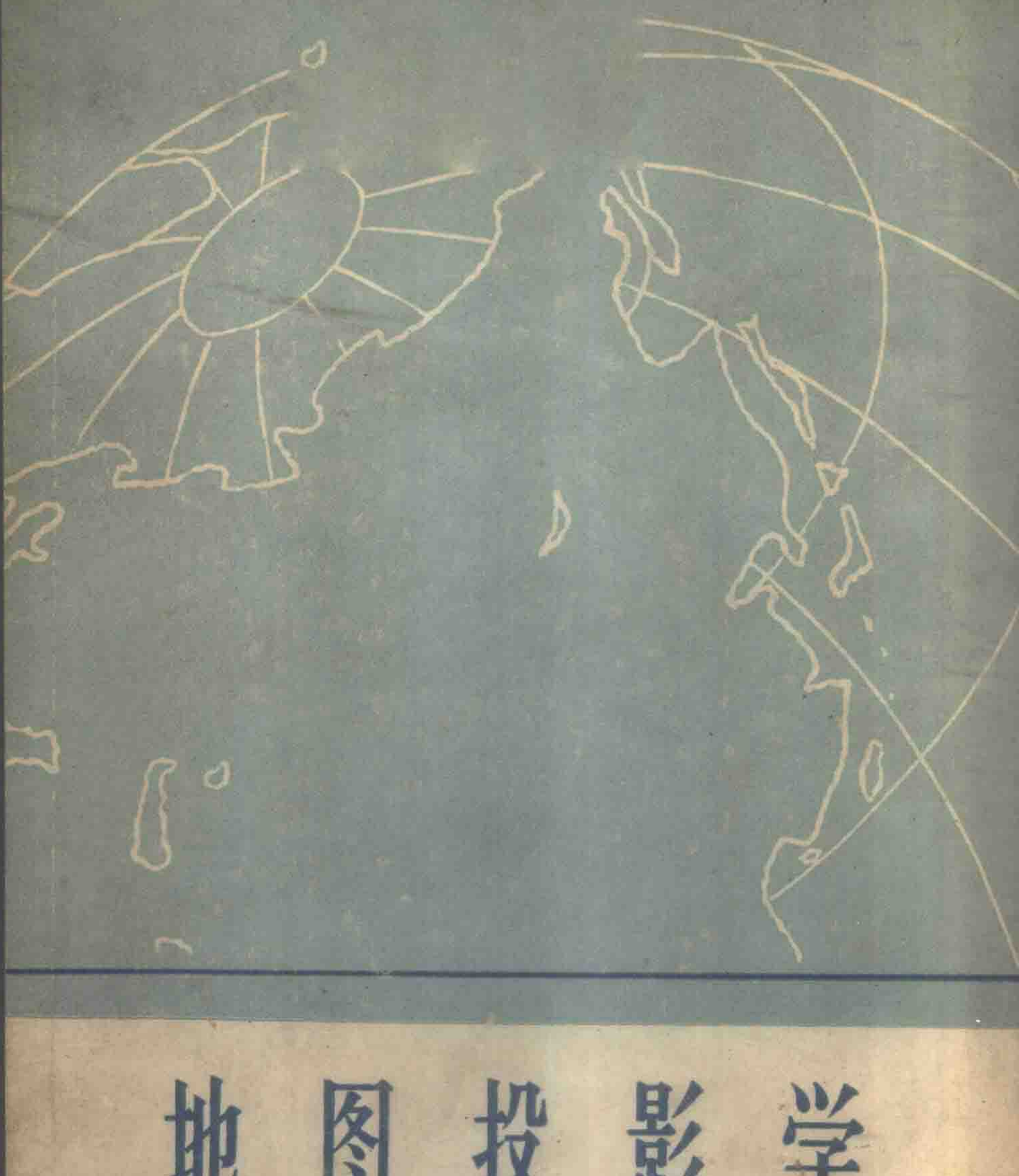

地图投影学

第二册

方 俊著

地圖投影學

第二册

方　俊著

科學出版社

1958

內容提要

本書專門討論大地測量地圖投影問題，共分六章：第一章討論地球橢球體的性質，橢球面上的坐標系統以及其換算公式；第二章爲大地測量地圖投影總論，導出正形投影的一般公式，作爲以下幾章的基礎；第三章專論高斯-克呂格投影，由於這種方法在我國已經採用，故討論特別詳細，並舉出了很多算例；第四章至第六章分別討論了蘭勃脫正形投影、球面投影以及斜軸正形投影；由於蘭勃脫正形投影在解放前曾在我國應用過，故略爲詳細，其他投影則僅作理論的敘述。

地圖投影學　第二冊

著者　方俊

出版者　科學出版社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号

印刷者　科學出版社上海印刷廠

總經售　新華書店

1958年12月第一版　書號：1427
1958年12月第一次印刷　字數：232,000
(滬)精：1—826　開本：850×1168 1/32
平：1—758　印張：8 1/2　插頁：2

定價：(10)精：2.10元 平：1.60元

序

本書的主要內容是介紹幾種在大地測量中應用較廣的投影方法。這些投影是:

1. 高斯-克呂格投影: 這是一種具有一條和地面經綫等長的中央經綫的正形投影。凡是南北長而東西狹的地區,採用這種投影都很適宜。但是如果一個國家的東西和南北方向都是十分廣袤時,則可以將整個地區按經綫劃分爲若干經綫帶,在每一帶上採用一個高斯-克呂格投影。目前,我國在大地測量中所採用的就是這種方法。它也是國際上應用最爲普遍的一種投影,例如蘇聯、德國等都是採用這種方法的國家。本書在第三章中用了較多的篇幅來討論這種投影,介紹了各種不同的計算公式,並舉了很多算例,以說明公式的用法。

