

普通高等教育“十五”国家级规划教材



高等院校力学类系列教材  
Textbook Series in Mechanics for Higher Education

李俊峰 主编

Li Junfeng

# 理论力学

Classical Mechanics

张 雄  
任革学 编著  
高云峰

Zhang Xiong  
Ren Gexue  
Gao Yunfeng



982



高等院校力学类系列教材

03/-43  
L32

普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 理论力学

李俊峰 主编

张 雄 任革学 高云峰 编著



清华大学出版社



Springer

(京)新登字 158 号

## 内 容 简 介

本教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。

本套教材包括主教材——《理论力学》、学生学习指导书——《理论力学辅导与习题集》、教师教学参考书——《理论力学(教师参考书)》和一张供课堂使用的教学多媒体光盘,由经验丰富的授课教师在进行教学实践的基础上,适应当前国内教学改革的需要,结合清华大学理论力学教研组的教学经验编写而成。

本书为《理论力学》主教材,以牛顿力学和分析力学为两条并行主线贯穿整个课程,以微积分、线性代数以及物理课的力学部分为基础,重点介绍最具理论力学课程特点的基础内容,重点讲授动力学内容和分析力学方法,并从多种不同的角度讲解基本概念、基本公式和基本方法。全书共分4篇,分别讲述运动学,动力学的基本原理及其在静力学中的应用,动力学的基本内容,动力学专题。

本套教材可作为高等院校机械、土建、水利、航空和力学等专业的理论力学或工程力学课程教材,也可供有关技术人员作为自学用书。

书 名: 理论力学

作 者: 李俊峰 主编

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

责任编辑: 陈朝晖

印 刷 者: 北京市清华园胶印厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 20.5 字数: 409 千字

版 次: 2001 年 8 月第 1 版 2002 年 9 月第 2 次印刷

书 号: ISBN 7-302-04700-6/O·266

印 数: 6001~8000

定 价: 24.00 元

# 前 言

本套教材是作者在近几年研究教学改革的基础上,结合清华大学理论力学教研组的教学经验写成的。编写这套《理论力学》教材的主要目的是为了适应当前国内教学改革的需要,用较少的时间讲授理论力学的基本内容,希望能够既节省授课学时,又不降低课程的基本要求。在编写中作者遵循如下4个原则:1. 以牛顿力学和分析力学为两条并行主线贯穿整套教材,内容完整、结构紧凑、叙述严谨、逻辑性强;2. 以微积分、线性代数以及物理课的力学部分为基础,重点介绍最具理论力学课程特点的基础内容;3. 重点讲授动力学内容和分析力学方法,因为它们在理论和应用方面都更有价值,内容也更丰富;4. 从多种不同的角度讲解基本概念、基本公式和基本方法,既有严格的理论证明,又有形象直观的物理解释。

本套教材包括主教材——《理论力学》、学生学习指导书——《理论力学辅导与习题集》、教师教学参考书——《理论力学(教师参考书)》和一张供课堂使用的教学多媒体光盘。

本书为《理论力学》主教材,分4篇共12章。

第1篇是运动学,包括两章。第1章是点的运动学,介绍点的运动的向量描述法、直角坐标描述法、自然坐标描述法、极坐标描述法以及球坐标描述法。第2章是刚体运动和复合运动,包括刚体一般运动、定点运动、平面运动、点的复合运动和刚体复合运动。这一章首先介绍如何用向量和矩阵描述刚体的一般运动,推导出一般运动的速度和加速度公式,引入角速度和角加速度概念;然后介绍在定点运动和平面运动中如何具体应用这些公式求解刚体运动学问题,并通过例题介绍了几种常用的处理平面运动问题的方法;最后介绍复合运动的思想和方法,引入相对导数的概念。在点的复合运动部分给出了最一般情况下点的速度和加速度合成公式,例题包括牵连

运动为平动、定轴转动以及平面运动的情况。在刚体复合运动部分给出了最一般情况下刚体角速度和角加速度合成公式,例题包括绕平行轴的定轴转动合成、绕相交轴的定轴转动合成的情况。

