

Dubbel

机械工程手册

(第一卷)

W. Beitz und K.-H. Küttner

张 维 张淑英等 译

清华大学出版社

施普林格出版社

C 材料力学 Strength of materials

G. Rumpel, H. D. Sondershausen, 柏林

张维译 史光筠校

一般参考资料: *Holzmann, G.; Meyer, H.; Schumpich, G.*: Technische Mechanik, Teil I u. III, 3. Aufl. Stuttgart: Teubner 1975. - *Leipholz, H.*: Festigkeitslehre für den Konstrukteur. Berlin: Springer 1969. *Marguerre, K.*: Technische Mechanik, Teil I u. II. Berlin: Springer 1967. - *Müller, H.*: Festigkeits- und Elastizitätslehre, 3. Aufl. Braunschweig: Westermann 1962. - *Neuber, H.*: Technische Mechanik, Teil II. Berlin: Springer 1971. - *Reckling, K. A.*: Mechanik II, Festigkeitslehre. Braunschweig: Vieweg 1969. - *Szabó, I.*: Einführung in die Technische Mechanik, 8. Aufl. Berlin: Springer 1975. - *Szabó, I.*: Höhere Technische Mechanik, 5. Aufl. Berlin: Springer 1977. - *Szabó, I.*: Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik, 3. Aufl. Berlin: Springer 1972. - *Wellinger, K.; Dietmann, H.*: Festigkeitsberechnung. Grundlagen und technische Anwendung, 3. Aufl. Stuttgart: Kröner 1976. - *Zurmühl, R.*: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin: Springer 1957, 5. Aufl. 1965.

1 基本原理 General fundamentals

材料力学的任务是求出结构部件的应力和应变, 并验算部件在失效(破坏)时是否具有足够的安全度. 失效可以表现为构件超过许可限度的大变形或应变, 出现裂纹或失稳(例如屈曲或皱曲). 对失效有决定性的材料参数与构件的应力状态(单轴、双轴或三轴), 应力类别(拉、压或剪应力), 载荷状态(静或动载), 运行时的温度以及构件尺寸和表面光洁度等因素有关.

1.1 应力和应变 Stress and Strain

1.1.1 应力 Stresses

当外力和外力矩(以及惯性力即加速运动时的负质量加速度)作用于一物体时, 在物体内部即产生与之相当的反作用力, 以保持平衡. 假设物体质量是均匀分布的, 内部反作用力将以面积力的形式出现.

通过物体的任意一点, 均可沿无限多方向切出平面元素 dA , 其方向以法线向量 $\mathbf{n}$ 表示(图 1a). 应力向量 $\mathbf{s} = d\mathbf{F}/dA$ 可以分解为一法向应力或正应力 $\sigma = dF_n/dA$ 和一切向应力或剪应力 $\tau = dF_t/dA$.

在直角坐标系中(图 1b)可得到一个正应力

$\sigma_z = dF_n/dA$ 和两个剪应力 $\tau_{zx} = dF_{tx}/dA$ 和 $\tau_{zy} = dF_{ty}/dA$. 为了描述一点的完整应力状态, 需要有三个平面或一个立方体元素(图 1c)和三个应力向量或一个应力张量

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma_x e_x + \tau_{xy} e_y + \tau_{xz} e_z, \\ s_y &= \tau_{yx} e_x + \sigma_y e_y + \tau_{yz} e_z, \\ s_z &= \tau_{zx} e_x + \tau_{zy} e_y + \sigma_z e_z; \end{aligned} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

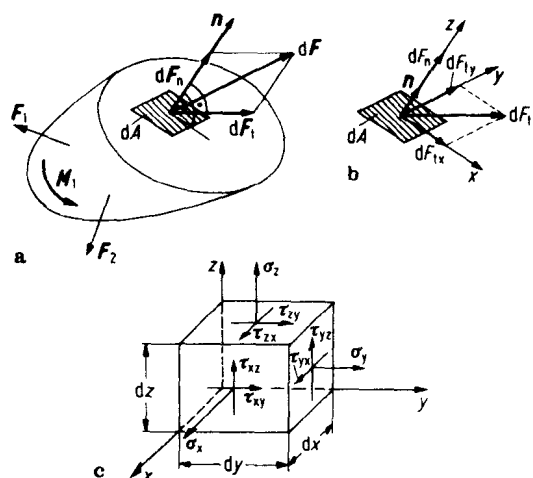


图 1. 应力 a, b. 定义; c. 张量

2 C 材料力学

参照图 1c, 由绕元素的三个坐标轴的力矩平衡方程得到 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (即剪应力互等定理), 即只需三个正应力和三个剪应力就可完整地描述一点的应力状态。

单轴应力状态 当一正应力作用在立方体元素 (图 2a) 上时, 如 $\sigma_x = dF/dA$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, 即出现单轴应力状态。这时, 在倾角为 φ 的斜面元素上, 相应的应力 σ 和 τ 可由在 n -和 t -方向的平衡条件求出为 $\sigma = (\sigma_x/2)(1 + \cos 2\varphi)$ 和 $\tau = -(\sigma_x/2)\sin 2\varphi$ 。由此得到莫尔应力圆 (图 2b) 的方程 $(\sigma - \sigma_x/2)^2 + \tau^2 = (\sigma_x/2)^2$ 。当 $2\varphi = 90^\circ$ 即 $\varphi = 45^\circ$ 时, 得到最大剪应力 $\tau = -\sigma_x/2$, 其相应的正应力为 $\sigma = \sigma_x/2$ 。最大和最小正应力 (这时 $\sigma_1 = \sigma_x$ 和 $\sigma_2 = 0$) 以及最大剪应力 (这时 $\tau_1 = -\sigma_x/2$) 称为主正应力和主剪应力。当曲线各点均与主正应力或主剪应力相切时, 此曲线称为主正应力迹线或主剪应力迹线 (图 2c, d)。

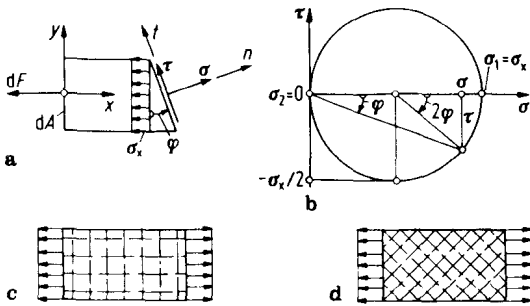


图 2. 单轴应力状态 a. 元素上的应力; b. 莫尔应力圆; c, d 主正应力和主剪应力的轨线

两轴 (平面) 应力状态 如只在平面内出现应力 (例如在 x, y 平面), 即为平面应力状态 (图 3a), 在倾斜角为 φ 的斜截面上, 应力 σ 和 τ 按照在 n -

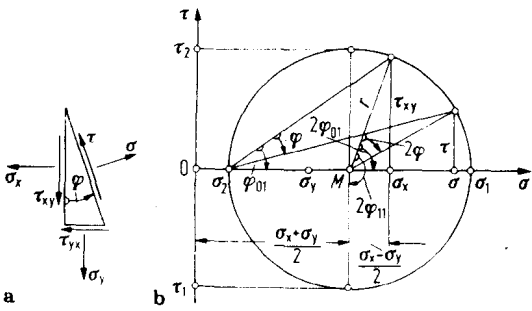


图 3. 平面应力状态 a. 元素上的应力; b. 莫尔应力圆; c. 主应力

和 t -方向的平衡条件和 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 求得如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} (2)$$

由此, 经过平方和相加, 得到莫尔应力圆 (图 3b) 的方程和半径 r :

$$\left. \begin{aligned} \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \\ r &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

圆心位于 σ 轴上 $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ 处。

当 $\tau = 0$ 时, 按照方程 (2), 主应力将出现在 φ_{01} 和 $\varphi_{02} = \varphi_{01} + 90^\circ$ 的面上, 两个 φ_0 满足条件

$$\tan 2\varphi_0 = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) \quad (4)$$

主应力值为

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5)$$

由方程 (2), 根据 $d\tau/d\varphi = 0$ 最大剪应力出现在 φ_{11} 和 $\varphi_{12} = \varphi_{11} + 90^\circ$ 的面上, φ_1 满足条件

$$\tan 2\varphi_1 = (\sigma_y - \sigma_x) / (2\tau_{xy}) \quad (6)$$

此时 $\varphi_{11} = \varphi_{01} + 45^\circ$ 和 $\varphi_{12} = \varphi_{02} + 45^\circ$ (图 3c) 此最大剪应力值相当于莫尔应力圆的半径, 即

$$\tau_{1,2} = F \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7)$$

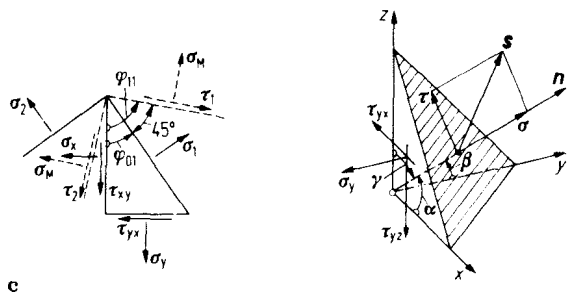


图 4. 空间应力状态

其相应的正应力对两个角均相同, 即 $\sigma_M = (\sigma_x + \sigma_y)/2$. 主正应力迹线方向由方程 (4) 得出如下:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tan\varphi_0}{1-\tan^2\varphi_0} = \frac{2y'}{1-y'^2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