2. 蘭勃脫正形投影: 這是正形的圓錐投影,也就是具有一條或兩條等長的緯綫的正形投影。和高斯-克呂格投影相反,它最適宜用於東西廣闊而南北狹窄的地區。但是如果東西和南北方向都是相當廣大時,則也可以用分帶方法,即按緯綫將這個區域劃分爲若干緯綫帶,而在每一帶上應用一個蘭勃脫投影。這就是我國在解放前在大地測量中所採用的投影方法。本書在第四章中討論了這種投影。由於它曾一度應用於我國,所以本書也作了比較詳細的介紹,並且也舉了一些計算例子。

3. 球面投影: 對於橢球面和平面之間的投影來說,球面投影的定義是不很明確的。本書第五章中所介紹的以法國盧西里的僞球面投影爲主,但是也附帶地介紹了按照其他定義所推導出來的球面投影,如高斯的雙重投影,愛格特的正方向球面投影等等。這種投影只能應用東西和南北方向都不很大的地區。

4. 斜軸正形投影: 和蘭勃脫投影一樣,這種投影適用於東西狹長的地區。但是它和蘭勃脫投影不同,它沒有等長的緯綫,而是將一條通過投影中心並垂直於中央經綫的大地綫投影成爲等長的直綫,這就是

投影平面上的橫坐標軸。這種投影不適宜於分帶，因而也不適宜於廣大地區之用。本書在第六章簡短地討論了這種投影。

由於上述四種投影都是正形投影，所以我們可以根據正形投影的一般原理，先推導出普遍的公式，然後再按照各個投影的特殊條件，將這些公式運用到每個投影之上。本書第二章的內容就是這些普遍公式的推導方法，其中包括正形投影的一般投影公式、量度和經緯收斂角公式、大地綫投影的方程以及方向和距離改正公式。這些公式都是用級數展開式來表示的，而級數中的係數則爲待定的常數。它們可以根據每個投影的條件來確定。第三至第六章的內容就是將這些公式應用到有關投影之上。

此外，由於我們所討論的問題主要是橢球面和平面之間的投影問題，這裏牽涉到很多和橢球面幾何學有關係的問題，因此我們必須將橢球面上的各種元素、它上面的坐標系統以及這個面上的大地綫的方程等作一概略介紹並推導出一些必要的公式。這就是本書第一章內的內容。