第2篇讲述动力学的基本原理及其在静力学中的应用。第3章讲述牛顿定律和达朗贝尔-拉格朗日原理(动力学普遍方程)以及相关的基本概念,如约束及其分类、约束反力与受力分析、虚位移、虚功与理想约束等。本书将牛顿定律和达朗贝尔-拉格朗日原理作为经典力学的两个独立的基石。牛顿定律是在天文观测的基础上归纳总结出来的,可以用实验来验证,我们这里将它们当作无需证明的公理看待;达朗贝尔-拉格朗日原理是分析力学的基本原理之一,在处理相同的力学问题时,它和牛顿定律是等价的。第4章介绍虚位移原理及其广义坐标形式和势能形式在平衡问题中的应用。第5章是刚体静力学(也称几何静力学)内容。首先由达朗贝尔-拉格朗日原理给出力系等效与简化的条件,在此基础上研究力系简化这一动力学问题,进而探讨力系平衡(或刚体平衡)这一静力学问题;然后介绍刚体平衡方程的推广应用,包括考虑摩擦的平衡问题、刚体系平衡问题、桁架内力求解等;最后介绍了动静法,动静法是用静力学的思想和方法求解动力学问题,不需要动力学的知识做基础(这也是可以在静力学之后、动力学普遍定理之前介绍动静法的原因)。

第3篇介绍动力学的基本内容,包括动力学普遍定理和拉格朗日方程。第6章利用牛顿定律推导了质系动量定理、动量矩定理,作为这些基本定理和方程的应用,介绍了刚体平面运动微分方程和碰撞问题。第7章从牛顿定律推导了质系动能定理和功率方程,并通过例题介绍了动力学普遍定理在刚体平面运动动力学中的综合应用。第8章从达朗贝尔-拉格朗日原理出发推导了第二类拉格朗日方程,介绍拉格朗日方程第一积分(包括广义能量积分和广义动量积分)以及拉格朗日方程的应用。

第4篇是动力学专题,介绍质系相对非惯性参考系的动力学、变质量质系动力学、机械振动基础、三维刚体动力学基础等,这些内容是质系动力学基本定理的应用或推广。

书中介绍的一些扩展性知识采用楷体,如果整个章节属于扩展内容,则在标题前加\*号,有兴趣的读者可以选择阅读。

《理论力学辅导与习题集》分章总结归纳基本概念、基本定理及其应用技巧,配有大量例题和习题供学生参考和练习。每一章均包括8部分:“内容摘要”总结本章的主要内容,“基本要求”分别提出需要一般了解的、重点掌握的和熟练应用的各项内容,“典型例题”给出解题的基本思路、方法和常用技巧,“讨论”是对基本概念、解题方法的深入与扩展,“疑难解答”用问答形式分析学生常见的疑难问题,并给出相关背景知识,“常见错误”对学生作业中的常见错误给出提示与分析,“趣味问题”利用理论力学知识分析或解释生活中常见的趣味力学问题,“习题”包括各种类型的习题,覆盖了

本章的基本要求。另外还配有少量需要利用计算机求解的习题,并在书中介绍了用计算机求解理论力学问题的基本方法、算法和常用程序。《理论力学(教师参考书)》力求为教师提供全面详尽的教学参考。为了方便广大教师的课堂教学,我们特别制作了与本套教材配套使用的教学多媒体光盘,其中包括清华大学理论力学教师讲课所用讲稿的全套 PowerPoint 文件,内含大量三维动画、图片、录像等素材,有助于加深学生对基本概念的理解。授课教师可以在教学中直接使用这些材料,也可以根据实际教学情况很方便地对光盘内容进行修改和提高。

参加本书编著工作的有李俊峰、张雄、任革学和高云峰,具体分工如下:总体框架、前言、绪论、第1~5章和全书统稿由李俊峰负责,第6~8章由张雄负责,第9~10章由任革学、李俊峰负责,第11~12章由任革学、张雄负责,全书的习题和答案由高云峰负责。

清华大学工程力学系贾书惠教授、李万琼教授、陆明万教授、薛克宗教授参与了课程体系和内容讨论。徐晓云同学参加了文字、图表编辑工作。编者在此感谢他们的支持。

为了配合本教材使用,我们开设了理论力学网络辅助教学网站(网址是:<http://166.111.37.142/lljx>),读者可以通过该网站浏览电子讲义和作业解答、开展网上讨论、提交读者反馈意见。