由此

$$y'_{1,2} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1},$$

与此成 45° 角的主剪应力迹线的方向由方程 (6) 得出:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tan\varphi_1}{1-\tan^2\varphi_1} = \frac{2y'}{1-y'^2} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}},$$

由此

$$y'_{3,4} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2 + 1}.$$

三轴(空间)应力状态 如在三个相互垂直的平面上出现应力, 就形成空间应力状态(图 1c). 这种状态由六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ 和 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 来确定. 在任意一个四面体截面(图 4)上, 其位置由法向矢量

$\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{e}_x + \cos\beta\mathbf{e}_y + \cos\gamma\mathbf{e}_z = n_x\mathbf{e}_x + n_y\mathbf{e}_y + n_z\mathbf{e}_z$ 所确定, 应力矢量 $\mathbf{s} = s_x\mathbf{e}_x + s_y\mathbf{e}_y + s_z\mathbf{e}_z$ 和它的分量可由 $x-, y-, z-$ 方向的平衡条件求得:

$$\begin{aligned} s_x &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx}, \\ s_y &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy}, \quad \mathbf{s} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}, \quad (8) \\ s_z &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z, \end{aligned}$$

与四面体截面垂直的正应力为

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{s}\mathbf{n} = s_x n_x + s_y n_y + s_z n_z = n_x^2 \sigma_x + n_y^2 \sigma_y + n_z^2 \sigma_z \\ &\quad + 2(n_x n_y \tau_{xy} + n_x n_z \tau_{xz} + n_y n_z \tau_{yz}). \end{aligned}$$

总剪应力(图 4)为 $\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2}$.

主正应力出现在相互垂直的且 τ 等于零的三个面上. 这时, 应力张量为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

应力矢量 $\mathbf{s}_i = n_i \sigma_i (i=1, 2, 3)$ 即

$$s_{ix} = n_{ix} \sigma_i, \quad s_{iy} = n_{iy} \sigma_i, \quad s_{iz} = n_{iz} \sigma_i \quad (9)$$

令方程 (8) 和 (9) 相等, 我们得到

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)n_{ix} + \tau_{yx}n_{iy} + \tau_{zx}n_{iz} &= 0, \\ \tau_{xy}n_{ix} + (\sigma_y - \sigma_i)n_{iy} + \tau_{zy}n_{iz} &= 0, \\ \tau_{xz}n_{ix} + \tau_{yz}n_{iy} + (\sigma_z - \sigma_i)n_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

这组线性齐次方程组只有当其系数行列式等于零时, 对于主法向矢量的分量 n_{ix}, n_{iy} 和 n_{iz} 才有非平凡解. 由此得到 σ_i 的三次方程

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2, \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}. \end{aligned}$$

J_1, J_2, J_3 是应力张量的不变量, 因为它对所有参考坐标系数均得到同一值, 即对主方向得 $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3, J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$. 当由方程 (11) 求出 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ 后, 将之分别代入方程 (10), 可得到该主法向的分量 n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} . 由于三个方程中每两个之间是线性相关的, 因而必须利用恒等关系式 $n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1$.

当主法向矢量 $\mathbf{n}_i (i=1, 2, 3)$ 由上述确定后, 则主法向应力的方向和大小均可求出. 对于主应力坐标系统 ξ, η, ζ (方向 $i=1, 2, 3$); 图 5a), 当 $\sigma_3=0$ 时, 即得到平面应力状态, 其主应力 σ_1 和 σ_2 以及莫尔应力圆的方程均同方程 (3),

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

对于 $\sigma_2=0$ 和 $\sigma_1=0$ 时均可得到相应的圆(图 5b).

在由 $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ 所决定的任意面元素(图 5a)上应力矢量 $\mathbf{s}$ 的分量 σ 和 τ 可由莫尔应力圆(图 5b)求出, 这时 α 角和 γ 角应各由 σ_1 和 σ_3 处量起, 并通过其与主应力圆的交点 A 和 B 绘出与次圆相同心的圆. 交点 C 的坐标即为相应的 σ 和 τ [1-4].

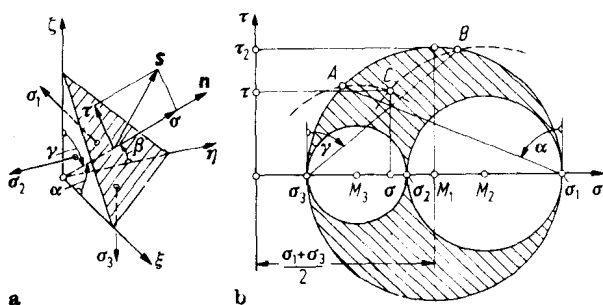


图 5. 空间应力状态 a. 主应力轴; b. 莫尔应力圆; c. 主剪应力

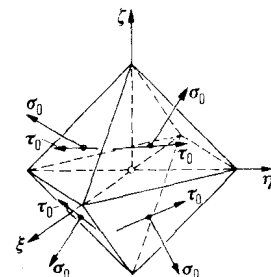


图 6. 八面体应力

任意法线倾角的斜面, 其应力均在图 5b 的阴影线区内. 最大剪应力为 $\tau_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. 它位于 ξ, ζ -平面内, 其所属面元素的法线与 ξ -和 ζ -轴成 45° (图 5c). 与此相对应, $\tau_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ 和 $\tau_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ 主剪应力所属的平面相互不垂直, 而是一正十二面体的面^[4].

八面体剪应力和正应力对于判断复杂空间应力状态非常重要. 它们属于八个截面, 其法线与三个主轴成相同角度, 并形成一正八面体 (图 6), 其大小是^[4]

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \\ \tau_0 &= (1/3)\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \\ &= (1/3)[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 \\ &\quad + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]^{1/2}\end{aligned}$$

1.1.2 变形 Strains

每个物体在外力和外力矩作用下产生着变形.

边长为 dx, dy, dz 的长方六面体元素的角点 P (在图 7 上只表示出 x, y -平面) 有位移 $\mathbf{f} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$, 其分量为 u, v, w 与此同时, 元素被拉伸, 即其边长增大 (或减小) 到 dx', dy', dz' , 而长方六面体则变形为一斜六面体, 并伴以角变 γ_1, γ_2 等等. 在小变形下 (图 7) 应变 ε 和角应变 γ 为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}\quad (13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

令

$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) / 2, \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) / 2,$$

$$\varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) / 2$$

我们可以用应变张量

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

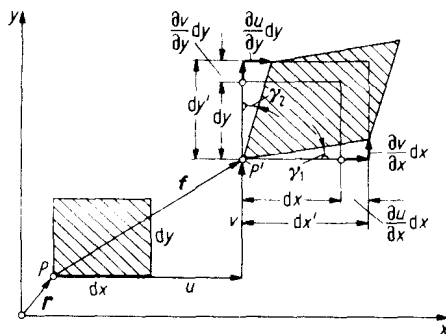


图 7. 应变状态

表示应变状态. 它具有与应力张量, 方程 (8), 相似的性质和计算方法. 三个主应变为

$$\begin{aligned}(\varepsilon_x - \varepsilon_i)n_{ix} + \varepsilon_{xy}n_{iy} + \varepsilon_{xz}n_{iz} &= 0, \\ \varepsilon_{xy}n_{ix} + (\varepsilon_y - \varepsilon_i)n_{iy} + \varepsilon_{yz}n_{iz} &= 0, \\ \varepsilon_{xz}n_{ix} + \varepsilon_{yz}n_{iy} + (\varepsilon_z - \varepsilon_i)n_{iz} &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

令上式的系数行列式等于零, 得到三次特征方程

$$\varepsilon_i^3 - J_4 \varepsilon_i^2 + J_5 \varepsilon_i - J_6 = 0, \quad (15)$$

其中 $J_4 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $J_5 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2$ 和 $J_6 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}$ 仍均为不变量. 当 ε_i 由方程 (15) 求出后, 即可由方程 (14) (其中每两个均为线性相关) 以及 $n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1$ 得到三个主应变方向的分量 n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} ($i=1, 2, 3$), 沿这三个主方向只有应变而无角应变, 与此相对应的变形张量的形式如下

$$V = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

不变量为

$$J_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, J_5 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3, J_6 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.$$

对于空间和平面状态, 与应力相似, 可以推导出应变和角应变与角 α, β, γ 之间的莫尔应变圆的关系. 今后均将假设材料为均匀和各向同性的, 此时主应力方向和主应变方向相重叠, 即应力张量和应变张量是同轴的.