方 俊 1958年6月於武昌

目　　錄

第一章　旋轉橢球面和它上面的坐標系統

§1. 旋轉橢球面的各常數　在大地測量中，一切的計算工作都是假定地球是一個扁的旋轉橢球面來進行的。所謂旋轉橢球面就是將一條平面的橢圓曲綫（稱爲母橢圓）繞着它的一個軸旋轉所得到的曲面；而扁的旋轉橢球面就是以短軸爲軸而旋轉所得到的曲面。這條短軸就是地軸，它和橢球面的兩個交點稱爲地極。母橢圓的長軸旋轉成爲一個平面，和地軸相垂直，並且平分橢球，我們稱它爲赤道平面；赤道平面和橢球面相交的曲綫爲一大圓，稱爲赤道。如果母橢圓上有一點，則當母橢圓旋轉之時，這點畫出一個小圓，它是在橢球面上，並且和赤道平行，所以我們稱它爲平行圈，也稱爲緯綫，如果用一個通過地軸的平面和橢球面相交，則所交的曲綫和母橢圓完全相同，它通過兩個地極，並且和赤道及平行圈相交成直角。我們稱它爲經綫。因此，我們可以用這兩組互相正交的曲綫將整個橢球面分成無數的小塊。每個小塊的東西邊爲兩條經綫，而南北邊則爲兩條緯綫。由於東西邊是相等的，而南北邊則不相等，所以，這種小塊呈梯形。這兩組曲綫在橢球面上組成一個坐標網。橢球面上的任何一個點子可以根據通過它的經綫和緯綫來決定它的坐標，正像在平面上用直角坐標來決定一點的坐標一樣。

在橢球面上，我們選擇一條經綫爲起始經綫。這條經綫上任何點的經度爲零，其他經綫的經度則爲這條經綫的平面和起始經綫的平面的交角。在起始經綫以西者爲正，或稱西經，以東者爲負，或稱東經；東經和西經在距起始經綫 180° 的經綫上會合。另一坐標爲緯度；以赤道爲起始，也就是說，赤道上任何一點的緯度爲零，其他點子上的緯度則爲在這點上所作橢球面的法綫和赤道平面的交角。在赤道以北者爲北緯，在南者爲南緯，兩者各到地極（北極及南極）爲 90°。由於緯綫是母橢圓上的一點所旋轉出來的圓，所以緯綫上任何一點上的緯度都是相等的，並且就是母橢圓上的相當點的法綫和橢圓長軸的交角。我們用

字母 φ 來代表這個角。

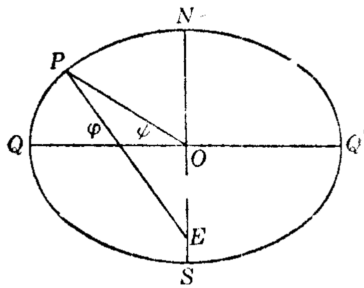

圖 1

假如圖 1, $QNQ'S$ 爲母橢圓, QQ' 爲它的長軸, NS 爲短軸,兩軸相交於 O, P 爲橢圓上的一點,則法綫 PE 和 QQ' 的交角即爲 P 點的緯度 φ。現在若用直綫連接 P 和 O, 則 PO 和 QQ' 的交角 ψ 稱爲地心緯度,在一般情形下,地心緯度 ψ 不等於緯度 φ。我們有時也稱 φ 爲地理緯度,以區別於地心緯度。

現在假定母橢圓的長半徑 $OQ' = OQ = a$,短半徑 $NO = SO = b$, 又以 QOQ' 爲 X 坐標軸, NOS 爲 Y 坐標軸, 則橢圓的直角坐標方程爲:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