编者

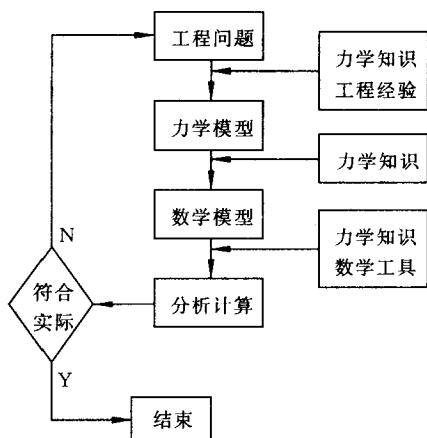
2001年3月于清华园

# 绪 论

力学研究物质最基本的运动——机械运动的规律，它具有基础科学的性质，是很多工程技术（机械、土木、水利、建筑、车辆、航空、航天等）的基础，同时也在这些工程中有具体、直接的应用。因此力学成为许多领域科技人员的必备基础知识。

力学可以大致分为实验力学和理论力学（广义）。前者在大量实验和观测基础上建立物质的性质、运动和改变运动的原因之间的关系。后者则是在某些公理（例如变分原理、牛顿定律等）的基础上用严格的数学推导得到的知识，具有演绎的性质。理论力学研究的对象不是具体的实际物体，而是它们的模型，包括质点、质点系、刚体、连续介质（弹性体和流体等）……本课程沿用“理论力学”的习惯叫法，但不研究连续介质模型，是狭义的理论力学。

理论力学主要通过讲解力学的基本概念、定理及其应用，介绍处理力学问题的基本方法。处理力学问题通常包括力学建模、数学建模、方程求解与分析等几个步骤（如下页图所示）。力学建模是指把一个实际的工程对象抽象成适当的力学模型（主要包括质点、质点系、刚体、弹性体、流体等）。这需要同时对工程实际和各种力学模型都有较全面深入的理解，而学习理论力学的同学一般还不具有丰富的工程经验和其他相关的力学知识，因此本课程的重点不在力学建模方面。数学建模是指利用基本的力学原理（或实验）建立描述各种力学模型的数学方程，包括代数方程、常微分方程、偏微分方程、差分方程等。理论力学的核心任务是利用牛顿力学原理和分析力学原理建立质点、质点系和刚体运动的微分方程，通常都是常微分方程。常微分方程的求解和分析是数学课的内容，在理论力学中也不是重点。当然，对于一些比较简单的例题和习题，我们也可以比较“彻底”地解决：逐步进行力学建模、数学建模、方程求解或定性分析，最后再返回到实际问题中进行合理性验证分析。



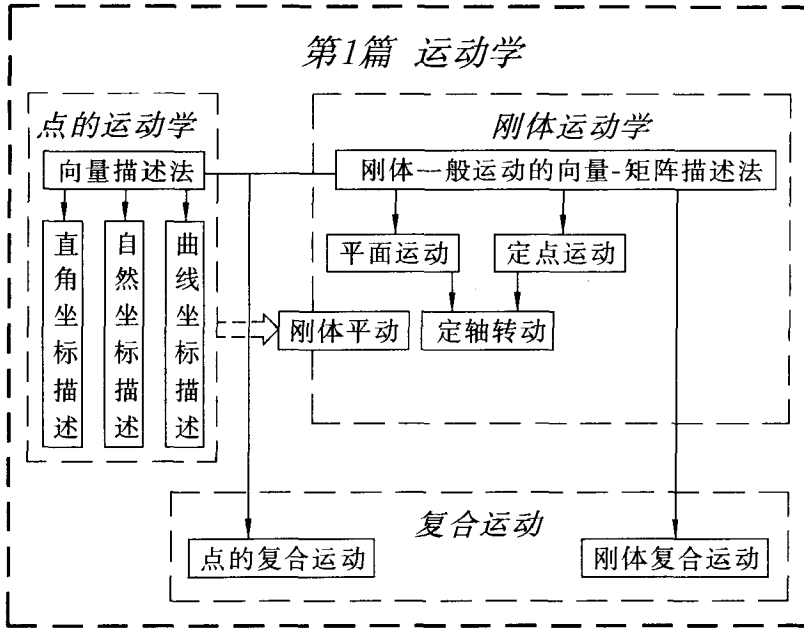
学习牛顿力学内容时同学反映“理论容易，做题难”。其原因是牛顿力学的理论内容是学生以前学过的力学知识的深化和推广，较容易接受。牛顿力学的公式一般是向量形式，在不同的坐标系中有不同的表达式，选用不同的坐标系会使解题的难易程度不同，因此很多习题不是简单套公式就可以解决的。