体积应变按定义为

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{dx' dy' dz'}{dx dy dz} - 1 \\ &= \frac{(1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz}{dx dy dz} - 1 \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z\end{aligned}$$

或省略高阶小量后

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (16)$$

1.1.3 变形能 Strain energy

在体积元素 $dx dy dz$ 上, 当其具有应变

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ 等时, 以应力 σ_x 为例, 所作的功为

$$dW = \int \sigma_x dy dz d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x dV$$

对于所有正应力和剪应力均求出其所作的功, 于是对整个物体进行积分后, 得到变形能

$$\begin{aligned}W &= \int_{(V)} \left[\int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y d\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_z d\varepsilon_z \right. \\ &\quad + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{xz}} \tau_{xz} d\gamma_{xz} \\ &\quad \left. + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} \right] dV. \quad (17)\end{aligned}$$

对于三主轴 1, 2, 3, 有

$$W = \int_{(V)} \left[\int_0^{\varepsilon_1} \sigma_1 d\varepsilon_1 + \int_0^{\varepsilon_2} \sigma_2 d\varepsilon_2 + \int_0^{\varepsilon_3} \sigma_3 d\varepsilon_3 \right] dV \quad (18)$$

对于虎克型材料, 即在应力 σ 和 τ 与应变 ε 和角应变 γ 之间存在线性比例关系时, 得

$$\begin{aligned}W &= (1/2) \int_{(V)} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} \\ &\quad + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (19)\end{aligned}$$

和

$$W = (1/2) \int_{(V)} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV \quad (20)$$

1.2 材料的力学性能

Strength and properties of materials

有关材料参数, 如比例极限, 屈服应力, 断裂应力等均可由材料的应力应变曲线读出, 其有关论述见 E 2.2.

虎克定律 在应力应变曲线的比例范围, 对于受单轴拉伸的直杆 (图 8a), 其正应力满足下列定律

$$\sigma = E \varepsilon \quad (21)$$

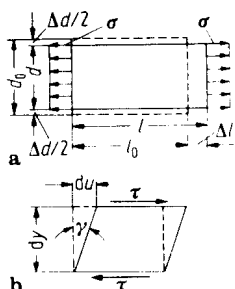


图8. 虎克定律 a. 为应变; b. 为角应变

这里, 应力 $\sigma = F/A_0$, 应变 $\epsilon = \Delta l/l_0$ (Δl 为杆的伸长量), E 为弹性模量. 当杆伸长时, 其直径的收缩量为 $\Delta d = d - d_0$. 于是横向应变为 $\epsilon_q = \Delta d/d_0$. 在纵向和横向应变之间存在着 $\epsilon_q = -\nu\epsilon$ 的关系, 其中 ν 叫横向应变系数 [泊松比] ($\nu_{钢} = 0.30$). 其倒数 $m = 1/\nu$ 叫泊松数.

对于剪应力有相对应的虎克定律 (图 8b)

$$\tau = G\gamma \quad (22)$$

这里 $\gamma = du/dy$ 是角应变而 G 为剪切模量. 可导出关系式 $G = E/[2(1+\nu)]$. E 和 G 的值见附录 E3. 对于任意应力状态的一般虎克定律见 C3.

静载下的安全度和许用应力 当一个部件由于超过许可的过大变形 (对于有屈服极限的材料), 断裂 (对于脆性材料) 或失稳 (出现屈曲, 侧倾, 皱屈) 而破坏并且这种破坏出现在应力 $\sigma = K$ (K 为材料的参数) 时, 其实际安全度和许用应力为

$$S = \frac{K}{\sigma_{实}}, \sigma_{许} = \frac{K}{S} \quad (23)$$

均匀应力分布 当应力均匀分布在截面上 (图 9a) 时, 对于韧性材料应令 $K = R_c$, 而对于脆性材料 $K = R_m$ 或 σ_{dB} . 在安全度方面, 为了防止过大变形取 $S_F = 1.2 - 2.0$, 防止断裂 $S_B = 2.0 - 4.0$, 防止失稳 $S_k = 2.0 - 5.0$.

非均匀应力分布 对于脆性材料和在截面上非均匀分布的应力 (图 9b), 当受弯曲时, 在方程 (23) 中取 $K = \sigma_{bB}$ (弯曲断裂强度) ($\sigma_{bB} \approx 1.6 - 2.0 R_m$). 当受扭转时, $\tau_{许} = K/S$, 其中 $k = 1.0 - 1.1 R_m$. 当受组合应力时, K 应由比较应力公式 (见 C1.3) 求得.

对于韧性材料, 在受弯曲时, 在方程 (23) 中可以令 $K = R_c$; 即作为一级近似, 可以认为, 当最

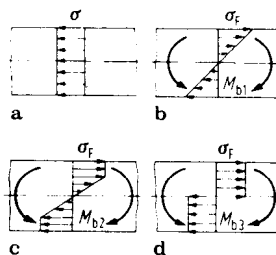


图9. 应力分布 a. 均匀; b. 非均匀; c. 局部塑性; d. 全部塑性

大应力处的纤维开始屈服时, 其变形就已达到许可限度. 但是这时所有其它纤维仍处于弹性范围内, 外纤维由于受到内纤维支撑的影响, 不出现明显的屈服, 这就是说, 这时还不出现超过许可的大变形. 所以为了更好地利用材料, 允许在截面上屈服应力进一步扩展, 直至外纤维处达到永久应变为 0.2% (图 9c; Siebel 的形状应变极限法^[5-9]).

直至屈服应力扩展到全截面, 才真正出现许可的大变形 (图 9d), 例如如图 9b 所示, 对于长方形截面在弹性范围内恰好还能承受的弯矩为 $M_{b1} = \sigma_F b h^2 / 6$, 而如图 9d, 在全塑性状态下其能承受的弯矩则为 $M_{b3} = \sigma_F b h^2 / 4$, 即 $M_{b3} = 1.5 \cdot M_{b1}$. 实际情况是由于出现硬化区域, 直至破坏所能传递的弯矩还要大些, 不过这要伴随着超过许可的大变形.

按照形状应变极限法, 我们可以在方程 (23) 中令 $K = K_{0.2}^*$. 这里形变极限值 $K_{0.2}^*$ 为一假想值, 符合弹性理论的相当应力, 以受弯时为例, 它与在外纤维达到永久应变为 0.2% 时实际应力所能提供的弯矩相同. 这时即使在塑性区我们也仍假设截面保持平面不变. 对于长方形截面在理想弹塑性应力应变曲线假设下 (图 10a) 得到 $\sigma_F = 210 \text{ N/mm}^2$ 即 $\epsilon_{弹} = 210/210000 = 0.1\%$, 在 $\epsilon_{塑} = 0.2\%$ 时, 总应变 $\epsilon = \epsilon_{弹} + \epsilon_{塑} = 0.3\%$. 这样在 $h/6$ 高度内纤维的应变均在弹性范围内, 在此以外的塑性范围 (图 10b), 其应力分布如 (图 10c). 承载弯矩为

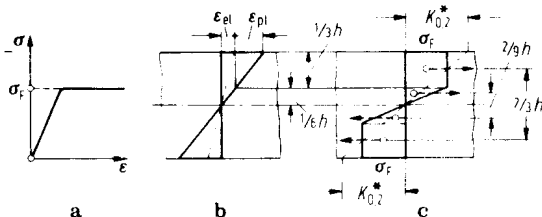


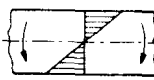
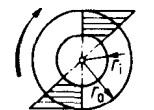
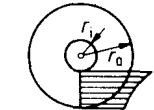
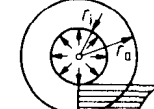
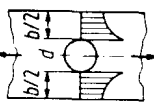
图10. 形状应变极限 a. 理想应力-应变图; b. 应变; c. 应力

$$M_{b, \text{弹}}^* = K_{0.2}^* b h^2 / 6;$$

$$\begin{aligned} M_{b, \text{塑}}^* &= M_{b, 2}^* = \sigma_F \frac{b h}{3} \frac{2}{3} h + \sigma_F \frac{b h}{12} \frac{2}{9} h \\ &= \sigma_F \frac{13}{9} \frac{b h^2}{6} = 1.44 \cdot \sigma_F \frac{b h^2}{6}. \end{aligned}$$

由 $M_{b, \text{塑}}^* = M_{b, \text{弹}}^*$ 得 $k_{0.2}^* = 1.44 \sigma_F$. 形状应变极限应力 $K_{0.2}^*$ 随屈服极限和应力应变曲线的形状而异. Siebel 指出, 应变极限比 $\delta_{0.2} = K_{0.2}^* / \sigma_F$ 和 $\delta_{0.2} = K_{0.2}^* / \sigma_{0.2}$ 在极大程度上与屈服极限即流动极限无关而只随应力应变曲线而异. 表1给出了不同截面和两种典型应力应变曲线的 $\delta_{0.2}$ 值 (根据 [9]). 对于方程 (23) 中的强度值 K , 存在着 $K = K_{0.2}^* = \delta_{0.2} \sigma_F = \delta_{0.2} \sigma_{0.2}$ 关系.

