高等教育叢書

東北人民政府文化教育委員會主編

高等代數

（上冊）

奥庫湟夫 著
楊從仁 譯

東北教育出版社
1952

高等代數

（上 冊）

奧庫涅夫著
楊從仁譯

東北教育出版社
一九五二年·瀋陽

高等代數(上冊)
(ВЫСШАЯ АЛГЕБРА)

著者: 奧庫涅夫(Л.Я.ОКУНЕВ)
譯者: 楊從仁
主編者: 東北人民政府文化教育委員會
出版者: 東北教育出版社 (瀋陽市北陵)
發行者: 新華書店東北總分店
印刷者: 瀋陽新華印刷廠

印數 1—20,000冊 一九五二年十一月初版
定價: [illegible]5,000元

前　言

本書係根據莫斯科、列寧格勒國營工業及理論書籍出版社（ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ）出版的奧庫湼夫（Л.Я.ОКУНЕВ）教授著高等代數（ВЫСШАЯ АЛГЕБРА）一九四九年修訂版（第四版）本譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合性大學及高等師範學校教科書。

讀者對本書如有批評和建議，請投函：「東北人民政府文化教育委員會」。

——編　者

目　　錄

第一章 行列式論

§ 1. 二階行列式

代數是什麽？這個問題，讀者或許提出過不只一次了。要對它的內容作一個詳盡和完全的說明，是比較困難的，因爲正和每門科學一樣，它並不是一個已經死去的或者硬化了的理論，相反的，它是不斷的在變化和發展着。

所謂古典代數（係指十八世紀到十九世紀的代數），主要是從事於高次方程式的解法和有理函數的性質的研究。在近百年來，代數得到了它前所未有的發展。近世代數的內容，多半在研究某一些集合的元素的運算。這些運算和集合的元素，可能是各種各樣的，但要緊的是：在許多地方，我們僅僅要求這些運算適合算術上的一些普通規則就够了。還應該指出的，是近世代數多半在討論集合，根據運算規則的不同，我們就分別叫這些集合做羣或環。

由於代數經過這樣的擴張，許多初看起來好像和代數沒有關聯的問題，因而也得到了解答。例如把羣論和環論應用在微分方程式論，拓撲學，代數幾何等，都得到了很大的成功。

爲了使讀者先熟習代數上的一些東西，我們把羣和環的概念留在以後（第三章）再講，現在先講行列式。

在這個高等代數的教程裏，我們先從行列式的理論開始，因爲這個理論不僅在代數上有重要意義，而且在另外的數學部門裏——例

如，解析幾何——也是一樣。以下我們就會看出，行列式的概念和含有多個未知量的一次方程式的理論，是密切關聯着的。

最簡單的一次方程式，——我們以後常常把它叫做平直方程式——是只含有一個未知量的方程式。由初等代數，我們知道每一個只含有一個未知量的一次方程式都可以寫成

$$ax=b. \qquad (1)$$

的形式。假若 $a\neq 0$，以 a 除方程式（1）的兩端，就得出（1）的唯一解，或者說方程式（1）的根：$x=\frac{b}{a}$。假若 $a=0$，但 $b\neq 0$，則方程式（1）無解，因爲每一個數 x[1] 乘以零後，顯然是零。最後，假若 $a=0$，$b=0$，則每一個數都滿足方程式（1），在這個情形下，我們所討論的方程式就有無限多的根。

比較複雜一點的情形，是含有兩個未知量的兩個方程式：

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

所謂方程組（2）的解，是指這樣的一對數 α，β：若令 $x=\alpha$，$y=\beta$，我們就可以把方程式（2）還原成恆等式。

要求出方程組（2）的解，先以 b_2 遍乘第一個方程式，b_1 遍乘第二個方程式，然後再由第一個方程式減去第二個方程式。由此得出

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \qquad (3)$$

用同樣方法消去 x，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \qquad (4)$$

假若代數式 $a_1b_2-a_2b_1$ 不等於零，用它除（3）和（4）的兩端，得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (5)$$