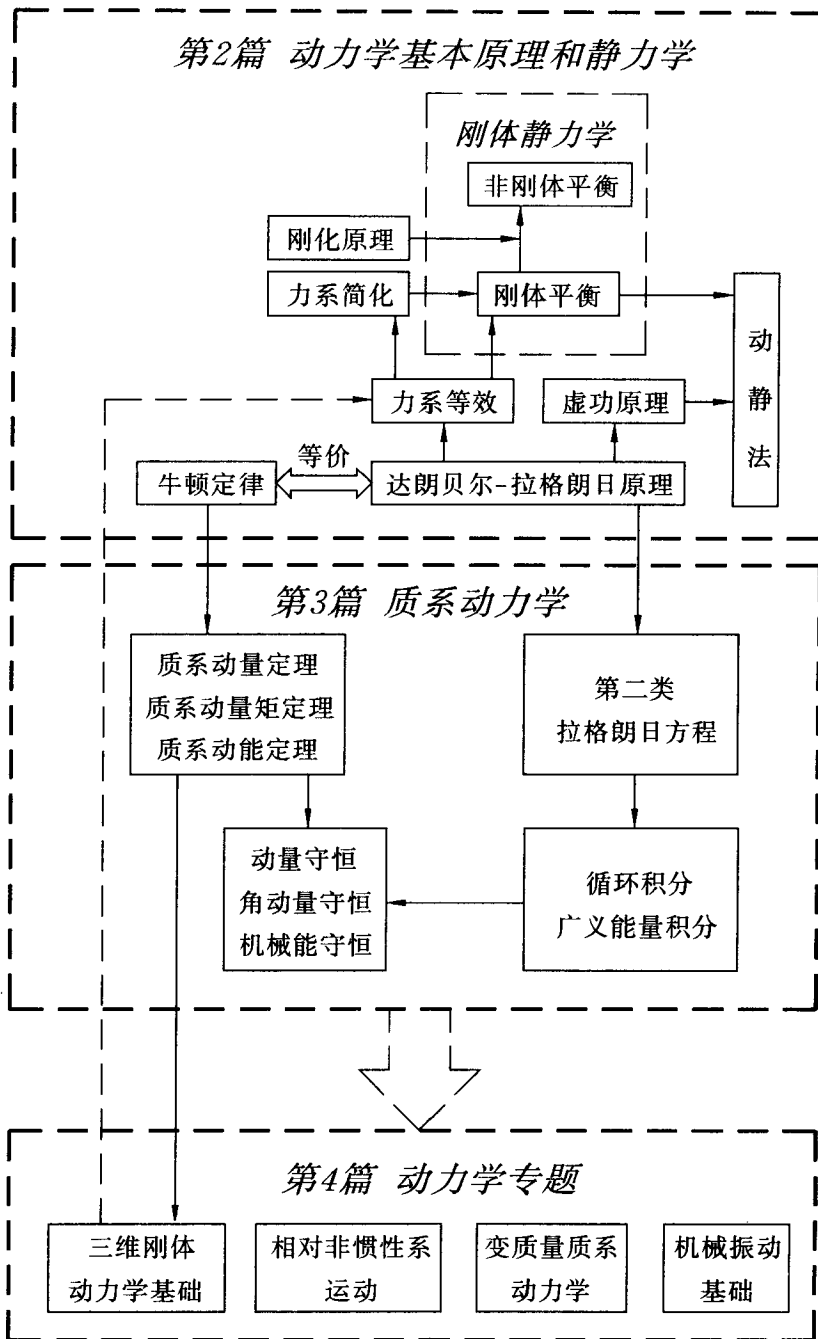
与牛顿力学相比，分析力学内容对同学来说比较陌生。分析力学以变分原理作为基本公理，通过严格的数学推导建立运动微分方程，其中有些概念也比较抽象，因此在理论上比牛顿力学难一些，但是利用分析力学方法建立运动微分方程的过程和步骤比较程式化，不容易出错，所以分析力学内容是“做题容易，理论难”。

作为一门基础课，学习理论力学务必达到以下要求：准确理解基本概念，熟悉基本定理和公式并能灵活应用，学会一些研究力学问题的基本方法。为此既要钻研理论又要做适量的习题。

为了方便读者阅读，下面给出了本书的结构和理论体系框图。图中小的实线方框表示课程内容，箭头表示逻辑推理（其中指向力学等效的虚线箭头所表示的逻辑推理本书没有采用），虚框表示内容的归类。