表1 应变极限比 $\delta_{0.2}$

构件	截面形状	$\delta_{0.2}$	
		$\sigma_F = 300 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{0.2} = 500 \text{ N/mm}^2$
受弯直杆 		1.40	1.30
		1.55	1.40
		1.75	1.55
		1.15	1.10
受扭空心圆杆 	r_i/r_o		
	0	1.30	1.20
	0.4	1.25	1.17
	0.8	1.10	1.07
有孔旋转圆盘 	r_i/r_o		
	0.2	2.00	1.70
	0.4	1.46	1.60
	0.6	1.26	1.35
	0.8	1.10	1.15
受内压圆管 	r_i/r_o		
	1.5	1.45	1.35
	2.0	1.80	1.55
	2.5	1.95	1.65
	3.0	2.05	1.75
受拉压有孔扁杆 	b/d		
	1.0	2.05	1.80
	2.0	2.25	2.00
	4.0	2.55	2.20
	9.0	2.70	2.35

在动载下的安全度和许用应力 见 E1.5 和 1.6.

1.3 强度理论和折算应力

Failure criteria, equivalent stresses

对于多轴应力状态需要将它转换为单轴折算应力 σ_v , 因为多轴应力状态一般没有材料参数. 下述强度理论考虑到材料有不同性能而破坏有各种原因.

1.3.1 最大正应力理论

Maximum principal stress criterion

该理论可用于预计在与主拉应力垂直处出现拉断的情况, 即脆性材料 (如铸件, 或焊缝), 或应力状态限制材料可能的变形 (如三轴拉伸或冲击式载荷) 的情况. 对于三轴 (空间) 应力状态, 存在着 $\sigma_v = \sigma_1$ (根据 C1.1.1 确定 σ_1), 对于二轴 (平面) 应力状态 (见 C1.1.1) 则有:

$$\sigma_v = \sigma_1 = 0.5 [\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}].$$

1.3.2 最大剪应力理论

Maximum shear stress (Tresca) criterion

如果破坏是由于滑动断裂 (剪断) 引起 (如易变形材料承受静拉压载荷和脆性材料承受压缩载荷时), 可以根据莫尔理论以主剪应力为决定性的因素. 折算应力 σ_v 分别如下:

对于三轴 (空间) 应力状态

$$\sigma_v = 2 \tau_{\max} = \sigma_3 - \sigma_1$$

(其中 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 见图 5b; 根据 C1.1.1 确定 σ_1 和 σ_3).

当 $\sigma_x \sigma_y < \tau^2$ 时, 对于二轴 (平面) 应力状态, 存在着

$$\sigma_v = 2 \tau_{\max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

1.3.3 最大变形能理论

Maximum shear strain energy criterion

形变能理论是将多轴和单轴应力状态各自在屈服开始时由于产生形状变化 (非体积变化) 所需要的能相比较, 并由此得到比较应力 σ_v . 它适用于易变形的、当出现塑料变形时发生破坏的材料, 对于在交变载荷下由于疲劳断裂而破坏的材料也有效.

对于三轴 (空间) 应力状态, 有

$$\sigma_v = (1/\sqrt{2}) \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) \\ + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]^{1/2}$$

(根据 C1.1.1 确定 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

对于二轴(平面)应力状态, 有

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2}$$

还应指出, 此理论也可通过使八面体剪应力(见 C1.1.1)相等而导出.

1.3.4 推广的剪应力理论 Mohr's criterion

此理论是莫尔由许多量测到的极限应力状态出发而建立的. 与之相关的莫尔应力圆的外包线即极限强度曲线 $\tau=f(\sigma)$, 并代表一种广泛的材料特征. 由于在大多数情况下, 没有足够的材料性质参数(特别是对于空间应力状态), Siebel 用三条直线代替了外包线(图 11)

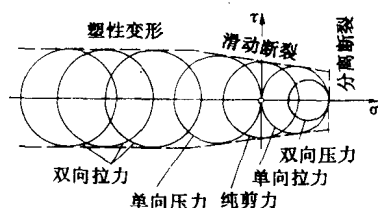


图 11. 莫尔极限强度

1.3.5 巴赫的受载比 Bach's correction factor

由于 σ 和 τ 时常属于不同的载荷情况(见 E1.1) (例如在情况 III 的 σ 和在情况 I 的 τ), 我们要将 τ 换算到 σ 的载荷情形. 为此, 要以 $\alpha_0 \tau$ 代替 τ . 受载比则为 $\alpha_0 = \sigma_{\text{极限}} / (\varphi \tau_{\text{极限}})$. 因 φ 可以在 $\sigma=0$ 时, 对各个强度理论分别求出, 即由

$$\begin{aligned} \sigma_v = \tau, & \text{ 得到 } \varphi = 1 \quad \text{正应力强度理论,} \\ \sigma_v = 2\tau, & \text{ 得到 } \varphi = 2 \quad \text{剪应力强度理论,} \\ \sigma_v = \sqrt{3} \tau, & \text{ 得到 } \varphi = 1.73 \quad \text{形变能强度理论,} \end{aligned}$$

对于重要的载荷情况——杆受弯扭的复合载荷——受载比可近似地由钢材的极限强度求得
交变弯曲, 静载扭转 $\alpha_0 \approx 0.7$,
交变弯曲, 交变扭转 $\alpha_0 \approx 1.0$,
静载弯曲, 交变扭转 $\alpha_0 \approx 1.5$,
而折算应力则为

$$\sigma_v = 0.5[\sigma_b^2 + \sqrt{\sigma_b^2 + 4(\alpha_0 \tau_t)^2}] \quad (\text{正应力强度理论})$$

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 4(\alpha_0 \tau_t)^2} \quad (\text{剪应力强度理论}) \quad (24)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2} \quad (\text{形变能强度理论})$$

专门参考资料 [1] Leipholtz, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie. Karlsruhe: Braun 1968. — [2] Biezeno, C.: Grammel, R.: Technische Dynamik, 2. Aufl. Berlin: Springer 1971. — [3] Müller, W.: Theorie der elastischen Verformung. Leipzig: Akad. Verlagsgesell. Geest u. Portig 1959. — [4] Neuber, H.: Technische Mechanik, Teil II. Berlin: Springer 1971. — [5] Köhler, G.: Rögnitz, H.: Maschinenteile, Teil 1, 2. Aufl. Stuttgart: Teubner 1962. — [6] Siebel, E.: Neue Wege der Festigkeitsrechnung. VDI-Z. 90(1948) 135–139. — [7] Siebel, E.: Rühl, K.: Formdehngrenzen für die Festigkeitsberechnung. Die Technik 3(1948) 218–223. — [8] Siebel, E.: Schwaigerer, S.: Das Rechnen mit Formdehngrenzen. VDI-Z. 90(1948) 335–341. — [9] Schwaigerer, S.: Werkstoffkennwert und Sicherheit bei der Festigkeitsberechnung. Konstruktion 3(1951) 233–239.

2 杆状构件应力

Stresses in bars and beams

2.1 拉伸和压缩 Tension and compression

2.1.1 等截面受等轴向力的直杆

Uniform bars under constant axial load

在等轴向力或法向力 $F_N = F$ 作用下, 应力、应变和位移(图 1a)为 $\sigma = F_N/A$; $\varepsilon = du/dx = \Delta l/l = \sigma/E$; $u(x) = (\sigma/E)x$, $u(l) = \Delta l = \varepsilon l = (\sigma/E)l$ 这里和下文均假设虎克定律有效. 根据 C1.1.3 变形能

$$W = (1/2) \int \sigma \varepsilon dV = \sigma^2 Al / (2E) = F_N^2 l / (2EA)$$

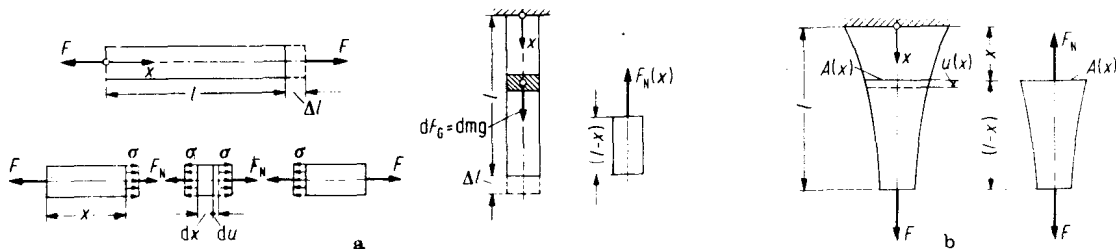


图1 杆 a.等截面; b.变截面

上式对拉和压均有效。在压力下需要补充对压屈曲进行验算(见C.7)。

2.1.2 受变轴向力的直杆

Bars with variable axial loads

在自重(容重 ρ)作用下将出现变轴向力 F_N (图1a)。当截面 A 为常数时,得到

$$F_N(x) = \rho g V = \rho g A(l-x), \quad \sigma(x) = \rho g(l-x)$$

$$u(x) = \int du = \int \varepsilon(x) dx = \int \left(\frac{1}{E} \right) \rho g(l-x) dx \\ = \left(\frac{\rho g}{E} \right) (lx - x^2/2) + C;$$