1）以後說《數》這一個字，假若不作特別聲明，都指的是複數（複數的特別情形是實數）。

我們很容易證明，未知量 x，y 所取的值（5）滿足方程組（2）。在§8，我們還可以看出，在 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的情形下，公式（5）代表方程組（2）的唯一的解。

例．試解方程組

$$2x-5y=1$$
$$3x+y=4$$

爲例，由公式（5），立刻得到方程式的根：

$$x=\frac{1\cdot 1-4\cdot(-5)}{2\cdot 1-3\cdot(-5)}=\frac{1+20}{2+15}=\frac{21}{17},$$

$$y=\frac{2\cdot 4-3\cdot 1}{2\cdot 1-3\cdot(-5)}=\frac{8-3}{2+15}=\frac{5}{17}.$$

直到現在，我們的討論是限制在 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 的情形下，但是，方程組（2）的係數所取的數值有時滿足 $a_1b_2-a_2b_1=0$。在這個時候，公式（5）已不能適用，因爲我們不可能以零作除數。由一些例子，容易看出，在 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 的情形下，方程組（2）或爲矛盾方程組，或具有無限多的解。

例如，方程組

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ 2x+2y&=1 \end{aligned}\qquad (a_1b_2-a_2b_1=1\cdot 2-2\cdot 1=0)$$

就是一個矛盾方程組，因爲第二個方程式的左端是第一個方程式的左端的二倍，但是它們的右端則相等。

方程組

$$\begin{aligned} 2x+y&=2,\\ 4x+2y&=4 \end{aligned}\qquad (a_1b_2-a_2b_1=2\cdot 2-4\cdot 1=0)$$

具有無限多的解，因爲第二個方程式是第一個方程式乘以2的結果。

現在再回到公式（5），我們試研究它構造的規律。

我們先把方程組（2）的未知量前面的係數列成下表：

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2. \end{matrix} \qquad (A)$$

這個表叫做一個矩陣，係數 a_1, b_1, a_2, b_2 叫做這個矩陣的元素。這個矩陣的第一行是第一個方程式的係數，第二行是第二個方程式的係數。從矩陣（A）作兩個乘積（交叉相乘）：a_1b_2 和 a_2b_1. 假若由第一個乘積減去第二個乘積，恰得分式（5）的公分母：

$$D=a_1b_2-a_2b_1.$$

這個代數式叫做二階行列式，它是由矩陣（A）的數所構成的，a_1, a_2, b_1, b_2 叫做行列式的元素。行列式 D 常用下面的符號代表：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

現在就容易看出分式（5）的分子的構造。x 的分子，是把分母的 a_1 和a_2 依次換成方程組的絕對項 c_1 和 c_2 而得來。完全同樣，y 的分子是把分母的 b_1 和 b_2 依次換成絕對項 c_1 和 c_2 而得來。依照上面用的符號，我們就可以把這兩個分子寫成：

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

由此，就可以把公式（5）寫成下面的形式：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (5')$$

例. 解方程組

$$5x-3y=7,$$

$$2x-5y=1.$$

我們首先求這個方程組的行列式:

$$D=\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -5\end{vmatrix}=5\cdot(-5)-2\cdot(-3)=-19.$$

要求 x 的分子，我們把行列式 D 的第一列依次換成絕對項 7 和 1，經過這個代換後得

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}=7\cdot(-5)-1\cdot(-3)=-32.$$

同樣，把 D 的第二列依次換成絕對項，得出下面的行列式:

$$D_2=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\cdot1-2\cdot7=-9.$$

因爲 $D\neq0$，由公式 (5) 得

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-32}{-19}=\frac{32}{19},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-9}{-19}=\frac{9}{19}.$$

§ 2. 三階行列式

現在我們討論含有三個未知量的方程組:

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{array}\right\}\qquad(1)$$

爲了求這個方程組的解，我們用下述的方法，這個方法雖不太自然，但是很快的就會達到目的。

所謂方程組 (1) 的解，是指這樣的三個數 α,β,γ: 若令 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, 我們就可以把方程式 (1) 還原成恆等式。

用 $b_2c_3-b_3c_2$ 乘第一個方程式，$b_3c_1-b_1c_3$ 乘第二個方程式，$b_1c_2-b_2c_1$ 乘第三個方程式，然後再把這三個方程式相加得

$$
\begin{aligned}
&(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x\\
&+(b_1b_2c_3-b_1b_3c_2+b_2b_3c_1-b_2b_1c_3+b_3b_1c_2-b_3b_2c_1)y\\
&+(c_1b_2c_3-c_1b_3c_2+c_2b_3c_1-c_2b_1c_3+c_3b_1c_2-c_3b_2c_1)z\\
&=(d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1).
\end{aligned}
$$

我們容易看出，y 和 z 前面的括弧內所含的項相互消去，未知量 y 和 z 因而不再出現，由此得

$$
\begin{aligned}
&(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x\\
&=(d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1). \quad (2)
\end{aligned}
$$

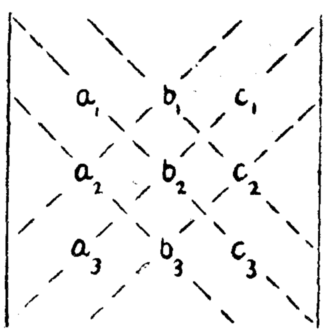
在方程式（2）的左端，x 前面的係數是一個比較繁長的式子

$$D=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \quad (3)$$

這個式子叫做三階行列式，$a_1, a_2, a_3, b_1, \cdots,\ c_1, \cdots$ 叫做這個行列式的元素。三階行列式常用下面記號代表：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

假若研究這個行列式的構造，我們就會發現下面的規則（通常叫它做對角綫定則）：



按照上表，沿着≪左≫主對角綫從左上方到右下方得 $a_1b_2c_3$，沿着≪右≫主對角綫從右上方到左下方得 $c_1b_2a_3$。除了這兩個主對角綫外，還可以引四個≪不完全≫對角綫 b_1c_2，a_2b_3，b_1a_2 和 c_2b_3。和左主對角綫平行的不完全對角綫可以叫它做不完全左對角綫，反之，叫它做不完全右對角綫。我們容易看出，左主對角綫上的元素的積 $a_1b_2c_3$，在行列式 D 中是正號，右主對角綫上的元素的積 $a_3b_2c_1$ 在 D 中是負號。行列式 D 的其餘四項的每一個，都同樣是三個元素的積，在這個積中，有兩個因子位於同一不完全對角綫上，另外一個因子則在相反位置的角落裏。假若這個乘積的兩個因子在不完全左對角綫上，它在 D 內的符號就是正，反之就是負。例如由不完全對角綫上取 a_2 和 b_1，相反位置的角落裏取 c_3，就得出 D 的一項 $a_2b_1c_3$，因爲有兩個因子在不完全右對角綫上，所以它在 D 內的符號是負。

例．計算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

利用對角綫定則得：

$$D=1\cdot 2\cdot 2+2\cdot 1\cdot 3+3\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot 3-2\cdot 2\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1=-11.$$

方程式（2）的右端，也同樣是一個三階行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

由此我們就可以把方程式（2）寫成下面的形式：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\cdot x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}. \qquad (4)$$

同樣可以證明未知量 y 和 z 依次滿足下述的兩個方程式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

事實上，假若用 $a_3c_2-a_2c_3$ 乘方程組（1）的第一個方程式，用 $a_1c_3-a_3c_1$ 乘第二個方程式，$a_2c_1-a_1c_2$ 乘第三個方程式，然後再把這些方程式相加，就會得出方程式（5）。