我們現在根據這個方程來求出地理緯度和直角坐標 (x, y) 的關係。由於 PE 是 P 點的法綫,所以

$$\tan\varphi = -\frac{dx}{dy}, \tag{2}$$

微分(1)式,則得

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{y}{b^2} : \frac{x}{a^2},$$

故

$$\tan\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x}. \tag{3}$$

自圖,可得地心緯度和坐標的關係,即:

$$\tan\psi = \frac{y}{x}, \tag{4}$$

所以

$$\tan\psi = \frac{a^2}{b^2}\tan\varphi. \tag{5}$$

令

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1-\frac{b^2}{a^2}, \tag{6}$$

則 ε 稱為橢圓，或橢球面的第一離心率；又若令

$$\varepsilon'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}-1, \tag{7}$$

則 ε' 稱為橢球面的第二離心率，第一和第二離心率有以下的關係：

或

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'^2 &= \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \\ \varepsilon^2 &= \frac{\varepsilon'^2}{1+\varepsilon'^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

最後，我們還有表示橢球面特性的第三個常數，即

$$\alpha = \frac{a-b}{a}.$$

我們稱 α 為橢球面的扁率。扁率和兩種離心率的關係如下：

$$\varepsilon^2 = \alpha(2-\alpha), \quad \varepsilon'^2 = \frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2}, \tag{9}$$

$$\alpha = 1-\sqrt{1-\varepsilon^2} = 1-\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}. \tag{10}$$

§ 2. 橢球面上的曲率半徑　橢球面和球面不同，它上面任何一點上的曲率半徑是隨着方向而異的。經綫方向的曲率半徑 M 可以根據母橢圓來推算。我們知道任何平面曲綫上的曲率半徑可以按以下公式計算[1][2]：

$$M = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \tag{11}$$

自(2)式，可得：

$$\frac{dy}{dx} = \cot\varphi. \tag{12}$$

而

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \csc^2\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}. \tag{13}$$

要求得 $\frac{d\varphi}{dx}$ 和 φ 的關係，可以先求得 x 和 φ 的關係。自(1)式和(3)式消去 y 則得

$$x = \frac{a^2 \cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

即

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}.$$

自(6)式,可知

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

所以

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}. \tag{14}$$

同理可得:

$$y = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}. \tag{15}$$

依 x 微分(14)式得:

$$1 = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \cdot \frac{d\varphi}{dx},$$

即

$$\frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

代入(13)式:

$$1 : \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin^3\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}. \tag{16}$$

以(12)及(16)式代入(11)式,得經綫方向的曲率半徑公式如下:

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}. \tag{17}$$

從這個公式,我們可以知道經綫方向的曲率半徑是隨着緯度 φ 而變的,

在赤道上爲最小，在地極上爲最大。

和經綫方向相垂直的是卯酉圈，現在再來推算這個方向的曲率半徑 N。

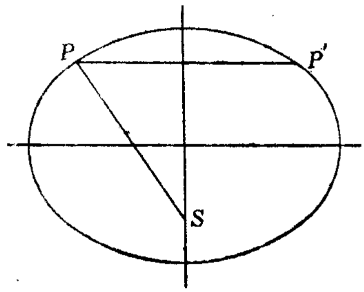

圖 2

設圖 2 的 PP' 爲一緯綫，則從這條緯綫上任何一點所作橢球面的法綫與赤道平面的傾角都等於緯綫的緯度 φ，所以它們都必和短軸交於同一點 S。

在 P 點上的卯酉圈是垂直於經綫的，它是和緯綫 PP' 在 P 點相切的。現在假如通過 PS 作一個和卯酉圈十分接近的平面。它在橢球面上割出一條曲綫，並和緯綫交於 P 及另外一個十分接近的點子 P''。則在 P 和 P'' 兩點上的法綫都通過 S。所以，S 就是這一極短綫段的曲率中心。因此當平面向卯酉圈平面旋轉，最後和它相合爲一時，則平面在橢球面上的交綫就是卯酉圈。此時，曲綫的曲率中心仍在 S；也就是說，卯酉圈的曲率半徑等於 PS，或 $N = PS$。但是，我們知道 $PS\cos\varphi = x$，所以，根據(14)式，得卯酉圈的曲率半徑：