由 $u(x=0) = 0$, 得 $C = 0$, 即 $\Delta l = u(l) = \rho g l^2 / (2E)$; 变形能

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \frac{\sigma^2}{E} A dx = \frac{F_G^2 l}{6EA}.$$

2.1.3 变截面直杆 Bars of variable cross section

假定轴向力 $F_N = F$ 为常数(图1b)

$$\sigma(x) = F/A(x), \quad u(x) = \int \varepsilon(x) dx = \int \frac{F}{EA(x)} dx;$$

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l \frac{F^2}{EA(x)} dx.$$

2.1.4 带缺口的直杆 Bars with notches

这里首先应利用在(E1.5)讲解的形状强度和

应力集中原理。名义应力 $\sigma_n = F/A_n$, 最大应力 $\sigma_{\max} = \alpha_k \sigma_n$ (α_k 值见 VDI 2226 图 7 至 12)。在动载下有效应力 $\sigma_{\max, \text{有效}} = \beta_k \sigma_n$ (β_k 值或用应力梯度进行计算见 E1.5.2)

2.1.5 受温度影响的直杆

Bars with variation of temperature

虎克定律的形式为 $\varepsilon(x) = \sigma(x)/E + \alpha_t \Delta t$ 。由

此得 $u(x) = \int \varepsilon(x) dx$, 当 σ 为常数时: $u(l) = \Delta l = (\sigma/E + \alpha_t \Delta t) l$; α_t 为线膨胀系数: (钢 $1.2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, 铸铁 $1.05 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, 铝 $2.4 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, 铜 $1.65 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$)。如轴向延伸受阻(例如钳夹在刚性墙之间, 被下部结构固定住的无限长钢轨), 即可由 $u(l) = 0$ 求得所产生的相应应力。如沿杆长 σ 为常数, 则由 $\Delta l = 0$ 可得温度应力 $\sigma = E \alpha_t \Delta t$ 。例如对于钢 st 37, $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$, $\alpha_t = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, $\sigma_F = 240 \text{N/mm}^2$, $\Delta t = \sigma_F / (E \alpha_t) = 95.2 \text{K}$ 时, 即将达到屈服极限。

2.2 剪切 Transverse shear stresses

当在螺栓、销钉、螺钉、铆钉、焊条等(图2a-d)构件上作用有两个大小相等, 相互对向但位置稍错的力时, 就产生剪切。此外, 当铆钉、销钉或其他连接件是紧配合时, 其所产生的弯矩将是微不足道的, 这是因为周围的材料将阻止联接件弯曲。这时出现了难以计算的空间应力状态。而螺栓和螺钉则因安装时有间隙, 因此要求对弯曲做补充验算。剪切验算时假设剪应力均匀分布(当韧性材料达到全塑性状态时; 图2e)。

$$\tau_a = F / (n mA)$$

$n=1, 2, 3 \dots$ 单、双或多面连接。

$m=1, 2, 3 \dots$ 铆钉、螺钉等的数目。在机械工程中韧性材料的许用剪应力 $\tau_{a, \text{许}} = \sigma_s / S$, 其中在静载荷下 $S \approx 1.5$, 在脉动载荷下 $S \approx 2.0$, 在交变载荷下 $S \approx 3.0$ 。

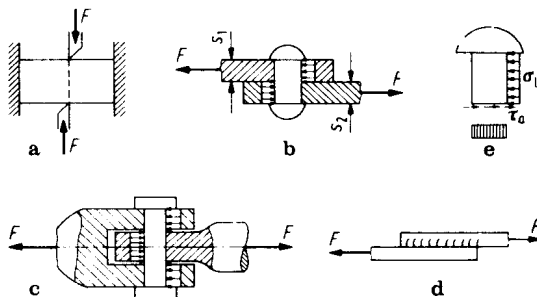


图 2a—e. 剪切载荷

2.3 面接触力和孔面上的压力

Contact stresses and bearing pressures

两个相压并相互做面接触的部件处于面压力下 (点接触见 C4)

2.3.1 平面 Plane surfaces

压力的分布依赖于相互接触物体的刚度。近似的可按如下平均值 (图 3a) 计算。

$$\sigma_p = F_n / A \quad \text{或} \quad \sigma_p = F_n / A_{\text{投}}$$

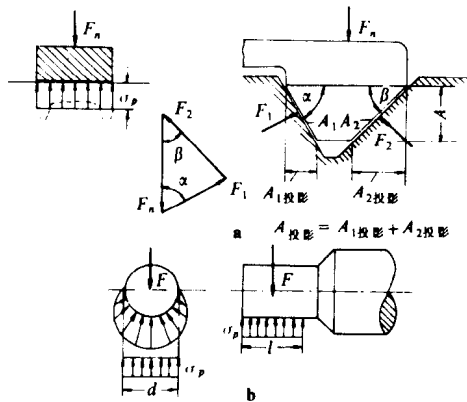


图 3. 面压力 a. 平面; b. 轴颈

$A_{\text{投}}$ 为在与受力方向垂直面上的投影面积。因此图 3a 中楔子上 $\sigma_{p1} = F_1 / A_1 = F_1 / (A / \sin \alpha)$ 并且由于 $F_1 / F_n = \sin \beta / \sin (\alpha + \beta)$, 于是

$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= F_n \sin \alpha \sin \beta / [A \sin (\alpha + \beta)] = F_n / [A (\cot \alpha + \cot \beta)] \\ &= F_n / (A_1 \text{投} + A_2 \text{投}) = F_n / A_{\text{投}}; \end{aligned}$$

相应的还有 $\sigma_{p2} = F_2 / A_2 = F_n / A_{\text{投}}$ 。

许用挤压应力与载荷情况 (静、脉动、交变) 十分有关。关键是较弱部件的强度。 $\sigma_{p, \text{许}}$ 的参考值: 韧性材料承受静载荷时 $\sigma_{p, \text{许}} \approx \sigma_{dF} / 1.2$; 承受脉动载荷时 $\sigma_{p, \text{许}} \approx \sigma_{dF} / 2.0$; 脆性材料承受静载荷时 $\sigma_{p, \text{许}} \approx \sigma_{dB} / 2.0$; 承受脉动载荷时 $\sigma_{p, \text{许}} \approx \sigma_{dB} / 3.0$ 。此外 $\sigma_{p, \text{许}}$ 还与工作条件如滑动速度和温度有关 (见 G 6.2)。

2.3.2 曲面 Curved surfaces

轴颈 销周围非均匀分布的压力可用在投影面上的平均压力值代替 (图 3b):

$$\sigma_p = F / A_{\text{投}} = F / (dl)$$

$\sigma_{p, \text{许}}$ 则视工作条件而定 (例如大型柴油乃至小型汽油活塞式发动机由 2 至 30 N/mm², 见 G10.3.1)。螺栓、销钉、铆钉、螺钉。铆钉和螺钉的承压面又称孔面。按投影面计算, 得 (图 2b, c, e)

$$\sigma_p = \sigma_1 = F / A = F / (ds)$$

F 为作用于传递面 A 的分力, s 为材料厚度。在机械工业中 $\sigma_{p, \text{许}}$ 值同于平面的。

2.4 弯曲 Bending

2.4.1 内力 (截面力): 法向力, 剪力, 弯矩

Axial force, shear force, bending moment

杆状物体, 如具有直线, 曲线或折线轴的梁或桁架由支点反作用力支撑而处于平衡状态 (见 B 1.6), 通过内部的正应力和剪应力将外载荷 (集中力、分布力、集中力矩) 传递至支点。 (图 4a, b 表示平面状况)。在平面问题中, 这些应力的合力可用三个内力 M_b, F_Q, F_N 来表达, 即一个沿 y 方向作用的弯矩矢量, 一个与梁轴垂直的剪力和一个与之相切的法向力或轴向力。在左侧截面上其矢量指向与正坐标轴向 $\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 相反的剪力和弯矩为正; 与正坐标轴向 $\bar{x}$ 同向的法向力 (和扭矩) 为正。按照牛顿定律作用力等于反作用力, 在右侧截面上的正内力与左侧面上的力大小相等方向相反 (图 4b), 平面内的三个内力由部分梁的自由体的三个平衡条件求出:

$$\sum F_{i\bar{x}} = 0, \quad \sum F_{i\bar{z}} = 0, \quad \sum M_i = 0. \quad (1)$$

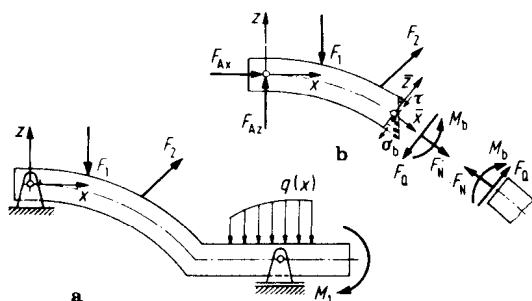


图4. a 和 b. 内力

一般情况下, 为了使未知量 F_Q 和 F_N 不出现在这方程中, 将在截面处列 $\sum M_i = 0$. 在空间问题中有六个平衡条件求解六个内力 (见 C2.4.4). 这种简单的计算是假设系统为静定的 (见 B1.7).

