta_i}^{(2)})$，当然 $x\in H_1$，且从上可知

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{m}\eta_{\beta_i}\pi\pi^{-1}\left(h_{\beta_i}^{(2)}\right)=\sum_{i=1}^{m}\eta_{\beta_i}\pi_0\pi_0^{-1}\left(h_{\beta_i}^{(2)}\right)=y.$$

总上即知E_1与E_2是同构的。（证毕）

（二）

虽然对于任意无穷维的线性空间而言，求其Hamel基是困难的；然而，这个抽象的概念却是十分有用的。因为我们只要从其抽象的存在性出发，就可以得到一些非常有趣的结果。这一段，我们举出几个命题作为例子。

首先，利用H.-基我们可以得到有关在某类无穷维距离线性空间中均存在线性非连续泛函的一个命题。为此，我们来介绍下面的定义：

定义6 若线性空间E满足条件：1）E中有“平移不变”距离（即对任意元$x, y\in E$，均有$d(x+z, y+z)=d(x,y)$，$\forall z\in E$）；2）当记$\|x\|^*=d(x, \theta)$时，有：

$$\|\alpha_n x\|^*\to 0\ (\alpha_n\to 0)；\ \|\alpha x_n\|^*\to 0\ (x_n\to\theta)；$$

及

$$\|\alpha_n x_n\|^*\to 0\ (\alpha_n\to 0,\ x_n\to\theta)。$$

则称E为**距离线性空间**（或**赋准范空间**）。特别地，当将上设条件2）换为：2）′ 存在常数$\beta>0$，使

$$\|\alpha x\|^*=|\alpha|^\beta\|x\|^*,\quad \forall\alpha\in\mathrm{K}.$$

则称E为具有**β-绝对齐性距离**的距离线性空间，或简称**赋β-范空间**。

注1 从上定义中条件1）显然可知$\|x\|^*$具有以下性质：

$$\|x\|^*=0\Longleftrightarrow x=\theta,\ \|x+y\|^*\leqslant\|x\|^*+\|y\|^*,$$

及

$$\|-x\|^*=\|x\|^*.$$

从而知$\|x\|^*$即等价于一个“准范数”。这里仅需注意对于准范数而言，性质$\|\alpha_n x_n\|^*\to 0\ (\alpha_n\to 0,\ x_n\to\theta)$是可以从其为$(\mathrm{K}, E)$的二元连续函数推出［参看文献［3］中§1.5(三)］。

注2 从上面距离的三角不等式显然可知，赋β-范空间，必有$\beta\leqslant 1$，且其必为赋准范空间。特别地，当$\beta=1$时，即为赋范

线性空间。数列空间(l^β)（$0<\beta<1$）即为赋β-范空间的一个典型的例子。

注3　以后我们将会看到：1）距离线性空间（赋准范空间）即是一个满足T_0公理及第一可数公理的拓扑线性空间；2）赋β-范空间即为一个满足T_0公理及局部有界性的拓扑线性空间（S. Rolewicz）。

注4　关于距离线性空间定义中条件2）的三个极限式间的关系可参看“山西大学学报”（1983.2）。

推理1　如E是一无穷维的赋β-范空间，那么，E上必存在着（处处）不连续的线性泛函。

证明　首先，设H是E的一个Hamel基，因E是无穷维的，因而可选出一列元$\{h_n\}\subset H$。并且由于E是赋β-范的，还可设$\|h_n\|=1$ $(n\in\mathrm{N})$。作泛函f_0如下：当$x=\sum_{n=1}^{m}\xi_n h_n+\sum_{k=1}^{l}\eta_k h_{\alpha_k}$时（其中：$h_{\alpha_k}\in H/\{h_n\}$，$1\leqslant k\leqslant l$），我们令：

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{m}n\xi_n。$$

显然，f_0为E上定义的线性泛函，但由：

$$x+\frac{1}{\sqrt{n}}h_n\to x(n\to\infty),\quad\forall x\in E$$

$$\left[\text{因 } d\left(x+\frac{1}{\sqrt{n}}h_n,x\right)=d\left(\frac{1}{\sqrt{n}}h_n,\theta\right)=\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}h_n\right\|^*=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta\cdot\right.$$

$$\left.\|h_n\|^*=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta\to 0(n\to\infty)\right]\text{而}$$

$$f_0\left(x+\frac{1}{\sqrt{n}}h_n\right)=f_0(x)+f_0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}h_n\right)=f_0(x)+n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\to\infty,\quad\forall x\in E。$$