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}. \tag{18}$$

至於緯綫的半徑 p 則等於：

$$p = N\cos\varphi. \tag{19}$$

現在若令

$$W = \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi},$$

則

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{W^3}, \tag{17'}$$

$$N = \frac{a}{W}. \tag{18'}$$

以上所導出的 M 和 N 公式中的兩個常數是長軸 a 和第一離心率 ε^2 我們也可以用第二離心率 ε'^2。現在若將(8)式第二式的關係代入(17)及(18)式，則得

$$M = \frac{c}{(1+\varepsilon'^2\cos^2\varphi)^{3/2}}, \tag{20}$$

$$N = \frac{c}{\sqrt{1+\varepsilon'^2\cos^2\varphi}}. \tag{21}$$

式中

$$c = \frac{a^2}{b}, \tag{22}$$

c 就是地極上的曲率半徑；在這點上，M 是和 N 相等的。

設

$$V = \sqrt{1+\varepsilon'^2\cos^2\varphi}, \tag{23}$$

則

$$M = \frac{c}{V^3}, \tag{20'}$$

$$N = \frac{c}{V}. \tag{21'}$$

在(22)式中，又可以用 η^2 代替 $\varepsilon'^2\cos^2\varphi$，故

$$V = \sqrt{1+\eta^2}. \tag{23'}$$

§3. V 和 η^2 對於 φ 的各階導數和 M 及 N 的級數展開

因爲

$$\eta^2 = \varepsilon'^2\cos^2\varphi,$$

所以它對於 φ 的導數爲：

$$\frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2\varepsilon'^2\sin\varphi\cos\varphi = -2\varepsilon'^2\cos^2\varphi\tan\varphi. \tag{24}$$

令

$$t = \tan\varphi,$$

則(23)式可以寫成：

$$\frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2\eta^2 t.$$

因爲

$$\frac{dt}{d\varphi} = 1+t^2,$$

所以

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\eta^2}{d\varphi^2} &= -2\eta^2(1-t^2),\\
\frac{d^3\eta^2}{d\varphi^3} &= +8\eta^2 t,\\
\frac{d^4\eta^2}{d\varphi^4} &= +8\eta^2(1-t^2),\\
\frac{d^5\eta^2}{d\varphi^5} &= -16\eta^2 t,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{24a}$$

V 對於 φ 的導數爲:

$$\frac{dV}{d\varphi}=\frac{1}{2V}\frac{d\eta^2}{d\varphi}=-\frac{\eta^2 t}{V}.$$

依次微分,得二、三階導數如下:

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}=-\frac{\eta^2}{V^3}(1-t^2+\eta^2),$$

$$\frac{d^3V}{d\varphi^3}=\frac{\eta^2 t}{V^5}(4+5\eta^2+3\eta^2t^2+\eta^4),$$

在四階導數中,棄去 η^6 及 η^6 以上各項:

$$\frac{d^4V}{d\varphi^4}=\frac{\eta^2}{V^7}(4-4t^2+9\eta^2+10\eta^2t^2-3\eta^2t^4+\cdots),\tag{25}$$

在五階導數中,棄去 η^4 及 η^4 以上各項:

$$\frac{d^5V}{d\varphi^5}=-\frac{16\eta^2 t}{V^9}+\cdots.$$

現在根據以上的結果來求 M 和 N 的展開式。 自麥克勞倫定理,有:

$$M=M_0+M_0'\Delta\varphi+\frac{1}{2}M_0''\Delta\varphi^2+\frac{1}{6}M_0'''\Delta\varphi^3+ +\frac{1}{24}M_0^{\mathrm{IV}}\Delta\varphi^4+\frac{1}{120}M_0^{\mathrm{V}}\Delta\varphi^5+\cdots.\tag{26}$$

$$N=N_0+N_0'\Delta\varphi+\frac{1}{2}N_0''\Delta\varphi^2+\frac{1}{6}N_0'''\Delta\varphi^3+ +\frac{1}{24}N_0^{\mathrm{IV}}\Delta\varphi^4+\frac{1}{120}N_0^{\mathrm{V}}\Delta\varphi^5+\cdots.\tag{27}$$