2.4.2 平面直梁的内力

Forces and moments in straight beams

首先由三个平衡条件确定整梁的支座反力 F_{Ax} , F_{Az} 和 F_B , 随即由方程 (1) 计算内力 (标准情况见表 1).

受集中力作用的梁 (图 5a — e) 在集中力的作用点, 剪力, 轴向力和弯矩具有不连续性, 为了计算内力, 要将梁分段. 在每个分段的截面处都给出相应的内力; 例如对第 III 段, 按照图 5b

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0, F_N(x) &= -F_{Ax} - F_{1x}; \\ \sum F_{iz} = 0, F_Q(x) &= F_{Az} - F_{1z} - F_{2z}; \\ \sum M_i = 0, M_b(x) &= F_{Az}(x - a_1) \\ &= F_{1z}(x) - F_{2z}(x - a_2).\end{aligned}$$

法向力和剪力在各段分别为常量, 弯矩则为 x 的线性函数, 即为直线. 内力可以用图表示为法向力图, 剪力图和弯矩图 (图 5c — e). 由 $M_b(x)$ 的一次导数得

$$dM_b/dx = F_{Az} - F_{1z} - F_{2z} = F_Q. \quad (2)$$

上述结果具有普遍性, 即弯曲的一次导数等于剪力. 我们知道当函数的一次导数在某处的值为零时, 此函数在该处就有一极值. 因此弯矩的极值位于剪力图的零点. 在集中载荷下, 弯矩图由直线段组成, 因此我们只需计算出 $M_b(x = \alpha_1)$ 和 $M_b(x = \alpha_2)$ 值, 然后用直线将它们连接即可.

例: 试求链轮轴 (图 6a) 的剪力图和弯矩图. — 首先由 $\sum M_B = 0$ 求出 $F_{Az} = 17250$ 再由 $\sum M_A = 0$ 求得支座力

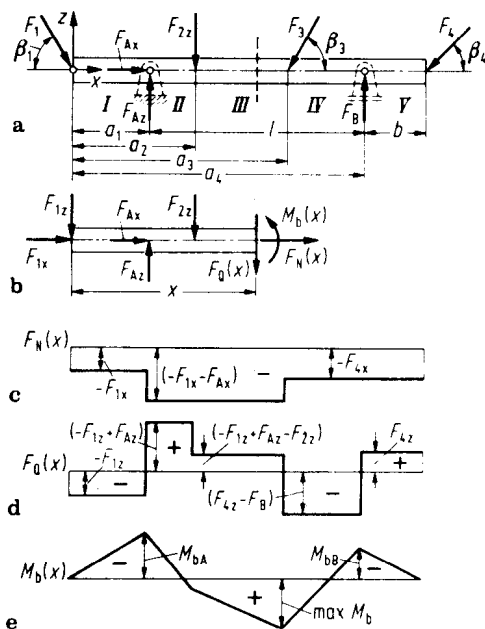


图 5a — e. 受集中力的梁·截面力

$F_B = 27750\text{N}$. 在第 II 段 (图 6b) 的一个截面处, 由 $\sum F_{ix} = 0 = F_{Ax} - F_1 - F_Q$ 求出剪力 $F_Q = -12750\text{N}$. 通过取相应的截面得到在第 I 段 $F_Q = 17250\text{N}$ 和第 III 段 $F_Q = -27750\text{N}$. 剪力图 $F_Q(x)$ (阶梯曲线) 见图 6c. 在 1 和 2 处的弯矩可以通过在该两点取截面, 再由 $\sum M_{i1} = 0 = -F_{Az} \cdot 0.5\text{m} + M_{b1}$ 得 $M_{b1} = 8625\text{Nm}$ 和由 $\sum M_{i2} = 0 = -F_{Az} \cdot 0.85\text{m} + F_1 \cdot 0.35\text{m} + M_{b2}$ 得 $M_{b2} = 4162.5\text{Nm}$. 用直线将这些点以及支座处的零点相连即得弯矩图 $M_b(x)$ (图 6d).

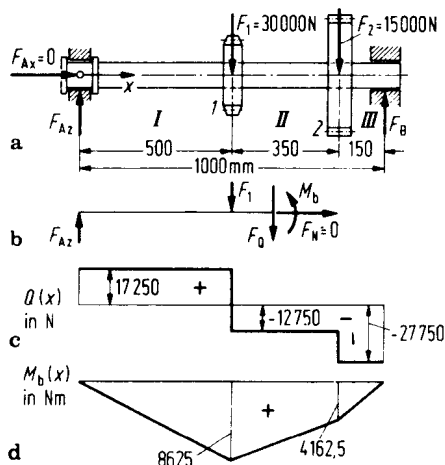


图 6a — d. 链轮轴, 内力

表 1. 标准情况的弯矩图和剪力图

1 $F_A = F_B = F/2$ $\max M_b = Fl/4$	2 $F_A = Fb/l$ $F_B = Fa/l$ $\max M_b = Fab/l$	3 $F_A = F_B = F$ $\max M_b = Fa$										
4 $F_A = F_B = nF/2$ $\max M_b = Fl/k$ <table><tr><td>n</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>k</td><td>2.4</td><td>2.0</td><td>1.54</td><td>1.33</td></tr></table>	n	3	4	5	6	k	2.4	2.0	1.54	1.33	5 $F_A = -Fa/l$ $F_B = F(l+a)/l$ $\min M_b = -Fa$	6 $F_A = F_B = F$ $\min M_b = -Fa$
n	3	4	5	6								
k	2.4	2.0	1.54	1.33								
7 $F_A = F_B = \frac{3}{2}F$ $\max M_b = F\left(\frac{l}{4} - a\right)$	8 $F_A = -F_B = -M/l$ $\max M_b = M$	9 $F_A = -F_B = -M/l$ $\min M_b = -Ma/l$ $\max M_b = Mb/l$										
10 $F_A = F_B = 0$ $F_A = F_B = 0$	11 $F_A = F_B = ql/2$ $\max M_b = ql^2/8$	12 $F_A = qcb/l$ $F_B = qca/l$ $\max M_b = M_{b1} + \frac{F_b^2}{2q}$										
13 $F_A = F_B = q\left(a + \frac{l}{2}\right)$ $\max M_b = -\frac{qa^2}{2} + \frac{qa^2}{l} + \frac{q^2}{8}$	14 $F_A = q, l/6$ $F_B = q, l/3$ $\max M_b = \frac{q^2}{15.6}$	15 $F_A = F$ $F_B = F$ $\min M_b = -Fl$										
16 $F_A = ql$ $M_B = ql^2/2$ $\min M_b = -ql^2/2$	17 $F_A = 0$ $M_B = M$ $F_B = 0$	18 $F_A = ql/2$ $M_B = ql^2/6$ $\min M_b = -ql^2/6$										

受集中力矩的梁 当梁受到一集中力矩 M (见 C2, 表 1, 第 9 例) 作用时, 由于 $M'_b(x) = F_Q(x) = \text{const}$, 弯矩图各处的斜率均相同, 但在力矩 M 作用处则有一等于 M 值的跳跃。

受分布载荷的梁 (图 7)

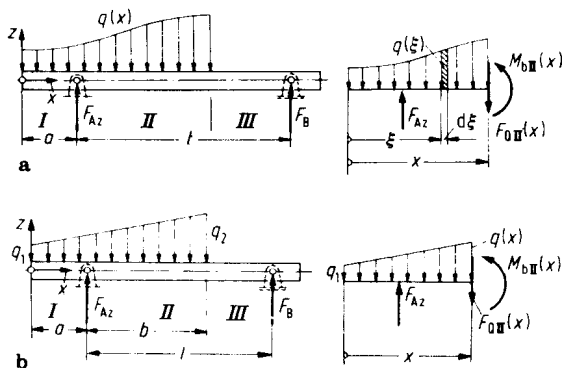


图 7. 受分布载荷的梁 a. 任意的; b. 线性的

除全跨受分布载荷的单跨梁外, 此种梁和受集中力的梁一样需要分段处理. 在每一段均取一截面. 例如对第 II 段 (图 7a), 由

$$\sum F_{iz} = 0 = - \int_0^x q(\xi) d\xi + F_{Az} = F_{QII}(x)$$

得到

$$F_{QII} = F_{Az} - f(x) \quad (3)$$

并由此, 根据 $M'_b(x) = F_Q(x)$, 得

$$M_{bII}(x) = \int F_{QII}(x) dx = F_{Az}(x) - \int f(x) dx + C. \quad (4)$$

常数 C 由 $M_{bII}(x=a) = M_{bA}$ 得出, 其中 M_{bA} 由第 I 段的计算中求出. 弯矩等于剪力图面积和加上初始值 M_{bA} . 从方程 (3), 经过微分再随之积分得到

$$dF_Q/dx = F'_Q(x) = M'_b(x) = -q(x),$$

$$F_Q(x) = M'_b(x) = - \int q(x) dx = f(x) + C_1 \quad (5)$$

$$M_b(x) = \int F_Q(x) dx = g(x) + C_1 x + C_2$$

方程 (5) 可以代替方程 (3) 和 (4) 用以计算剪力 $F_Q(x)$ 和弯矩 $M_b(x)$. 常数 C_1 和 C_2 则得自

$$Q_{II}(x=a) = Q_I(x=a) + F_{Az}$$

和

$$M_{bII}(x=a) = M_{bI}(x=a),$$

其中 $Q_I(x=a)$ 和 $M_{bI}(x=a)$ 由第 I 段的计算均成为已知. 如分布载荷为常量或线性增加 (图 7b), 对于第二段则有下列关系:

$$q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{(a+b)} x,$$

$$F_{QII}(x) = F_{Az} - q_1 x - \frac{q_2 - q_1}{(a+b)} \frac{x^2}{2},$$

$$M_{bII}(x) = F_{Az}(x-a) - q_1 \frac{x^2}{2} - \frac{q_2 - q_1}{(a+b)} \frac{x^3}{6}.$$