最後，用 $a_2b_3-a_3b_2$ 乘方程組（1）的第一個方程式，用 $a_3b_1-a_1b_3$ 乘第二個方程式，$a_1b_2-a_2b_1$ 乘第三個方程式，然後再把這些方程式相加，就會得出方程式（6）。

假若行列式 $D\neq0$，由方程式（4），（5），（6）就可以解出 x, y, z：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

把未知量所取的值代入方程組（1），經過較長的計算後，就會知道方程組（1）的每一個方程式都還原成爲恆等式。

在 § 8 我們更進一步的研究一般的情形，就是含有 n 個未知量和 n 個方程式的平直方程組，由此，還可以知道，在 $D\neq0$ 的情形下，方程組（1）只能有唯一的一個解。

例．利用行列式解下面的方程組：

$$2x_1-4x_2+x_3=1,$$

$$x_1-5x_2+3x_3=2,$$

$$x_1-x_2+x_3=-1.$$

首先計算行列式 D:

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot1+(-4)\cdot3\cdot1+1\cdot(-1)\cdot1$$
$$-1\cdot(-5)\cdot1-(-4)\cdot1\cdot1-(-1)\cdot3\cdot2=-8.$$

因爲 $D\neq0$，所以方程組有解，而且是唯一的。其次，再計算其餘的三個行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=1\cdot(-5)\cdot1+(-4)\cdot3\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot1$$
$$-(-1)\cdot(-5)\cdot1-(-1)\cdot3\cdot1-2\cdot(-4)\cdot1=11.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot1+1\cdot3\cdot1+1\cdot(-1)\cdot1-1\cdot2\cdot1$$
$$-(-1)\cdot3\cdot2-1\cdot1\cdot1=9.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot(-1)+(-4)\cdot2\cdot1+1\cdot(-1)\cdot1$$
$$-1\cdot(-5)\cdot1-(-1)\cdot2\cdot2-1\cdot(-4)\cdot(-1)=6.$$

由此得:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

把未知量所取的值，代入原方程組驗算，就知道都能適合。

※習題.

1. 計算下面二階行列式的數值:

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}3&5\\6&8\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}5&10\\2&4\end{vmatrix}.$$

2. 計算下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{t^2-1} & \frac{1+t^2}{t^2-1} \end{vmatrix}.$$

3. 由驗算法，證明下面的恆等式：

a) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} aa_1+bc_1 & ab_1+bd_1 \\ a_1c+c_1d & b_1c+dd_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$,

d) $a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$,

e) $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

4. 利用二階行列式解下列諸方程組：

a) $5u+2v=3$,

$11u-7v=1$.

b) $x\cos\alpha - y\sin\alpha = a$,

$x\sin\alpha + y\cos\alpha = b$.

c) $5x-y=0$,

$x-2y=0$.

5. 利用對角綫定則計算下面的三階行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

6． 證明

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

7． 把習題3的恆等式 a)，b)，d)擴充到三階行列式。

8． 利用三階行列式，解下面的方程組：

a)
$$\begin{aligned} x+y-2z&=-3, \\ 5x-2y+7z&=22, \\ 2x-5y+4z&=4. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} bx-ay&=-2ab, \\ -2cy+3bz&=bc, \\ cx+az&=0. \end{aligned}$$ ※

§ 3． 高階行列式

由於研究了二階和三階行列式的構造，我們就可以引入任意階行列式的概念，利用高階行列式，可以解含有任意多個未知量的平直方程組。

在此我們先用所謂<u>二重添數</u>去代表行列式的元素：行列式的每一個元素都用同一個文字 a 代表，但是在 a 的下面附加兩個添數，第一個添數代表這個元素所在的行的數目，第二個添數代表它所在的列的數目。例如在行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中，元素 c_2 所在的位置是第二行和第三列，所以我們可用 a_{23} 去代表它。

利用新的記號，我們就可以把一個二階或三階行列式寫成下面的形式：