式中 M_0', M_0'', M_0''' … N_0', N_0'', N_0''' … 等爲 M 和 N 對於緯度 φ 的各階導數,指數 0 表示它們在 $\varphi=\varphi_0$ 時的相當值; M_0 及 N_0 則各爲 M 和 N 在 $\varphi=\varphi_0$ 的數值; $\Delta\varphi$ 爲緯度增量,即 $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_0$。

因爲 M 和 N 各等於常數 c 乘 $\frac{1}{V}$ 的三次及一次方，所以我們可以先求出 $\frac{1}{V^n}$ 的各階導數,然後再分別令 $n=3$ 及 1,依 φ 微分 $\frac{1}{V^n}$ 得:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{V^n}\right)=-\frac{n}{V^{n+1}}\frac{dV}{d\varphi}.$$

逐級微分,得:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{V^n}\right)&=-\frac{n}{V^{n+1}}\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\frac{n(n+1)}{V^{n+2}}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2,\\ \frac{d}{d\varphi^3}\left(\frac{1}{V^n}\right)&=-\frac{n}{V^{n+1}}\frac{d^3V}{d\varphi^3}+3\frac{n(n+1)}{V^{n+2}}\frac{d^2V}{d\varphi^2}\frac{dV}{d\varphi}-\\ &\quad-\frac{n(n+1)(n+2)}{V^{n+3}}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^3,\\ \frac{d^4}{d\varphi^4}\left(\frac{1}{V^n}\right)&=-\frac{n}{V^{n+1}}\frac{d^4V}{d\varphi^4}+\frac{4n(n+1)}{V^{n+2}}\frac{d^3V}{d\varphi^3}\frac{dV}{d\varphi}+\\ &\quad+\frac{3n(n+1)}{V^{n+2}}\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)^2.\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

上式中尙有兩項，每項皆包含 $\frac{dV}{d\varphi}$ 和 $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$ 的三次以上的乘積，而根據(25)式,各階導數皆含有一個 η^2 乘數,所以兩項皆在 η^6 以上;作爲 $\Delta\varphi^4$ 的係數,它們是可以棄去的。 又在下列的五階導數中,我們可以將包含 $\frac{dV}{d\varphi}$, $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$, 等的任何乘積的各項棄去，而只保留 $\frac{d^5V}{d\varphi^5}$ 一項；也就是在 $\Delta\varphi^5$ 的係數中棄去 η^4 各項。故

$$\frac{d^5}{d\varphi^5}\left(\frac{1}{V^n}\right)=-\frac{n}{V^{n+1}}\frac{d^5V}{d\varphi^5}+\cdots.\qquad(28a)$$

以(25)各式分別代入(28)及(28a)各式,得:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{V^n}\right) &= +n\frac{\eta^2 t}{V^{n+2}},\\
\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{V^n}\right) &= +n\frac{\eta^2}{V^{n+4}}\{1-t^2+\eta^2+(n+1)\eta^2t^2\},\\
\frac{d^3}{d\varphi^3}\left(\frac{1}{V^n}\right) &= -n\frac{\eta^2 t}{V^{n+6}}\{4-(3n-2)\eta^2+3(n+2)\eta^2t^2-\\
&\quad -(3n+2)\eta^4-(n+1)(n+2)\eta^4t^2\},\\
\frac{d^4}{d\varphi^4}\left(\frac{1}{V^n}\right) &= -n\frac{\eta^2}{V^{n+8}}\{4-4t^2-3(n-2)\eta^2+\\
&\quad +(22n+32)\eta^2t^2-3(n+2)\eta^2t^4+\cdots\},\\
\frac{d^5}{d\varphi^5}\left(\frac{1}{V^n}\right) &= +16n\frac{\eta^2 t}{V^{n+10}}\{1+\cdots\}.
\end{aligned}\right\}\quad(29)
$$