对于线性增加或均匀分布载荷, 弯矩图为三次或二次抛物线 (见表 1)

任意载荷下的直梁 (图 8). 首先由三个平衡条件 $\sum F_{ix} = 0$, $\sum M_{iB} = 0$, $\sum M_{iA} = 0$ 求出支座反力 $F_{Ax} = -3.5 \text{ kN}$, $F_{Az} = 3.68 \text{ kN}$ 和 $F_B = 2.17 \text{ kN}$. 最好对紧靠一个段的边界的左方和右方计算剪力而对该段的边界处计算弯矩. 例如对于第 II 段左边界的截面, 即支座 A 的右侧, 有

$$\sum F_{ix} = 0, F_{NAr} = -F_{Ax} = +3.5 \text{ kN};$$

$$\sum F_{iz} = 0, F_{QAr} = F_{Az} - F_1 = 1.68 \text{ kN};$$

$$\sum M_i = 0, M_{bAr} = -F_1 a = -2.0 \text{ kNm}.$$

对于第 II 段的右边界相应地有

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{Ax} + F_{NII} \quad F_{NII} = +3.5 \text{ kN};$$

$$\sum F_{iz} = 0 = -F_1 + F_{Az} - qb - F_{QII} \quad F_{QII} = -1.32 \text{ kN};$$

$$\sum M_i = 0 = F_1(a+b) - F_{Az}b + qb^2/2 + M_{bI} \quad M_{bI} = -1.64 \text{ kNm}.$$

第 II 段的剪力零点由 $F_Q(x) = 0$ 求得为 $x_0 = 2.12 \text{ m}$. 该处的弯矩 $M_b(x_0) = -1.06 \text{ kNm}$. 在对其他各段的截面力均算出后, 我们得到图 8 中所示的内力图.

用图解法求弯矩 先用集中力 $F_E = qc$ 代替分布力 (图 9a, b) 后, 即可绘力图 (力比例尺为 $1 \text{ cm} \triangleq \kappa \text{ kN}$, 长度比例尺 $1 \text{ cm} \triangleq \lambda \text{ cm}$). 将力图中各极线平移到位置图 (索多边形), 并按照 B 1.6.1 最后在位置图和力图上绘出多边形的封闭线, 即得到支座反力 F_A 和 F_B , 对于 x 截面应以极图力 F_s 和 F_{s2} 代替支座反力 F_A 和 F_1 , 并将两力分解为水平和铅直分力 (图 9b). 弯矩即为 $M_b(x) = F_H m(x)$, 其中由极图可知 $F_H = \text{const}$; $m(x)$ 值则代表弯矩图面积. 如 F_H 和 $m(x)$ 按 cm 读出, 即得

$$M_b(x) = \kappa \lambda F_H m(x) \text{ 单位 kN cm}. \quad (6)$$

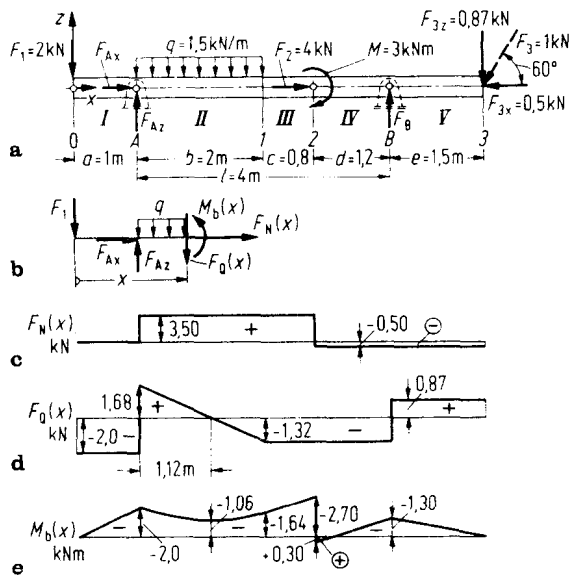


图 8a—e. 任意载荷下的梁, 内力

2.4.3 平面折线形梁和平面曲梁的内力.

Forces and moments in plane curved beams

折线形平面梁 现以行车的悬挂结构(如图10a)为例. 整个体系可分割为几个直线段(因对称只需考虑其一半). 在跟随移动的坐标系 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 中, 由 $\sum F_{i\bar{x}}=0$, $\sum F_{i\bar{z}}=0$, 和 $\sum M_i=0$, 可确定内力.

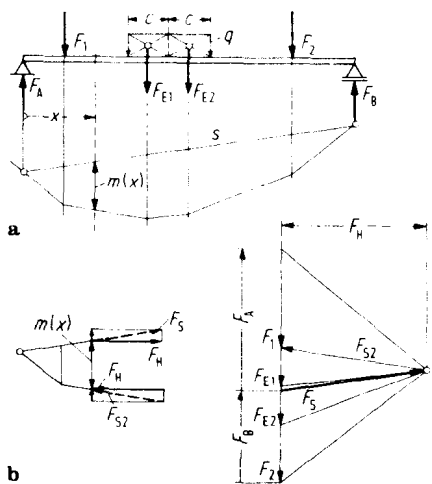


图 9a 和 b. 弯矩图, 图解法.

例如在第 II 段(图 10b)由 $\sum F_{i\bar{x}}=0=F_N-F/2$ 得 $F_N=F/2$, 由 $F_{i\bar{z}}=0=-F_Q$ 得 $F_Q=0$ 和由 $\sum M_i=0=-(F/2)a+M_b$ 得 $M_b=Fa/2$. 全部结果见图 10c.

平面曲梁 对于承受均匀分布的径向载荷 q 的开口圆环梁(活塞环)(图 11a), 在中心角为 φ 的截面上, 在沿圆周的坐标系 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 按照图 11b 得到

$$\sum F_{i\bar{x}}=0=\int_0^\varphi q r \sin(\varphi-\psi) d\psi + F_N(\varphi),$$

$$F_N(\varphi) = -qr(1-\cos\varphi);$$

$$\sum F_{i\bar{z}}=0=-\int_0^\varphi q r \cos(\varphi-\psi) d\psi - F_Q(\varphi),$$

$$F_Q(\varphi) = -qr \sin\varphi;$$

$$\sum M_i=0=\int_0^\varphi q r^2 \sin(\varphi-\psi) d\psi + M_b(\varphi),$$

$$M_b(\varphi) = -qr^2(1-\cos\varphi).$$

内力图见图 11c.

2.4.4 空间梁的内力

Forces and moments in beams in space

在静定系统中, 在空间有六个平衡条件可供选用. 由此可求出六个内力 $F_N, F_{Q\bar{y}}, F_{Q\bar{z}}, M_{b\bar{y}}, M_{b\bar{z}}, M_t$. 在空间悬跨梁上, 按图 12a, b 以第 III 段为例, 得

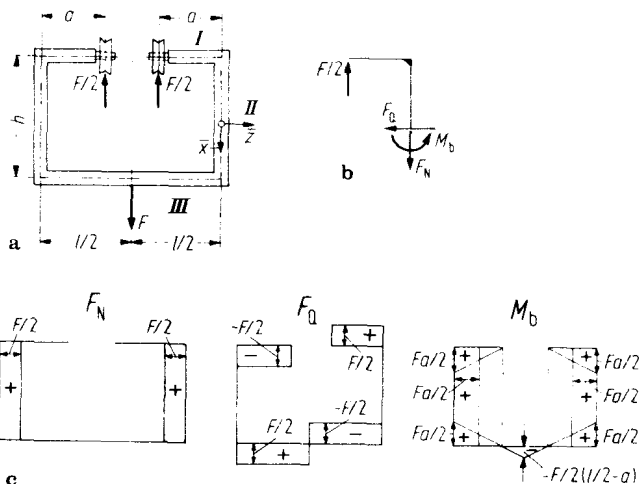


图 10a—c. 悬挂结构, 内力

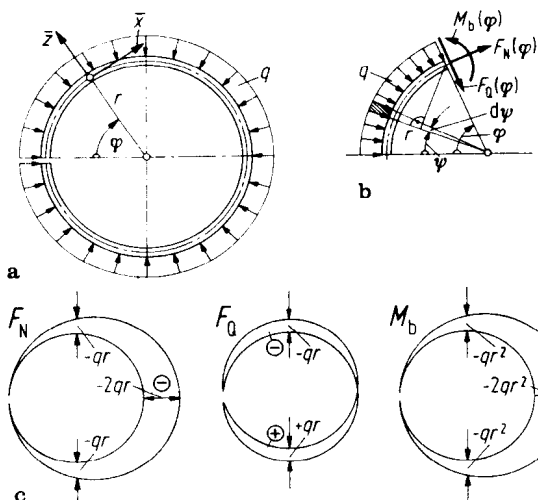


图 11a—c. 活塞环, 内力

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 & F_N &= 0; & \sum F_{iy} &= 0 & F_{Qy} &= 0; \\ \sum F_{iz} &= 0 & F_{Qz} &= F; & \sum M_{ix} &= 0 & M_i &= -Fa; \\ \sum M_{iy} &= 0 & M_{by} &= -F(l-x); & \sum M_{iz} &= 0 & M_{bz} &= 0. \end{aligned}$$