故知f_0在E上处处不连续。（证毕）

注1　上推理1亦可推广到无穷维的“赋准范”空间F中去。此时，从准范“数乘”的连续性，对H.-基中一列元$\{h_n\}$，我们可以作相应一列元$\{h'_n\}$代替之，使其满足条件：

$$\left\|h'_n\right\|^* = \left\|\frac{h_n}{k_n}\right\|^* < \frac{1}{n}, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

然后，类似作$f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} n\xi_n$，如$x = \sum\limits_{n=1}^{m} \xi_n h'_n + \sum\limits_{k=1}^{l} \eta_k h_{\alpha_k}$时。并注意到有：

$$x + h'_n \to x \quad (n \to \infty), \quad \forall x \in F$$

但　$f(x + h'_n) = f_0(x) + f_0(h'_n) = f_0(x) + n \to \infty (n \to \infty)$。

注2　线性泛函均连续还是赋准范空间是有限维的一个特征。因我们有下面更一般的命题：

命题　在有限维的赋准范空间$E_{(n)}$中，其上每个次加、β-正齐性($\beta > 0$)泛函$p(x)$均是连续的。

证明　与证有限维赋范空间中，维数相同者均拓扑同构的方法类似，我们只要注意到：

$$\|x\|^* = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\|^* \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k e_k\|^*,$$

及
$$\left\|\frac{x}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|}\right\|^* \geqslant m_0 > 0,$$

(这里，$e_1, \cdots, e_n$是$E_{(n)}$的基，m_0是连续函数$g(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\|$在域$\mathrm{K}^n$内有界闭集：$\sum\limits_{1}^{n}|\xi_k| = 1$上之最小值。)便知，当$x \to \theta$时，如有$\eta = \sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k| \nrightarrow 0$，则由准范数对数乘的连续性，$\{\eta\}$必为有界数集。设其有一非零聚点$\alpha$，令$\eta^{(m)} \to \alpha$，则由不等式：

$$\left\|\frac{x^{(m)}}{\eta^{(m)}}\right\|^* \leqslant \left\|\left(\frac{1}{\eta^{(m)}} - \frac{1}{\alpha}\right) x^{(m)}\right\|^* + \left\|\frac{1}{\alpha} x^{(m)}\right\|^*,$$

再次注意到准范数的“数乘”性质，即可得出矛盾。因此，我们可导出：

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\to 0 \Longleftrightarrow x\to\theta,\ \forall\, x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in E_{(n)}.$$

其次，注意到泛函的假设，我们又有：

$$p(x)=p\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{n}p(\xi_k e_k)=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{\beta}p(\lambda_k e_k),$$

及 $$p(x)=p\Big[\theta-\Big(-\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big)\Big]\geqslant 0-\sum_{k=1}^{n}p(-\xi_k e_k)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^{\beta}p(-\lambda_k e_k);$$

其中，$\xi_k=|\xi_k|\lambda_k$，$1\leqslant k\leqslant n$。因此，当K＝R时，由$\lambda_k=\pm 1$，故$p(\pm\lambda_k e_k)$仅取两个值；而当K＝C时，可由$\xi_k=\xi_k^{(1)}+i\xi_k^{(2)}$，把$p$的次加性归结为R情形，再次利用泛函的假设条件，我们不难导出：

$$\lim_{x\to\theta}p(x)=0.$$

而由泛函的次加性，此即导出：$p(x)$在$E_{(n)}$上是连续的。（证毕）

注　易验证，在一般拓扑线性空间中，我们有：如$p(x)$为次加泛函，且$\overline{\lim\limits_{x\to\theta}}\,p(x)=0$，则$p(x)$连续。

借助于上面推理1的结果，我们可以得到下面另一有趣的推论：

推理2　若E是无穷维的赋β-范或赋准范空间，那么，E上必存在一处处不连续的“自同构”映象（即E到E上的1—1线性满射映象）。

证明　设f_0如上推理1或注1所得的处处不连续的线性泛函，今固定一元$x_0\neq\theta$，使有$f_0(x_0)=0$，并作E上的映象π：

$$\pi(x)=x-f_0(x)x_0.$$

显然，π是线性的；并且，由于当$\pi(x)=\theta$时，我们有$x=f_0(x)x_0$，故注意到x_0取法，我们有：

$$f_0(x)=f_0[f_0(x)x_0]=f_0(x)\cdot f_0(x_0)=0.$$

也即　$x=f_0(x)x_0=\theta$.