命 $n=3$，則得：

$$
\left.\begin{aligned}
M_0' &= +\frac{3c\eta^2 t}{V^5} = M_0\frac{3\eta^2 t}{V^2},\\
M_0'' &= +\frac{3c\eta^2}{V^7}(1-t^2+\eta^2+4\eta^2t^2) =\\
&= +3M_0\frac{\eta^2}{V^4}(1-t^2+\eta^2+4\eta^2t^2),\\
M_0''' &= -\frac{3c\eta^2 t}{V^9}(4-7\eta^2+15\eta^2t^2-11\eta^4-20\eta^4t^2) =\\
&= -3M_0\frac{\eta^2 t}{V^6}(4-7\eta^2+15\eta^2t^2-11\eta^4-20\eta^4t^2),\\
M_0^{\mathrm{IV}} &= -3M_0\frac{\eta^2}{V^8}(4-4t^2-3\eta^2+93\eta^2t^2-15\eta^2t^4),\\
M_0^{\mathrm{V}} &= +48M_0\frac{\eta^2 t}{V^{10}}.
\end{aligned}\right\}\quad(30)
$$

又命 $n=1$，則得

$$\left.\begin{aligned}
N_0' &= +N_0\frac{\eta^2 t}{V^2},\\
N_0'' &= +N_0\frac{\eta^2}{V^4}(1-t^2+\eta^2+2\eta^2t^2),\\
N_0''' &= -N_0\frac{\eta^2 t}{V^6}(4-\eta^2+9\eta^2t^2-5\eta^4-6\eta^4t^2),\\
N_0^{\mathrm{IV}} &= -N_0\frac{\eta^2}{V^8}(4-4t^2+3\eta^2+54\eta^2t^2-9\eta^2t^4),\\
N_0^{\mathrm{V}} &= +N_0\frac{16\eta^2 t}{V^{10}}.
\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

在以上各式中 V，η^2 及 t 等字母下皆應有一指數 0，爲使公式簡化起見，故略去。

將(30)各式代入(26)式，則得：

$$\begin{aligned}
\Delta M = M-M_0 = M_0\Big\{&\frac{3\eta^2t}{V^2}\Delta\varphi+\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{V^4}(1-t^2+\eta^2+4\eta^2t^2)\Delta\varphi^2-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\eta^2t}{V^6}(4-7\eta^2+15\eta^2t^2-11\eta^4-20\eta^4t^2)\Delta\varphi^3-\\
&-\frac{1}{8}\frac{\eta^2}{V^8}(4-4t^2-3\eta^2+98\eta^2t^2-15\eta^2t^4)\Delta\varphi^4+\\
&+\frac{2}{5}\frac{\eta^2t}{V^{10}}\Delta\varphi^5\Big\}.
\end{aligned}\tag{32}$$

又將(31)各式代入(27)式，得：

$$\begin{aligned}
\Delta N = N-N_0 = N_0\Big\{&\frac{\eta^2t}{V^2}\Delta\varphi+\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{V^4}(1-t^2+\eta^2+2\eta^2t^2)\Delta\varphi^2-\\
&-\frac{1}{6}\frac{\eta^2t}{V^6}(4-\eta^2+9\eta^2t^2-5\eta^4-6\eta^4t^2)\Delta\varphi^3-\\
&-\frac{1}{24}\frac{\eta^2}{V^8}(4-4t^2+3\eta^2+54\eta^2t^2-9\eta^2t^4)4\varphi^4+\\
&+\frac{2}{15}\frac{\eta^2t}{V^{10}}\Delta\varphi^5\Big\}.
\end{aligned}\tag{33}$$

以上兩個公式只能用來計算M和N相當於 $\Delta\varphi$ 的增量 $\Delta M = M-M_0$ 及 $\Delta N = N-N_0$；至於 M_0 及 N_0 則可分別用公式(17)及(18)或(20)及(21)來進行。例如，我們若要推算每隔緯度一分的M值時，則可以先根據(17)或(20)式先推算每度的 M_0 值，然後再用(32)式在各度