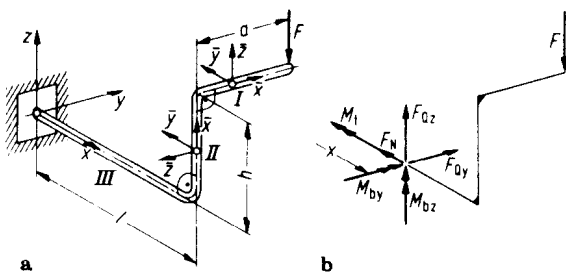


图 12a 和 b. 空间内力

内力图与图 10c 所示相似

2.4.5 直梁的弯曲应力

Bending stresses in straight beams

简单弯曲 (正、平面弯曲). 这是指截面的一个轴——它同时又是主轴, 见方程 (17)——与载荷平行的情形. 如该轴为 z 轴, 则载荷在 z 方向只引起弯矩 M_{bz} (图 13a). 假设载荷所在的平面通过剪切中心 M (见 C 2.4.6), 虎克定律 $\sigma = E\varepsilon$ 有效并且截面保持为平面, 也就是说, 由于剪应力

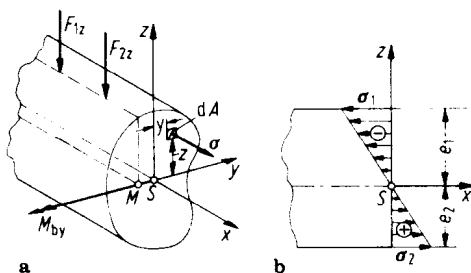


图 13a 和 b. 弯曲应力

引起的截面隆起是极小量, 因而可忽略不计 (贝利假设), 我们得到

$$\sigma = E\varepsilon = mz \quad (7)$$

由此可以由平衡条件

$$\sum F_{ix} = 0 = \int \sigma dA = \int mzdA, \quad \int z dA = 0.$$

得知中性轴要通过截面形心, 并由

$$\sum M_{iz} = 0 = \int \sigma y dA = \int m y z dA, \quad \int y z dA = I_{yz} = 0$$

得知双轴面积矩 I_{yz} 必须为零, 即 y 轴和 z 轴必须为主轴.

进一步有

$$\begin{aligned} M_{by} = M_b &= - \int \sigma z dA = - \int m z^2 dA = - m \int z^2 dA \\ &= - m I_y \end{aligned}$$

其中 I_y 为二次轴面积矩. 利用 $m = -M_b/I_y$, 由方程 (7) 得

$$\sigma = - (M_b / I_y) z. \quad (8)$$

这说明弯曲应力与距中性轴距离成正比. 最大应力发生在 $z = e_1$ 和 $z = -e_2$ (图 13b), 其大小为

$$\sigma_1 = -M_b / W_{y1} \quad \text{和} \quad \sigma_2 = +M_b / W_{y2}. \quad (9)$$

$$W_{y1} = W_{b1} = I_y / e_1 \quad \text{和} \quad W_{y2} = W_{b2} = I_y / e_2 \quad (10)$$

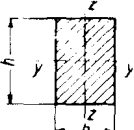
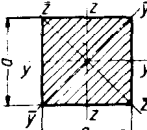
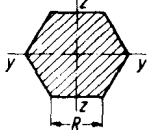
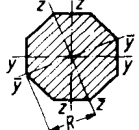
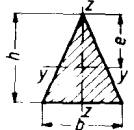
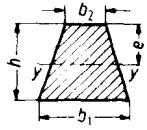
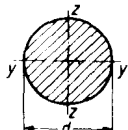
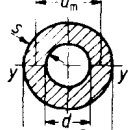
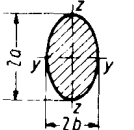
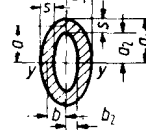
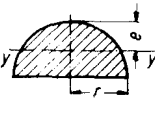
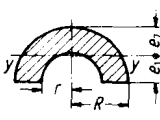
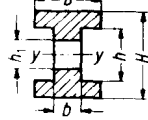
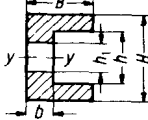
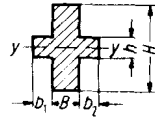
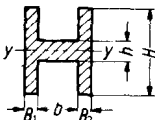
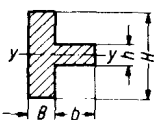
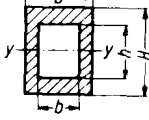
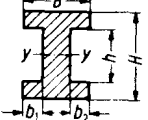
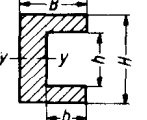
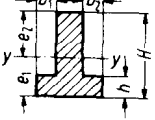
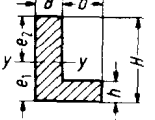
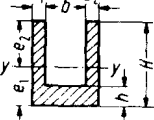
是抗弯轴抵抗矩 (见表 2). 绝对值最大的弯曲应力位于 $W_{y\min}$ 处, 大小为

$$\sigma_{\max} = |M_b| / W_{y\min}. \quad (11)$$

对于其 y -轴为对称轴的截面, $e_1 = e_2$ 和 $W_{y1} = W_{y2} = W_y$.

二次面积矩 在梁的一般弯曲理论中需要下列二次面积矩 (图 14a):

表 2. 二次轴面积矩和抵抗矩 (截面模量)

 $I_y = I_z = \frac{bh^3}{12}$ $W_y = W_z = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = W_z = \frac{hb^2}{6}$	 $I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$ $W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$ $I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$ $W_y = W_z = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = 0.118 a^3$
 $I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4$ $W_y = W_z = \frac{5}{8} R^3 = 0.625 R^3$ $W_y = W_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^3 = 0.5413 R^3$	 $I_y = I_z = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0.638 R^4$ $W_y = W_z = 0.6906 R^3$ $I_y = I_z = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0.638 R^4$ $W_y = W_z = 0.638 R^3$
 $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{48}$ $W_y = \frac{bh^2}{24}$ $W_z = \frac{hb^2}{24}$ 其中 $e = \frac{2}{3} h$	 $I_y = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$ $W_y = \frac{h^2}{12} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{2b_1 + b_2}$ 其中 $e = \frac{h}{3} \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}$
 $I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$	 $I_y = I_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$ $W_y = W_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D}$ 对于薄壁 $\left(\frac{s}{d_m}\right)^2 \ll 1$: $I_y = I_z = \frac{\pi d_m^3 s}{8}, W_y = W_z = \frac{\pi d_m^2 s}{4}$
 $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_z = \frac{\pi b^3 a}{4}$ $W_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$ $W_z = \frac{\pi b^2 a}{4}$	 $I_y = \frac{\pi}{4} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)$ $W_y = \frac{\pi (a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2)}{4a_1}$ 对于薄壁: $I_y = \frac{\pi a^2 (a+3b)s}{4}, W_y = \frac{\pi a (a+3b)s}{4}$
 $I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = 0.1098 r^4$ $W_y = I_y / e = 0.1908 r^3$ 其中 $e = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) r = 0.5756 r$	 $I_y = 0.1098 (R^4 - r^4) - 0.283 R^2 r^2 \frac{R-r}{R+r}$ $W_{y1,2} = I_y / e_{1,2}$ 其中 $e_1 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}$ 和 $e_2 = R - e_1$
 	$I_y = \frac{B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)}{12}$ $W_y = \frac{B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)}{6H}$
 	 $I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W_y = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$ 其中 $B = B_1 + B_2$ $b = b_1 + b_2$
 	 $I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W_y = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ 其中 $b = b_1 + b_2$
 	 $I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{12} - (BH + bh) e_1^2$ 其中 $B = B_1 + B_2, b = b_1 + b_2$ $W_{y1,2} = I_y / e_{1,2}$ 其中 $e_1 = \frac{1}{2} \frac{BH^2 + bh^2}{BH + bn}$ 和 $e_2 = H - e_1$