# 目 录

绪 论	IX
第 1 篇 运动学	1
引 言	1
第 1 章 点的运动学	4
1.1 向量描述法	4
1.2 直角坐标描述法	6
1.3 自然坐标描述法	10
1.4 极坐标描述法	13
* 1.5 曲线坐标描述法	15
本章小结	17
习 题	18
第 2 章 刚体运动与复合运动	22
2.1 刚体运动的向量-矩阵描述	22
* 2.2 刚体定点运动	26
2.3 刚体平面运动	29
2.4 点的复合运动	38
* 2.5 刚体复合运动	45
本章小结	48
习 题	49

<b>第 2 篇 动力学基本原理和静力学</b> .....	65
<b>引 言</b> .....	65
<b>第 3 章 牛顿定律与达朗贝尔-拉格朗日原理</b> .....	66
3.1 牛顿定律 .....	66
3.2 约束与约束反力 .....	71
3.3 虚位移 .....	76
3.4 达朗贝尔-拉格朗日原理 .....	79
本章小结 .....	82
习 题 .....	83
<b>第 4 章 虚位移原理及应用</b> .....	87
4.1 虚位移原理 .....	87
4.2 广义坐标形式的静力学普遍方程 .....	92
4.3 主动力有势情况下的静力学普遍方程 .....	99
本章小结 .....	103
习 题 .....	103
<b>第 5 章 力系简化与平衡问题</b> .....	108
5.1 力系的主向量与主矩 .....	108
5.2 力系等效与简化 .....	110
5.3 刚体平衡方程 .....	117
5.4 平面力系的平衡方程 .....	119
5.5 考虑摩擦的平衡问题 .....	124
5.6 刚体系和变形体的平衡 .....	129
5.7 动静法 .....	135
本章小结 .....	138
习 题 .....	139
<b>第 3 篇 质系动力学</b> .....	151
<b>引 言</b> .....	151
<b>第 6 章 质系动量和动量矩定理</b> .....	152
6.1 质系动量定理 .....	152
6.2 质系动量矩定理 .....	158
6.3 刚体平面运动微分方程 .....	168

6.4 碰撞 .....	173
本章小结 .....	180
习 题 .....	181
<b>第 7 章 质系动能定理 .....</b>	<b>188</b>
7.1 质系的动能 .....	188
7.2 质系动能定理 .....	190
7.3 质系普遍定理的综合应用 .....	194
本章小结 .....	198
习 题 .....	199
<b>第 8 章 第二类拉格朗日方程及其应用 .....</b>	<b>204</b>
8.1 第二类拉格朗日方程 .....	204
8.2 拉格朗日方程的第一积分 .....	209
* 8.3 碰撞问题的分析力学解法 .....	214
本章小结 .....	215
习 题 .....	216
<b>第 4 篇 动力学专题 .....</b>	<b>223</b>
<b>第 9 章 质系在非惯性参考系中的动力学 .....</b>	<b>224</b>
9.1 非惯性参考系中的动力学普遍定理 .....	224
9.2 相对地球的运动 .....	229
习 题 .....	233
<b>第 10 章 变质量质系动力学 .....</b>	<b>236</b>
10.1 变质量质系动量定理和动量矩定理 .....	236
10.2 变质量质点的运动 .....	238
* 10.3 变质量刚体的运动 .....	243
习 题 .....	244
<b>第 11 章 机械振动基础 .....</b>	<b>246</b>
引 言 .....	246
11.1 单自由度振动的线性化方程 .....	247
11.2 单自由度系统的自由振动 .....	251
11.3 单自由度系统的强迫振动 .....	258

---

* 11.4 两个自由度系统的自由振动·····	265
习 题·····	268
* 第 12 章 三维刚体动力学基础 ·····	272
* 引 言·····	272
* 12.1 刚体作定点运动时的动量矩和动能·····	272
* 12.2 惯量矩阵·····	275
* 12.3 刚体动力学方程·····	279
* 12.4 陀螺近似理论·····	287
习 题·····	290
参考文献·····	294
习题答案·····	296

# 第 1 篇

## 运 动 学

### 引 言

运动学的任务是描述物体的运动,研究描述运动的方法,确定速度、加速度和其他运动学量。在运动学中不考虑运动产生和变化的原因,仅从几何观点分析物体如何运动,以及确立合适的方法描述运动。