此外，再注意到：$\forall y\in E$，我们有

$$\pi[y+f_0(y)x_0]$$
$$=[y+f_0(y)x_0]-f_0[y+f_0(y)x_0]x_0=y;$$

从而π是E上的一个自同构映象。最后，π的处处不连续性显然可以由其作法，以及f_0在E上处处不连续导出。（证毕）

注　上推理所需之映象也可由下述方法作出，设$\{h_n\}\subset H$（E的某一H.-基），且有$\|h_n\|^*\leqslant 1$（$\forall n\in\mathrm{N}$），定义π^*如下：$h_1\mapsto 2h_2$，$h_2\mapsto h_1$，$h_3\mapsto 4h_1$，$h_4\mapsto h_3$，$\cdots$，$h_{2n-1}\mapsto 2nh_{2n}$，$h_{2n}\mapsto h_{2n-1}$，$\cdots$，$H\diagup\{h_n\}$不动，然后线性延拓之即得。

为导出下面的一个推理，我们再来介绍几个定义：

定义7　线性空间E上所有线性泛函的全体，如常定义加法与数乘，则仍成为一个线性空间，称为E的**代数共轭**空间，记为E^*。类似地，我们可以定义E^*的代数共轭空间，称为E的**二次代数共轭**空间，记为E^{**}。

定义8　在E上，作到E^{**}内的映象$J(x)$如下：

$$J(x)[f]=f(x),\quad\forall f\in E^*$$

称J为E到E^{**}内的**典则映象**；如$J[E]=E^{**}$，则称E为**代数自反空间**。

注　易验证，典则映象J是1—1的线性映象。因此，一般来说，E代数同构于E^{**}的一个线性子空间。上定义后段意即：当E在"典则映象"下代数同构于整个空间E^{**}时，则称E为代数自反空间。

有了上面定义，我们可得到本节最后一个推论（这结论与

Banach自反空间性质完全不同）：

推理3 线性空间E为代数自反空间的充要条件是E为有限维的。

证明 本命题的充分性是不难验证的（留给读者）。下面，我们仅来证明命题的必要性。

反之，如有$J(E)=E^{**}$，但$\dim E=\infty$，那么可设$H=\{h_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{A}\}$为$E$的H.-基（显然$|\mathscr{A}|\geqslant\aleph_0$）。由此相应可作$E$上的线性泛函族：$\mathfrak{N}_0=\{f_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{A}\}$，使有：

$$f_\alpha(h_{\alpha'})=\begin{cases}0, & \text{当}\alpha'\neq\alpha\text{时；}\\ 1, & \text{当}\alpha'=\alpha\text{时。}\end{cases}\quad \forall\alpha,\alpha'\in\mathscr{A}.$$

易验证，$\mathfrak{N}_0$亦为E^*内一线性无关集。从而由前面定理1后的注可知：存在E^*的一个H.-基$\mathfrak{N}$，使$\mathfrak{N}_0\subset\mathfrak{N}$。

今取一泛函列$\{f_{\alpha_n}\}\subset\mathfrak{N}_0\subset\mathfrak{N}$。如上面推理1证明方法，作$E^*$上的一个线性泛函$\hat{x}_0$.则知$\hat{x}_0\in E^{**}$满足性质：

$$\hat{x}_0(f_{\alpha_n})\neq 0,\ (\forall n\in\mathbf{N})$$

然而，$J(E)$是不会含有$\hat{x}_0$的.因为：$\forall x\in E$，当$x=\sum\limits_{n=1}^{m}\xi_n h_{\alpha_n}+\sum\limits_{k=1}^{l}\eta_k h_{\alpha'_k}$时（这里：$h_{\alpha_n}(1\leqslant n\leqslant m)$，$h_{\alpha'_k}(1\leqslant k\leqslant l)\subset H$），$J(x)$必须满足下面性质

$$J(x)(f_{\alpha_n})=f_{\alpha_n}(x)=\begin{cases}\xi_n, & \text{当}n\leqslant m\text{时；}\\ 0, & \text{当}n>m\text{时。}\end{cases}$$

从而知$J(x)(f_{\alpha_n})$仅能取有限个非零值。故$\hat{x}_0\notin J(E)$，从而与最先假设矛盾。（证毕）

习题〇

1）对有限维情形，证明本节定理2。

2）设E_1，E_2均为n维线性空间，且有$E_1\subset E_2$。证明：$E_1=E_2$。

3）求(l^p)，(c)，(m)，(s)等数列空间的Hamel维数。

4）求C，L^p等函数空间的Hamel维数。

5）验证：本节定义4后例2中的集M不是(l^1)的Hamel基。

6）验证：E到E^{**}内的典则映象是1—1的线性映象。

7）证明本节最后推理3的充分性。

8）证明：$\dim(E^{\#})>\dim(E)$是线性空间为无穷维的一个特征。

9）证明：对Fréchet空间（完备的赋准范空间）F而言，必有$\dim F\neq\aleph_0$。

10）在平面上试举一例说明：集A的Hamel维数并非平移不变的。