按照爱因斯坦的相对论,时间和空间的度量是随着物质运动的速度而变化的,当物质运动速度可以与光速相比时,时间、空间与物质运动的依赖关系就会变得更加明显。然而,宏观物体的机械运动速度远远小于光速,可以近似地认为时间和空间的度量与物质运动是无关的。因此我们将在绝对时间假设和空间假设(时间是均匀的、连续的,空间是均匀的、各向同性的、静止的)下,研究物体的机械运动。

在运动学中,我们的研究对象不是具体的实际物体,而是两个理想化模型——质点和刚体。质点是读者非常熟悉的模型,它假设物体是无限小的、有质量的点。在运动学中研究的问题与质量无关,可以把质点当作一个不计质量和大小的几何点。质点的运动学就是研究一个几何点的运动,因此称为点的运动学。刚体是由无穷多个质点构成的有限大小的物体,并且这些质点之间的距离始终保持不变,也就是说刚体是在任何情况下都不会有变形的。

显然,任何实际物体都有几何尺寸,在受到外力或温度变化时都要变形。真正的质点和刚体在自然界是不存在的,它们是实际物体的理想化模型。利用理想化模型研究问题,可以简化问题的复杂性和难度,但是任何模型都不能精确地代替实际对象,选用什么模型既要看研究对象,又要看研究内容和计算精度要求。例如大型人造地球卫星上既有固体的结构和仪器设备,又有液体燃料,还有柔性天线、太阳能帆板

等,因此卫星是一个由多种介质构成的复杂系统。当我们研究卫星的姿态运动(即卫星绕系统质心转动)时,如果固体的变形和液体燃料的晃动对卫星整体运动的影响小于工程上的精度要求,我们就可以将卫星当作刚体看待,这样就在精度允许的范围内大大简化了问题。如果我们研究卫星的轨道运动(即卫星质心的运动),由于卫星本身的尺寸(一般是米的量级)比其轨道运动的范围(一般为几千或几万公里)小得多,可以选用质点模型。

在运动学中我们经常用到向量的一些基本性质和基本运算。读者在高等数学课程中学过这些内容,在这里再简单介绍一下,以便于后面运用。我们约定用小写的黑斜体字母表示向量,例如  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}, \dots$ 。

向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的点乘用  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  表示,它是个标量。点乘运算可交换,即  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ 。如果  $\mathbf{e}$  是单位向量,则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$  就是向量  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{e}$  方向的投影。如果已知向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  都不为零,则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  等价于向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  相互垂直。

向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的叉乘用  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  表示,它是个向量,其方向垂直于向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  所在的平面。叉乘运算交换后符号相反,即  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 。如果已知向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  都不为零,则  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$  等价于向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  平行。

设有一个向量函数  $\mathbf{a}(t)$ ,当自变量  $t$  发生变化时,它的大小和方向都可能发生变化。为了描述这个性质,可以将  $\mathbf{a}$  写成

$$\mathbf{a} = ae$$

其中标量  $a$  表示向量  $\mathbf{a}$  的大小,它是  $t$  的标量函数。而  $\mathbf{e}$  是单位向量,它是  $t$  的向量函数,当  $t$  变化时,它的方向发生变化,但大小不变,始终等于 1。

我们用字母上加点表示这个量对时间的导数。例如  $\dot{r}$  表示标量函数  $r(t)$  对时间  $t$  的一阶导数,  $\ddot{\mathbf{b}}$  表示向量函数  $\mathbf{b}(t)$  对时间的二阶导数。单位向量  $\mathbf{e}(t)$  满足

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$$

将此式对  $t$  求导得

$$\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$$

利用点乘运算的可交换性,上式变为

$$2\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = 0$$

可见,单位向量的导数  $\dot{\mathbf{e}}$  必然与其自身垂直。在后面的自然坐标和极坐标描述法中,我们会看到单位向量的导数  $\dot{\mathbf{e}}$  一般不是单位向量。

根据求导法则,向量函数  $\mathbf{a}(t)$  对时间  $t$  的导数为

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}\mathbf{e} + a\dot{\mathbf{e}} \quad (1-1)$$

可见,向量  $\mathbf{a}$  的变化由两部分构成:大小变化和方向变化。如果向量  $\mathbf{a}$  的大小不变,则它的导数将始终与其自身垂直。如果向量  $\mathbf{a}$  的方向不变,则它的导数将始终沿着



其自身的方向。因此向量的变化分为两个部分：其大小变化沿着自身方向，方向变化垂直于自身方向。

另外，下面的两个关系式在本书中要经常用到

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (1-2)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} \quad (1-3)$$